P. [illegible]MANN

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01022006 9

DIE ANALYTISCHE ZAHLENTHEORIE

ZAHLENTHEORIE.

VERSUCH

EINER

GESAMMTDARSTELLUNG DIESER WISSENSCHAFT

IN IHREN HAUPTTHEILEN.

VON

PAUL BACHMANN.

ZWEITER THEIL.

DIE ANALYTISCHE ZAHLENTHEORIE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

DIE ANALYTISCHE

ZAHLENTHEORIE.

DARGESTELLT

VON

PAUL BACHMANN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1894.

LIBRARY
OCT 1 5 1972
UNIVERSITY OF TORONTO

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

QA
295
B34
1894

Vorrede.

Mit der analytischen Zahlentheorie, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum vorlege, führe ich mein, mit den „Elementen der Zahlentheorie, Leipzig 1892“ begonnenes zahlentheoretisches Unternehmen um einen wichtigen Schritt weiter. Die analytische Zahlentheorie begreift in sich diejenigen Forschungen im Gebiete der höheren Arithmetik, welche auf analytische Methoden begründet sind, und hat insofern vor manchem andern Gebiete derselben ein erhöhtes oder weiteres Interesse. Ihre Entstehung datirt fast in die Anfänge der Zahlentheorie selber zurück. Kaum, dass letztere durch die so mannigfachen Arbeiten Euler's eine erste umfassende Grundlage gewonnen, war es auch schon dieser an ursprünglichen Ideen und Entdeckungen überreiche Forscher, der zuerst dazu geführt wurde, die Analysis zur Gewinnung arithmetischer Sätze zu verwenden. Seine bezüglichen Untersuchungen nahmen zwei verschiedene Richtungen: in der einen stiess er auf jene Gleichheit zwischen einem unendlichen Produkte und einer unendlichen Reihe, welche, wie wir erkennen werden, in der gesammten analytischen Zahlentheorie eine wesentliche Rolle spielt und ihm sogleich gestattete, den Satz, dass es unendlich viel Primzahlen gebe, auf analytische Weise zu erhärten; die andere Richtung führte ihn zu seinen berühmten Sätzen über die Zerfällung der Zahlen in Summanden. Nach Euler aber nahm die Zahlentheorie zunächst eine Entwicklung, bei welcher der analytische Weg zurückstehen musste. Das grosse systematische Werk von Gauss, die Disquisitiones Arithmeticae, begründete zuerst die Zahlentheorie als eine selbständige umfassende Wissenschaft und gab ihr eine reiche

Fülle von allgemeinen Problemen, die eine noch heute bei weitem nicht erschöpfte Entwicklung verlangten und zuliessen. Zwar hat schon unter den letztern Gauss selber solche erkannt und bearbeitet, welche durch ihre Natur eine analytische Behandlung gewissermassen herausfordern, doch geben seine Disquisitiones nur kurze Notizen darüber, und auch sein Nachlass nur einige Grundlinien seiner Methoden und vereinzelte Resultate. Auch hat Jacobi bereits mittels der Lehre von den elliptischen Funktionen den Euler'schen Sätzen der zweiten Kategorie andere, welche zumeist auf die Theorie der quadratischen Formen mit zwei oder mehr Unbestimmten Bezug haben, an die Seite zu stellen gewusst. Das Verdienst aber, durch eine weitere Verfolgung der ersten Richtung Euler'scher Forschung allgemeine analytische Methoden entdeckt und entwickelt zu haben, welche zur Lösung gewisser Kategorieen zahlentheoretischer Aufgaben geeignet sind, und so der eigentliche Schöpfer der analytischen Zahlentheorie geworden zu sein, kommt voll und ganz Dirichlet zu. Seine Untersuchungen, wie sie vor allem niedergelegt sind in den Abhandlungen: sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres in Crelle's Journal Bd. 18 und recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres ebendas. Bd. 19 und 21, sowie in der Abhandlung über die arithmetische Progression im Jahrgange 1837 der Abhandlungen der Berliner Academie, haben nicht nur gewisse Aufgaben, die naturgemäss der systematischen Entwicklung der Wissenschaft entsprungen waren, zu deren Bewältigung jedoch die rein arithmetische Behandlung weder vor noch nach ihm die nöthigen Mittel gefunden, auf's Genialste bezwungen, sondern sie haben zugleich auch selbst wieder eine Fülle theils von Fragen, theils von interessantesten Aufschlüssen und Beziehungen der behandelten Aufgaben zu andern Gebieten der Wissenschaft gezeitigt, wie z. B. den merkwürdigen Zusammenhang der Classenanzahl quadratischer Formen mit den quadratischen Resten auf der einen, mit der Kreistheilung auf der andern Seite, u. a. m. Es konnte nicht fehlen, dass einer so fruchtbaren ersten Anregung weitere erfolgreiche Anwendungen der Dirichlet'schen Methoden

folgten. In der That hat Dirichlet selbst schon seine Untersuchungen über die arithmetische Progression sowie über die Classenanzahl aus dem Gebiete der reellen Zahlen in das der gewöhnlichen complexen Zahlen übertragen. Nach ihm aber sind seine Methoden von Kummer und Anderen in den Gebieten der verschiedensten complexen Zahlen wiederholt; Kronecker hat die Reihe der Fragen, welche Dirichlet's Methoden erreichbar sind, noch erweitert; seine Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie sowie andere seiner Untersuchungen haben vielseitige Ergänzung und Ausdehnung gefunden, kurz: die Dirichlet'schen Methoden haben sich überaus fruchtbringend erwiesen und einen eigenen Zweig der höheren Arithmetik geschaffen, gleich interessant durch seine Resultate wie durch die Art und Weise, sie zu finden, eine Wissenschaft, die man füglich analytische Zahlentheorie nennen darf.

Noch besitzt die mathematische Literatur kein Werk, das die Zeichnung dieses ganzen Gebietes sich zur Aufgabe gemacht, denn die Dedekind'sche Darstellung von Dirichlet's zahlentheoretischen Vorlesungen bringt nur den kleineren Theil desselben. Zwar werden wir in kurzem mit der Herausgabe der Kronecker'schen Vorlesungen über Zahlentheorie ein Werk erhalten, welches, vorzüglich auch über dieses Gebiet derselben sich verbreitend, in seiner Art unübertrefflich sein wird. Die gefährliche Konkurrenz dieses Werkes durfte der Verfasser gleichwohl, wollte er sein Unternehmen weiterführen, nicht scheuen, auch dürfte neben demselben ein Buch, wie er es hier veröffentlicht, nicht überflüssig sein. Er gehört nicht zu Denen, welchen es vergönnt war, die Kronecker'schen Vorlesungen zu hören; nur eine ältere, skizzirende Nachschrift derselben, welche eben nur bis zu den Anfängen der Theorie der quadratischen Formen reicht (von Herrn Victor Mertens in Cöln), ist ihm bekannt geworden. Das vorliegende Werk ist, unabhängig von ihnen, unmittelbar aus dem Studium der gedruckten Originalarbeiten sei es von Kronecker, sei es von andern Forschern entstanden und nach ihnen gearbeitet worden; in der sichern Erwartung der — nun bevorstehenden — Herausgabe der Kronecker'schen

Vorlesungen hat der Verfasser nichts weiter jener Nachschrift entnommen, als einige unwesentlichere Punkte: die Begründung der Formel (42) auf Seite 32, die Formulirung des Satzes in Nr. 4 des 3. Abschnittes, ferner, von ihrer Herleitung abgesehen, die Integralformel (60) auf Seite 174, sowie die Entwicklung auf Seite 335, welche zur Formel (51) das. führt. Gegenüber den Vorlesungen, welche vorzüglich den Stempel Kronecker'scher Forschung tragen, war es die Absicht des Verfassers bei der Ausarbeitung seines Werkes, getreu dem in der Vorrede zu den Elementen der Zahlentheorie entwickelten Plane, von der analytischen Zahlentheorie in so engem Anschlusse, als es eine innerlich zusammenhängende Darstellung des Ganzen nur gestattet, an die Arbeiten der verschiedensten Forscher, welche sie ausgebildet, ein lebensvolles Bild zu entwerfen, das nicht nur von ihrem Wesen, ihren Aufgaben, Methoden und Ergebnissen, sondern insbesondere auch von ihrer Entwicklung eine deutliche Ansicht wie Einsicht gewährt.

Das Werk beschränkt sich aber hierbei auf Fragen der reellen Zahlentheorie, welche die hauptsächlichsten zahlentheoretischen Funktionen oder die Theorie der binären quadratischen Formen betreffen, weil die entsprechenden Fragen der höheren Gebiete, soweit ihre Erörterung erforderlich ist oder noch ein wesentliches Interesse darbietet, erst bei der Darstellung dieser letztern die geeignete Stelle finden. Es schliesst auch alle Anwendungen der Theorie der elliptischen Funktionen auf Zahlentheorie, denen ein besonderes Werk gewidmet werden soll, vollständig aus. Neben den Anwendungen der Analysis auf arithmetische Fragen, welche Dirichlet gelehrt hat, steht eine andere Verknüpfung der Zahlentheorie mit analytischen Gesichtspunkten, die man Hermite verdankt; sie charakterisirt sich weniger als eine Anwendung der Analysis auf höhere Arithmetik, als vielmehr als eine Einführung des Stetigen selbst in die letztere, und könnte vielleicht nicht uneben als zahlentheoretische Analysis benannt werden. Auch sie findet passender an einer andern Stelle unsers Unternehmens ihren Platz und ihre volle Würdigung; in diesem Werke müssen wir gänzlich von ihr Abstand nehmen.

Nach einem ersten, einleitenden Abschnitte, welcher einige allgemeine Sätze über Reihen und Produkte in Erinnerung und sogleich jene fundamentale Euler'sche Gleichung bringt, giebt ein besonderer Abschnitt Rechenschaft von den Untersuchungen von Euler, Jacobi u. A. über die Zerfällung der Zahlen in Summanden. Hieran schliesst sich ein dritter Abschnitt, welcher die für alles Folgende grundlegenden Sätze über die Dirichlet'schen Reihen, insbesondere jenen Satz über den Grenzwerth einer Reihe entwickelt, welcher als eine der wesentlichsten Stützen seiner analytischen Methoden anzusehen ist.

Als eine erste Anwendung dieser Methoden bringt der vierte Abschnitt den berühmten Satz von der arithmetischen Progression. Hierauf wird im 5. bis 10. Abschnitte alles, was bezüglich der Theorie der quadratischen Formen aus analytischen Grundsätzen gewonnen worden ist, im Zusammenhange entwickelt, indem die betreffenden Untersuchungen von Dirichlet, Gauss, Kronecker u. A., insbesondere über die Classenanzahl, zu einem einheitlichen Ganzen verarbeitet werden. Der Abschnitt 7 verbreitet sich über die Gaussischen Summen und ihre verschiedenen Bestimmungsweisen. Der 9. Abschnitt bestimmt die Anzahl der Geschlechter quadratischer Formen und beweist auf Kronecker'schem Wege den berühmten Gaussischen Satz von der Duplikation der Classen; der 10. Abschnitt ist dem Beweise des Dirichlet'schen Satzes über die Darstellung von Primzahlen durch quadratische Formen in engem Anschlusse an die Arbeiten von H. Weber und A. Meyer gewidmet.

Mit dem 11. Abschnitte geht das Werk über zur Betrachtung der zahlentheoretischen Funktionen, ihres Zusammenhanges unter sich und mit der analytischen Funktion $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$, und der analytischen Natur der letztern, welche der Riemann'schen Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen zu Grunde liegt und von Hurwitz und Lipschitz unter wesentlich allgemeinerem Gesichtspunkt gefasst worden ist.

Der folgende Abschnitt erörtert dann den Begriff der asymptotischen Gesetze und betrachtet als eine hervorragende

Anwendung desselben die Gesetze, welche Legendre, Tschebischeff, Riemann, Mertens u. A. in Bezug auf die Häufigkeit der Primzahlen, sei es im allgemeinen, sei es derjenigen von bestimmter Qualität, in der Reihe der natürlichen Zahlen entdeckt haben.

Und ein letzter Abschnitt stellt die hauptsächlichsten Untersuchungen über die mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen, wie sie seit Dirichlet's epochemachenden Arbeiten von zahlreichen Forschern angestellt worden sind, nach den verschiedenen dabei verwendeten Methoden fortschreitend, in ihrem Verhältnisse zu einander dar, und führt dabei schliesslich auf die gemeinsame Grundlage des gesammten Gebietes der analytischen Zahlentheorie, auf die im 3. Abschnitte behandelten Dirichlet'schen Reihen wieder zurück.

Durch zahlreiche Hinweise auf die Originalarbeiten haben wir den Leser in den Stand gesetzt, über die Quellen des Werkes und sein Verhältniss zu ihnen sich näher zu unterrichten oder bei ihnen weitere Belehrung zu suchen. Wir weisen ausdrücklich hier noch auf die grössere Arbeit von Césaro im 10. Bd. der 2. série der Mém. de la Soc. Royale des Sciences de Liège sowie auf die Arbeiten von Gegenbauer in den Sitzungsberichten der Wiener Academie Jahrg. 89—93 und in den Denkschriften derselben Bd. 49 hin, welche reich an Einzelheiten — auch an Formeln — sind, da wir bei ihrer ungesichteten Natur wenig Gebrauch von ihnen haben machen können.

Weimar, den 28. November 1893.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Allgemeines über unendliche Reihen und Produkte.

Seite

Nr. 1. Convergenz unendlicher Reihen . . . . . 1—3

Nr. 2. Bedingt und unbedingt convergente Reihen. Die Funktion $\xi(s) = \sum n^{-s}$. . . . . 3—5

Nr. 3. Satz über das Produkt zweier Reihen . . . . . 5—6

Nr. 4. Convergenz (unbedingte) eines unendlichen Produktes . 6—8

Nr. 5. Die Euler'sche Gleichheit zwischen einem unendlichen Produkte und einer unendlichen Reihe. Die Summe $\sum \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s}$. . . . . 8—12

Zweiter Abschnitt.

Die Zerfällung der Zahlen in Summanden.

Nr. 1. Keim der Euler'schen Untersuchungen. Der Binomialcoefficient . . . . . 13—14

Nr. 2. Convergenz des unendlichen Produktes $\prod_i (1 + x_i z)$ und seine Entwicklung nach Potenzen von z . . . . . 14—17

Nr. 3. Das Produkt $\prod_i \left(\frac{1}{1 + x_i z}\right)$. . . . . 17—18

Nr. 4. Das Produkt $P = \prod_i (1 + x^i z)$ und $Q = \prod_i \left(\frac{1}{1 + x^i z}\right)$. Zerfällungen einer Zahl in m Summanden und solche in Summanden aus der Reihe 1, 2, 3, ... m. . . . . 18—22

Nr. 5. Das Produkt $\prod_i (1 - x^i)$. Satz über Pentagonalzahlen . . . . . 22—25

Nr. 6. Der Euler'sche Satz über die Summe aller Theiler einer Zahl. Sätze von Zeller und von Stern . . . . 25—29

Nr. 7. Die Euler'sche Formel $\prod_i (1 + x^i) = \prod_i \left(\frac{1}{1 - x^{2i-1}}\right)$ und ihre arithmetische Folgerung. Zerfällung einer Zahl in eine Summe von Potenzen von 2 . . . . . 29—31

Seite

Nr. 8. Jacobi's Formel

$$\prod_i (1-x^i)^3 = \sum_i (-1)^i (2i+1)\, x^{\frac{i^2+i}{2}}$$

direkt hergeleitet . . . . . 31—34
Nr. 9. Ihre arithmetische Bestätigung nach Jacobi . . . . 35—37
Nr. 10. Sätze über die Zerfällung einer Zahl $24h+3$ in die Summe dreier Quadratzahlen . . . . . 37—40
Nr. 11. Herleitung zweier Formeln von Gauss und von Jacobi, welche der Theorie der elliptischen Funktionen angehören, nach Lebesgue . . . . . 40—43
Nr. 12. Arithmetische Folgerungen . . . . . 43—45

Dritter Abschnitt.

Ueber die Dirichlet'schen Reihen.

Nr. 1. Allgemeiner Satz über die Summe $\sum_n \left(\frac{D}{n}\right)$. . . . . 45—50
Nr. 2. Ursprung der Dirichlet'schen Methoden aus Legendre's Versuch, das Reciprocitätsgesetz, insbesondere den Hilfssatz von der arithmetischen Progression zu beweisen . . . . . 50—52
Nr. 3. Die Dirichlet'schen Reihen. Princip von Abel über die Stetigkeit von Reihen, deren Glieder Funktionen einer Veränderlichen s sind. Beispiel . . . . . 52—54
Nr. 4. Allgemeiner Satz von der Reihe $\sum_n a_n \psi_n(s)$ . . . . . 54—56
Nr. 5. Anwendung auf die Dirichlet'schen Reihen . . . . 56—59
Nr. 6. Die Gleichung $\lim_{\varrho=0} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$.
Gleichheit zweier Dirichlet'schen Reihen. . . . . 59—62
Nr. 7 u. 8. Herleitung des allgemeinen Dirichlet'schen Satzes über den Grenzwerth einer Reihe. Specieller Fall: die Reihe $\sum_n \frac{1}{(b+an)^{1+\varrho}}$. . . . . 62—70
Nr. 9. Dirichlet's Beweis. . . . . 71—73

Vierter Abschnitt.

Der Satz von der arithmetischen Progression.

Nr. 1. Aufstellung des Satzes. Ursprung der Dirichlet'schen Beweismethode . . . . . 74—75
Nr. 2. Die Zahlencharaktere $\chi(n)$ und ihre Haupteigenschaften . . . . . 75—79
Nr. 3. Die Summen von der Form $\sum \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}$; drei Arten derselben . . . . . 79—81

Seite

Nr. 4. Umformung der Reihen der zweiten Art. Grenzwerthe der Reihen der ersten und der zweiten Art für $\varrho = 0$; dass der letztere nicht Null ist, wird später (Nr. 5 des 6. Abschnitts) sich zeigen . . . . . 81—83

Nr. 5 u. 6. Grenzwerth der Reihen der dritten Art und Nachweis, dass er nicht Null sein kann . . . . . 83—87

Nr. 7. Beweis des Satzes von der arithmetischen Progression . . . . . 87—88

Fünfter Abschnitt.

Die Classenanzahl quadratischer Formen. Grundformel.

Nr. 1. Die betreffenden Arbeiten von Gauss, Dirichlet und Kronecker . . . . . 89—90

Nr. 2. Das Grundprincip der Methode. Die Funktion $\psi(m)$. Herleitung der Formel

$$\tau \cdot \sum \psi(m) \cdot F(m) = \sum F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots \quad (x, y \text{ rel. prim})$$

im Falle einer negativen Determinante . . . . . 90—93

Nr. 3. Der Fall einer positiven Determinante; Ungleichheitsbedingungen, die zu erfüllen sind, wenn die Pell'sche Gleichung unendlich viele Lösungen hat . . . . 93—96

Nr. 4. Die Funktion $f(m) = \sum \psi\left(\frac{m}{\mu^2}\right)$ und die Gleichung

$$\tau \cdot \sum f(m) \cdot F(m) = \sum F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad 96—97$$

Nr. 5 u. 6. Sätze über die Funktionen $\psi(m)$ und $f(m)$. Die Reihe $\Phi = \sum_{\bar{\omega}} \frac{f(p^{\bar{\omega}})}{p^{s\bar{\omega}}}$ . . . . . 97—105

Nr. 7. Die Grundformel

$$\tau \cdot \sum f(m)\, m^{-s} = \sum (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-s} + \cdots$$

Ihre Convergenz für $s > 1$ . . . . . 105—108

Nr. 8. Beweis, dass die Pell'sche Gleichung bei positiver Determinante unendlich viele Lösungen hat . . . . 108—111

Nr. 9. Specielle Formen der Grundformel. Erste Folgerung: über die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl durch das Formensystem der Determinante D; die Fälle $D < 0$ und $D > 0$ sind zu trennen . . . . . 111—115

Nr. 10. Zweite Folgerung: Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Funktionen, wenn $D < 0$ ist; der Fall $D > 0$ . . . . . 115—117

Sechster Abschnitt.

Bestimmung der Classenanzahl durch eine unendliche Reihe.

		Seite
Nr. 1.	Geometrischer Hilfssatz über das Verhältniss eines Flächenstücks zur Anzahl von Netzpunkten in seinem Innern	118—121
Nr. 2.	Anwendung auf die Anzahl N der Systeme x, y ganzer Zahlen, für welche $ax^2+2bxy+cy^2<M$ ist	121—125
Nr. 3.	Grenzwerth von $\varrho \cdot \sum (ax^2+2bxy+cy^2)^{-(1+\varrho)}$ für $\varrho = 0$	126—129
Nr. 4.	Derselbe bei beschränkterem Umfange der Summation	129—132
Nr. 5.	Es giebt nur eine endliche Anzahl H von Classen quadratischer Formen; ihr Ausdruck durch eine unendliche Reihe. Ausfüllung der Lücke in Nr. 4 des 4. Abschnittes	132—133
Nr. 6.	Gauss' Herleitung der Formel für die Classenanzahl	133—139
Nr. 7.	Zurückführung der letztern auf den Fall, in welchem die Determinante frei ist von quadratischen Theilern	140—143
Nr. 8.	Eine interessante bezügliche Bemerkung von Dirichlet (vgl. 9. Abschnitt Nr. 6)	143—145

Siebenter Abschnitt.

Die Gaussischen Summen.

Nr. 1.	Einleitende historische Bemerkungen	145—148
Nr. 2.	Die elementaren Eigenschaften der Gaussischen Summen $\varphi(m, n)$	149—151
Nr. 3.	Ihre Zurückführung auf den Fall, wo n Primzahl ist. Die Bestimmung ihres absoluten Werthes	151—156
Nr. 4.	Dirichlet's Methode zur Bestimmung des Vorzeichens des letztern. Fundamentale Reciprocitätsbeziehung	156—161
Nr. 5.	Der 4. Gaussische Beweis des Reciprocitätsgesetzes quadratischer Reste	161—163
Nr. 6.	Der Werth der Gaussischen Summen einschliesslich des Vorzeichens. Die Hilfsformel zur Berechnung der Classenanzahl	163—167
Nr. 7.	Einfacher Algorithmus zur Werthbestimmung der Gaussischen Summen und des Jacobi'schen Symbols, nach Kronecker	167—169
Nr. 8.	Methode von Cauchy; sie beruht auf Jacobi's Formel für die lineare Transformation der Thetafunktionen. Cauchy's Fundamentalsatz über complexe Integration	169—172
Nr. 9.	Seine Anwendung zur Herleitung einer wichtigen Integralformel	172—174

Seite

Nr. 10. Herleitung der Jacobi'schen Formel aus Cauchy's Fundamentalsatz . . . . . 174—177
Nr. 11. Der Cauchy'sche Grenzfall derselben führt zur Bestimmung der Gaussischen Summen . . . . . 178—179
Nr. 12. Umgekehrt gewinnt man aus der letztern die Transformationsgleichung von Jacobi . . . . . 179—183
Nr. 13. Direkte Bestimmung der Gaussischen Summen mittels Cauchy's Fundamentalsatz . . . . . 183—187

Achter Abschnitt.

Berechnung der Classenanzahl.

Nr. 1. Zweierlei Wege zur Berechnung der Summe

$$S = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

Erster Weg: Die rationale Integration. Nothwendige Formeln . . . . . 188—193
Nr. 2. Berechnung der Summen S für die verschiedenen Fälle, welche die Determinante D bietet . . . . . 193—199
Nr. 3. Tabelle für die Ausdrücke der Classenanzahl, welche diesen Fällen entsprechen . . . . . 199—205
Nr. 4. Der zweite Weg führt auf trigonometrische Reihen zurück. Bestimmung von S für den Fall einer negativen Determinante . . . . . 205—213
Nr. 5. Vervollständigung der Tabelle für die Ausdrücke der Classenanzahl. Vergleichung dieser Ausdrücke. Eine Bestätigung von Cauchy. Merkwürdige arithmetische Folgerungen . . . . . 213—219
Nr. 6 u. 7. Die Umformung der Ausdrücke für den Fall einer positiven Determinante mittels der Kreistheilungsauflösung der Pell'schen Gleichung. Arithmetische Folgerung . . . . . 219—227
Nr. 8. Weitere Ausdrücke für die Classenanzahl. Beziehung der Ausdrücke für den Fall einer positiven und einer negativen Determinante zu einander . . . . . 227—232

Neunter Abschnitt.

Die Geschlechter der quadratischen Formen.

Nr. 1. Die Geschlechtscharaktere der quadratischen Formen und ihrer Classen . . . . . 233—236
Nr. 2. Die Anzahl der überhaupt möglichen Geschlechter. Nachweis ihrer Existenz, auf Grund des Satzes von der arithmetischen Progression . . . . . 236—240
Nr. 3 u. 4. Direkter Nachweis mittels der Dirichlet'schen Methoden. Die Funktion $k(n)$ . . . . . 240—246
Nr. 5. Sätze über Composition von Formen, Classen und Geschlechtern. Die Classen des Hauptgeschlechts . 246—250
Nr. 6. Regelmässige und unregelmässige Determinanten;

Seite

der Exponent der Irregularität. Anschliessende Sätze und Bemerkungen; unendlich viel positive Determinanten, für welche jedes Geschlecht nur eine Classe enthält . . . . . 250—255
Nr. 7. Ambige Classen und Classen, welche durch Duplikation entstehen . . . . . 255—256
Nr. 8. Hilfssatz über Zusammensetzung von Classen. Neue Definition der Classen, welche durch Duplikation entstehen . . . . . 256—258
Nr. 9—11. Bestimmung der Anzahl dieser Classen, nach Kronecker. Jede Classe des Hauptgeschlechts entsteht durch Duplikation. Die Anzahl der Ambigen gleich der Anzahl der Geschlechter . . . . . 259—269
Nr. 12. Sätze von Schering . . . . . 270—271

Zehnter Abschnitt.

Ausdehnung des Satzes von der arithmetischen Progression auf quadratische Formen.

Nr. 1. Der Dirichlet'sche Satz; Geschichtliches . . . . 272—273
Nr. 2. Einführung der Classencharaktere $K(C)$, ihre wichtigsten Eigenschaften und ihr Verhältniss zu der Funktion $k(n)$ des vorigen Abschnitts. . . . . 273—277
Nr. 3. Herleitung der Grundgleichung. Die Reihen L . . 278—282
Nr. 4. Die unter einander identischen Reihen L; nicht-identische aber gleiche Reihen . . . . . 282—286
Nr. 5. Die Reihen L zerfallen in drei Arten. Grenzwerthe der Reihen der 1. und 2. Art für $\varrho = 0$ . . . . . 286—290
Nr. 6. Untersuchung der Reihen der 3. Art . . . . . 290—295
Nr. 7. Beweis des Dirichlet'schen Satzes. . . . . 295—297
Nr. 8 u. 9. Nachträglicher Beweis dafür, dass die Reihen 2. und 3. Art nebst ihren Ableitungen nach ϱ endliche und stetige Funktionen von ϱ sind für $\varrho \gtreqless 0$. 297—307

Elfter Abschnitt.

Zahlentheoretische Funktionen.

Nr. 1. Ausgangspunkt: ein einfacher Satz der Combinationslehre. Die Funktion $\mu(n)$ von Mertens . . . 308—310
Nr. 2. Ein allgemeines Umkehrungsprincip. Vier Sätze von Lipschitz . . . . . 310—315
Nr. 3. Ein besonderer Fall des Umkehrungsprincips . . . 315—317
Nr. 4. Ein zweiter besonderer Fall desselben; verschiedene Anwendungen; Satz von Legendre und sein Beweis von Jonquières und von Lipschitz . . . . 317—325
Nr. 5. Zusammenhang der Funktion $\mu(n)$ und anderer zahlentheoretischer Funktionen mit der Funktion $\zeta(s)$ . . . . . 325—332
Nr. 6. Herleitung ihrer charakteristischen Eigenschaften aus diesem Zusammenhange . . . . . 332—336

Seite

Nr. 7. Eine Verallgemeinerung, nach Cantor . . . . . 336—338
Nr. 8. Die analytische Natur der Funktion $\zeta(s)$, nach Riemann, verallgemeinert von Lipschitz u. A. . . . 338—341
Nr. 9. Untersuchungen von Hurwitz. Die Funktionen $\zeta(s, a, m)$ . . . . . 341—347
Nr. 10. Die Dirichlet'schen Reihen, welche bei der Bestimmung der Classenanzahl auftreten. . . . . 347—351

Zwölfter Abschnitt.

Die Häufigkeit der Primzahlen.

Nr. 1. Asymptotische Ausdrücke. Die Euler'sche Summenformel und die Formel von Stirling. . . . . 352—354
Nr. 2. Legendre's Formel für die Anzahl der Primzahlen unterhalb x. Tschebischeff's Untersuchung, Annäherung mittels des Integrallogarithmus . . . . . 354—358
Nr. 3. Die Grundformel und Analyse einer zweiten Untersuchung von Tschebischeff . . . . . 358—361
Nr. 4. Zwei Hilfssätze von Mertens . . . . . 361—365
Nr. 5. Seine Herleitung zweier Formeln von Legendre betr. die Summe der reciproken Primzahlen unterhalb x . . . . . 366—371
Nr. 6 u. 7. Vervollständigung dieser Untersuchung durch Bestimmung der Summen derjenigen reciproken Primzahlen, welche vorgeschriebene Linearform haben 371—380
Nr. 8. Reihensatz von Tschebischeff . . . . . 380—382
Nr. 9. Riemann's Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen. Zurückführung auf die Funktion $\zeta(s)$. 382—386
Nr. 10. Einführung einer Funktion $\xi(t)$ an Stelle der letztern 386—391
Nr. 11. Herleitung des Gesetzes der Primzahlen . . . . . 392—396

Dreizehnter Abschnitt.

Die mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen.

Nr. 1. Verschiedene Bedeutung des Ausdrucks „mittlerer Werth". Erste Beispiele von Gauss . . . . . 397—400
Nr. 2. Mittlerer Werth für die Anzahl $T(n)$ und für die Summe $S(n)$ der Theiler von n, nach Dirichlet . 400—403
Nr. 3. Allgemeine Transformationsgleichung von Dirichlet 403—407
Nr. 4. Ein ausgezeichneter Fall derselben, bewiesen nach Césaro und nach Hermite, verallgemeinert von Lipschitz . . . . . 407—413
Nr. 5. Nochmals die Anzahl der Theiler. Formeln von Gegenbauer. Dirichlet's Untersuchung über ein die Division betreffendes Problem. . . . . 413—422
Nr. 6. Mittlerer Werth der Funktion $\varphi(n)$. Vorbemerkung 422—424
Nr. 7. Zwei Bestimmungen desselben: nach Dirichlet und nach Mertens . . . . . 424—428

		Seite
Nr. 8.	Anzahl der Brüche, deren Zähler und Nenner nicht grösser sind als n. Wahrscheinlichkeit, dass zwei Zahlen $< n$ relativ prim sind.	429—430
Nr. 9.	Mittlerer Werth für die Anzahl $P(n)$ der Zerlegungen von n in zwei relative Primzahlen. Zwei Bestimmungen desselben: nach Dirichlet und nach Mertens	430—436
Nr. 10.	Verallgemeinerung des geometrischen Hilfssatzes in Nr. 1 des 6. Abschnittes	436—438
Nr. 11.	Eine allgemeine Aufgabe von Lipschitz	438—440
Nr. 12.	Ihre Lösung	440—444
Nr. 13.	Erstes Beispiel: die Anzahl aller eigentlichen Darstellungen einer Zahl durch eine positive quadratische Form von mehreren Unbestimmten	444—447
Nr. 14.	Eine Aufgabe von Césaro.	447—450
Nr. 15.	Zweites Beispiel: die Funktion $P(n)$	450—453
Nr. 16.	Drittes Beispiel: die mittlere Anzahl der Classen von negativer Determinante	453—459
Nr. 17.	Direkte Bestimmung dieser mittleren Anzahl nach Mertens.	459—465
Nr. 18.	Zusammenhang der Dirichlet'schen Reihen mit der Bestimmung der mittleren Werthe	465—468
Nr. 19.	Entwicklung von $\zeta(1+\varrho)$ nach Potenzen von ϱ . .	468—470
Nr. 20.	Nochmals die Funktionen $T(n)$ und $P(n)$.	470—472
Nr. 21.	Die mittlere Anzahl der Geschlechter quadratischer Formen.	472—479
Nr. 22.	Halphèn's Methode zur Bestimmung der mittleren Werthe.	480—484
	Zusätze	485—494

Erster Abschnitt.

Allgemeines über unendliche Reihen und Produkte.

1. Die Anwendungen, welche wir im Folgenden von der Analysis auf zahlentheoretische Aufgaben zu machen gedenken, beruhen wesentlich auf der Betrachtung gewisser unendlicher Reihen und Produkte. Um eine sichere Grundlage für unsere Untersuchungen zu gewinnen, werden wir hier zunächst an einige fundamentale Begriffe und Sätze erinnern, welche für solche unendliche Ausdrücke gelten.

Unter der Summe einer unendlichen Reihe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots \tag{1}$$

kann füglich nur der Grenzwerth verstanden werden, gegen welchen die Summe ihrer ersten n Glieder:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \tag{2}$$

bei unendlich wachsendem n convergirt; je nachdem ein solcher Grenzwerth vorhanden ist oder nicht, heisst die Reihe (1) convergent oder divergent und im erstern Falle $\lim_{n=\infty} S_n$ ihr Werth. Zur Convergenz der Reihe ist hiernach zugleich nothwendig und hinreichend, dass der Unterschied

$$S_{n+m} - S_n$$

d. i.

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}$$

für jedes m beliebig klein bleibt, sobald n grösser ist als eine von m unabhängige hinreichend grosse Zahl ν.

Demnach convergirt z. B. die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

solange der Absolutwerth von x kleiner ist als 1.

Sind alle Glieder der Reihe (1) positiv, so genügt es zu ihrer Convergenz, wenn S_n bei unendlich wachsendem n einen endlichen Werth A nicht überschreitet; denn die Werthe

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \cdots$$

bilden alsdann eine Reihe stets wachsender Werthe, welche doch kleiner bleiben als A, und haben also einem bekannten Fundamentalsatze zufolge einen Grenzwerth.

Hiernach überzeugt man sich sogleich von der Convergenz der unendlichen Reihe

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots \tag{3}$$

für den Fall, dass $s>1$ ist. Fasst man nämlich von den Gliedern der Reihe successive 1, 2, 4, 8, ... Glieder zusammen, wie folgt:

$$1+\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}\right)+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}\right)+\left(\frac{1}{8^s}+\cdots+\frac{1}{15^s}\right)+\cdots,$$

so sind die einzelnen Theile der Reihe resp. kleiner als

$$1,\quad \frac{2}{2^s}=\frac{1}{2^{s-1}},\quad \frac{4}{4^s}=\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2,\quad \frac{8}{8^s}=\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3,\cdots$$

und folglich ist die vorstehende Reihe, wie weit man sie auch fortsetze, kleiner als die gleichweit fortgesetzte geometrische Reihe

$$1+\frac{1}{2^{s-1}}+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3+\cdots,$$

welche für $s>1$ einen endlichen Werth bezeichnet.

Dieselbe Reihe (3) aber divergirt, sobald $s\leqq 1$ ist. Denn, fasst man jetzt ihre Glieder folgendermassen zusammen:

$$1+\frac{1}{2^s}+\left(\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}\right)+\left(\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}\right)+\cdots,$$

so sind die eingeklammerten Theile der Reihe resp. grösser als

$$\frac{2}{4^s}=\frac{1}{2}\cdot 2^{2(1-s)},\quad \frac{4}{8^s}=\frac{1}{2}\cdot 2^{3(1-s)},\quad \frac{8}{16^s}=\frac{1}{2}\cdot 2^{4(1-s)}$$

u. s. f. und folglich ist die Reihe selbst grösser als diese:

$$1 + \frac{1}{2}\left(2^{1-s} + 2^{2(1-s)} + 2^{3(1-s)} + \cdots\right),$$

welche für $s < 1$ offenbar divergirt.

2. Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern, welche convergirt, convergirt immer unbedingt, d. h. unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder. Sei

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots$$

eine solche Reihe und

$$S' = x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + \cdots$$

diejenige Reihe, welche durch eine bestimmte anderweitige Anordnung der Glieder aus jener entsteht, so können nur zwei verschiedene Fälle stattfinden:

Entweder wird jedes Glied der Reihe S nur um eine endliche Anzahl von Stellen verschoben. In diesem Falle wird man in S' offenbar immer soweit fortgehen können, dass sich unter ihren m ersten Gliedern die sämmtlichen ersten n Glieder der ursprünglichen Reihe vorfinden. Man wird demnach dann haben

$$S_m' - S_n = \sigma_n, \tag{4a}$$

wo σ_n eine Summe aus einer Anzahl solcher Glieder der Reihe S bedeutet, die auf das n^{te} Glied folgen. Wegen der vorausgesetzten Convergenz der Reihe S wird aber σ_n mit beliebig wachsendem n sich der Null nähern, und da hierbei zugleich auch m über jede Grenze hinaus wächst, so ergiebt sich

$$\lim_{m=\infty} S_m' = \lim_{n=\infty} S_n = S$$

d. h. die anders geordnete Reihe ist nicht nur convergent sondern ihr Werth ist auch derselbe wie der der ursprünglichen.

Oder aber die Reihe S wird in zwei oder mehrere convergente Reihen

$$T + T' + T'' + \cdots$$

zerlegt, wie z. B., wenn die Reihe (3) folgendermassen geordnet wird:

$$1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

In diesem Falle erhält man für hinreichend grosse Zahlen $m, m', m'', \ldots$

$$(T_m + T'_{m'} + T''_{m''} + \cdots) - S_n = \sigma_n \tag{4b}$$

und folglich, wenn n und zugleich mit ihm auch jene Zahlen unendlich wachsen,

$$T + T' + T'' + \cdots = S.$$

Die convergenten Reihen dagegen, deren Glieder verschiedene Vorzeichen haben, zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Arten, je nachdem sie, wenn alle ihre Glieder absolut genommen werden, convergent bleiben oder nicht. Bei jenen werden die beiden unendlichen Reihen, welche aus den positiven resp. aus den negativen Gliedern der gegebenen Reihe gebildet sind, jede für sich convergiren. Die Convergenz dieser Reihen der ersten Art ist infolge dessen unbedingt. Denn für eine solche Reihe S wird — den beiden möglichen Fällen der neuen Anordnung entsprechend — der Ausdruck (4a) resp. (4b) mit wachsendem m nach der Voraussetzung beliebig klein, sobald die Glieder der Reihe, welche im Unterschiede verbleiben, absolut, a fortiori also, wenn sie mit ihren Vorzeichen genommen werden. — Bei den Reihen der zweiten Art aber convergiren die aus ihren positiven resp. aus ihren negativen Gliedern gebildeten beiden Reihen nicht für sich. Daher wird ihre Convergenz nur dadurch zu Stande kommen, dass ihre Glieder zum Theil sich aufheben. Da durch eine andere Anordnung der letztern dieses gegenseitige Zerstören beeinflusst wird, kann so die Summe der Reihe verändert werden oder sogar ihre Convergenz aufhören. Die Convergenz der Reihen der zweiten Art ist also *nicht* unbedingt.

Sind in einer unendlichen Reihe (1) die Glieder complexe Grössen

$$x_n = \varrho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n),$$

so ist die Convergenz der Reihe S gleichbedeutend mit der gleichzeitigen Convergenz der beiden Reihen

$$R' = \varrho_1\cos\varphi_1 + \varrho_2\cos\varphi_2 + \varrho_3\cos\varphi_3 + \cdots$$
$$R'' = \varrho_1\sin\varphi_1 + \varrho_2\sin\varphi_2 + \varrho_3\sin\varphi_3 + \cdots$$

und, falls diese stattfindet, wird $S = R' + R''i$. Convergirt die Reihe der Moduln:

$$R = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots,$$

so ist offenbar auch die Reihe S unbedingt convergent.

Ist z. B. $s = \sigma + \tau i$, so ist

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma} \cdot n^{-\tau i} \quad \text{und} \quad \text{mod.} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma}.$$

Demnach ist $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ die Reihe der Moduln für die Reihe (3), und folglich convergirt letztere Reihe unbedingt, falls $\sigma > 1$ ist. Daraus ziehen wir den für die Folge sehr bedeutsamen Schluss:

Durch die Formel

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s} \tag{5}$$

wird für alle s, deren reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, eine bestimmte endliche Funktion $\xi(s)$ von s definirt.

3. Hieran schliessen wir einen Satz, von welchem wir vielfache Anwendung zu machen haben werden.

Seien

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots \\ S' = x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + \cdots \end{cases} \tag{6}$$

zwei aus beliebigen Werthen x_i, x_k' bestehende Reihen, deren Modulreihen

$$\begin{cases} R = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \cdots \\ R' = \varrho_1' + \varrho_2' + \varrho_3' + \varrho_4' + \cdots \end{cases} \tag{7}$$

convergent sind. Multiplicirt man letztere Reihen in einander, so entsteht ein Ausdruck

$$\mathsf{P} = \sum \varrho_i \varrho_k', \tag{8}$$

nämlich die Summe aller möglichen Produkte $\varrho_i \varrho_k'$ in irgend welcher Reihenfolge. Denken wir uns zunächst diese Produkte in solcher Reihenfolge, dass, wie gross auch m gedacht werde, für ein hinreichend grosses μ die Summe P_μ der ersten μ Glieder alle diejenigen Produkte umfasst, welche bei der Entwicklung des Produktes

$$R_m \cdot R'_m = (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots + \varrho_m)(\varrho'_1 + \varrho'_2 + \varrho'_3 + \cdots + \varrho'_m)$$

entstehen, sodass der Unterschied

$$\mathsf{P}_\mu - R_m R'_m$$

nur aus solchen Produkten $\varrho_i \varrho'_k$ besteht, bei denen wenigstens einer der Indices i, k grösser als m ist. Die Gesammtheit aller möglichen Produkte dieser Art ist sicher kleiner als

$$R'(\varrho_{m+1} + \varrho_{m+2} + \cdots) + R(\varrho'_{m+1} + \varrho'_{m+2} + \cdots)$$

d. h. nach der vorausgesetzten Convergenz der beiden Reihen (7) für ein hinreichend grosses m beliebig klein. Man findet demnach

$$\lim_{\mu=\infty} \mathsf{P}_\mu = \lim_{m=\infty} R_m R'_m = R \cdot R'$$

d. h. P ist bei der gedachten und daher auch bei jeder andern Anordnung der Glieder convergent und hat das Produkt der beiden Reihen R, R' zum Werthe.

In gleicher Weise aber liefert die Multiplikation der Reihen (6) eine Reihe

$$P = \sum x_i x'_k, \tag{9}$$

deren einzelne Glieder die Glieder der Reihe P zu Moduln haben. Demnach ist auch diese Reihe unbedingt convergent; und da in der Differenz

$$P_\mu - S_m S'_m$$

genau diejenigen Glieder $x_i x'_k$ verbleiben, aus deren Moduln der Rest

$$\mathsf{P}_\mu - R_m R'_m$$

besteht, so ist

$$\operatorname{mod.}(P_\mu - S_m S'_m) < \mathsf{P}_\mu - R_m R'_m$$

d. h. für ein hinreichend grosses m und μ beliebig klein. Also: Convergiren für die beiden Reihen (6) die Modulreihen, so ist die durch ihre Multiplikation hervorgehende Reihe (9) unbedingt convergent und sie hat das Produkt $S \,.\, S'$ zum Werthe.

4. Betrachten wir nunmehr ein Produkt

$$P = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \cdots \tag{10}$$

von unendlich viel Faktoren. Unter dem Werthe eines solchen

kann füglich nur der Grenzwerth verstanden werden, gegen welchen das Produkt P_n seiner ersten n Faktoren:

$$P_n = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n)$$

bei unendlich wachsendem n convergirt. Nur, wenn ein solcher vorhanden ist, stellt P einen Werth dar: $P = \lim_{n=\infty} P_n$, und das Produkt heisst dann convergent. Hierzu ist aber nothwendig und hinreichend, dass der Quotient

$$\frac{P_{n+m}}{P_n} = (1 + x_{n+1})(1 + x_{n+2}) \cdots (1 + x_{n+m})$$

für alle n, welche grösser sind als eine von m unabhängige hinreichend grosse Zahl ν, welches auch m sei, beliebig nahezu 1 wird. Daraus folgt sogleich als eine nothwendige, keineswegs aber schon ausreichende Bedingung für die Convergenz des Produktes, dass x_n mit unendlich wachsendem Index unendlich klein werden muss.

Indem wir hier die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ der Allgemeinheit wegen complex voraussetzen, bezeichnen wir wieder ihre Moduln mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ resp. und betrachten, entsprechend dem Produkte P, das aus ihnen gebildete Produkt

$$\mathsf{P} = (1 + \varrho_1)(1 + \varrho_2)(1 + \varrho_3) \cdots . \tag{11}$$

Zur Convergenz desselben ist nothwendig und hinreichend, dass die Reihe der Moduln

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots$$

convergirt. Die Nothwendigkeit leuchtet von selbst ein, da diese Reihe kleiner ist als das Produkt. Um aber zu zeigen, dass die Convergenz der Reihe auch die des Produktes nach sich zieht, bemerken wir die für jeden Index n bestehende Ungleichheit

$$1 < 1 + \varrho_n < c^{\varrho_n}; \tag{12}$$

aus ihr findet sich auch die folgende:

$$1 < \frac{\mathsf{P}_{n+m}}{\mathsf{P}_n} < c^{\varrho_{n+1} + \varrho_{n+2} + \cdots + \varrho_{n+m}};$$

convergirt nun die Reihe der Moduln, so nähert sich der Exponent von c mit unendlich wachsendem n unabhängig von m

der Null, die Potenz von c also und damit auch $\frac{\mathsf{P}_{n+m}}{\mathsf{P}_n}$ der Grenze 1, d. h. das Produkt P convergirt.

Wenn aber diese Convergenz stattfindet, so convergirt auch das Produkt P und zwar unabhängig von der Anordnung seiner Faktoren. Es ist nämlich

$$\frac{\mathsf{P}_{n+m}}{\mathsf{P}_n} - 1 = (1 + \varrho_{n+1})(1 + \varrho_{n+2}) \cdots (1 + \varrho_{n+m}) - 1$$

und

$$\frac{P_{n+m}}{P_n} - 1 = (1 + x_{n+1})(1 + x_{n+2}) \cdots (1 + x_{n+m}) - 1,$$

und die Glieder, welche in der ersteren Differenz verbleiben, sind die Moduln der entsprechenden Glieder der letzteren; daher ist der Modulus des zweiten Ausdrucks nicht grösser als der erste, und wird demnach mit diesem zugleich unendlich klein. Aus der Convergenz von P folgt also zugleich auch diejenige von P. Dass aber diese Convergenz auch unabhängig ist von der Anordnung der Faktoren, beweist man mit Hilfe der Ungleichheiten (12) auf ganz analoge Weise, wie es in Nr. 2 für Reihen gezeigt worden ist.

5. Aus dem im Vorigen Gesagten ist nun ersichtlich, dass eine Gleichheit zwischen unendlichen Reihen und Produkten oder unter einander jedenfalls nur dann einen Sinn hat, wenn die beiden unendlichen Ausdrücke gegen denselben Grenzwerth convergiren. Sie hat aber auch dann erst einen bestimmten Sinn, wenn diese Convergenz eine unbedingte ist, oder wenn andernfalls die Ordnung der Glieder resp. der Faktoren, aus denen die Ausdrücke bestehen, bestimmt angegeben wird.

Um ein für die Folge besonders wichtiges Beispiel zu betrachten, sei $f(n)$ eine reelle oder complexe Funktion der ganzen Zahl n, von der Beschaffenheit, dass

$$f(1) = 1 \tag{13}$$

und, so oft n, n' relativ prim sind,

$$f(n) \cdot f(n') = f(nn') \tag{14}$$

ist; ferner seien q_1, q_2, q_3, ... die sämmtlichen Primzahlen.

Setzen wir alsdann voraus, dass für die unendliche Reihe

$$S = \sum_n f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots \tag{15}$$

die Reihe der Moduln convergent sei, so ist die Reihe gleich dem Produkte

$$P = \prod_q \left(1 + f(q) + f(q^2) + \cdots\right). \tag{16}$$

Um dies zu beweisen, bemerken wir zuerst, dass wegen der Convergenz der Reihe S sich eine so grosse positive ganze Zahl ν angeben lässt, dass der Modulus der Summe von beliebigen Gliedern, welche auf das Glied $f(\nu)$ folgen, beliebig klein bleibt. Ferner bemerken wir, dass die Reihe

$$1 + \text{mod. } f(q) + \text{mod. } f(q^2) + \cdots$$

als ein Theil der ganzen Modulnreihe gewiss convergirt, und somit auch die Reihe, welche den allgemeinen Faktor von P bildet, unbedingt convergent ist; dasselbe gilt also auch vom entwickelten Produkte P_m der ersten m Faktoren:

$$\begin{aligned} P_m = &\left(1 + f(q_1) + f(q_1^2) + \cdots\right) \\ &\cdot \left(1 + f(q_2) + f(q_2^2) + \cdots\right) \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ &\cdot \left(1 + f(q_m) + f(q_m^2) + \cdots\right). \end{aligned}$$

Jede positive ganze Zahl n nun, welche aus keinen andern Primfaktoren, als welche in der Reihe $q_1, q_2, \ldots q_m$ sich finden, zusammengesetzt ist, hat die Form

$$n = q_1^{h_1} q_2^{h_2} \cdots q_m^{h_m},$$

und alle solche Zahlen werden aus dieser Formel gefunden, wenn die Exponenten h_i die sämmtlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ durchlaufen. Mit Rücksicht immer auf die Bedingungsgleichung (14) erkennt man daher, dass das entwickelte Produkt P_m gleich der Summe sämmtlicher Werthe $f(n)$ ist, bei denen n nur aus Primfaktoren der Reihe $q_1, q_2, \ldots q_m$ zusammengesetzt ist. Wie nun die Faktoren des unendlichen Produktes P auch geordnet sein mögen, man wird doch m so gross und die Multiplikation soweit fortgesetzt denken können, dass

unter den Primzahlen $q_1, q_2, \ldots q_m$ sich alle diejenigen befinden, welche kleiner sind als ν, und folglich unter den Gliedern des entwickelten Produktes P_m alle Werthe $f(n)$, bei denen $n < \nu$, zudem aber auch noch eine Menge anderer, bei welchen $n > \nu$ ist, deren Summe also, nach der von uns getroffenen Wahl der ganzen Zahl ν, beliebig klein ausfällt. Man kann daher dann setzen

$$P_m = S_\nu + \varepsilon,$$

wo ε beliebig klein; es ist mit andern Worten

$$\lim_{m=\infty} P_m = \lim_{\nu=\infty} S_\nu$$

d. h. $P = S$, und somit ist die Gleichung

$$\prod_q \left(1 + f(q) + f(q^2) + \cdots\right) = \sum_n f(n) \tag{17}$$

erwiesen.

Für den Fall, dass die Bedingungsgleichung (14) auch für *nicht* relativ prime n, n' erfüllt ist, findet sich

$$f(q^h) = f(q)^h, \tag{14a}$$

der allgemeine Faktor des Produktes ist also dann mit

$$1 + f(q) + f(q)^2 + \cdots$$

d. h., weil er convergent ist, was nur sein kann, wenn $\mathrm{mod.}\, f(q) < 1$ ist, mit $\frac{1}{1 - f(q)}$ identisch. Die Gleichung (17) nimmt daher unter dieser Voraussetzung folgende Gestalt an:

$$\prod_q \frac{1}{1 - f(q)} = \sum_n f(n). \tag{18}$$

Aus dieser Formel fliesst noch eine zweite, die wir beachten müssen, wenn wir von ihren beiden Seiten den Logarithmus nehmen. So folgt zunächst

$$\sum_q \log \frac{1}{1 - f(q)} = \log \sum_n f(n).$$

Nun ist aber, da $\mathrm{mod.}\, f(q) < 1$ ist,

$$\log \frac{1}{1 - f(q)} = f(q) + \tfrac{1}{2} f(q)^2 + \tfrac{1}{3} f(q)^3 + \cdots;$$

die vorige Gleichung nimmt daher mit Rücksicht auf (14a) die Gestalt an:

$$\sum_q \left(f(q) + \tfrac{1}{2} f(q^2) + \tfrac{1}{3} f(q^3) + \cdots\right) = \log \sum_n f(n).$$

Man sieht aber leicht ein, dass die Reihe unter dem Summenzeichen zur Linken unbedingt convergirt, da sie nur aus Theilen der Reihe S zusammengesetzt ist und dass man die ganze linke Seite auch ersetzen kann durch die folgende Reihe:

$$\sum_q f(q) + \tfrac{1}{2} \sum_q f(q^2) + \tfrac{1}{3} \sum_q f(q^3) + \cdots$$

Und somit erhält man die neue Gleichung:

$$(19)\quad \sum_q f(q) + \tfrac{1}{2} \sum_q f(q^2) + \tfrac{1}{3} \sum_q f(q^3) + \cdots = \log \sum_n f(n),$$

in welcher links über alle Primzahlen q, rechts über alle positiven ganzen Zahlen n summirt werden muss.

Wählt man z. B. die Funktion

$$f(n) = \frac{1}{n^s},$$

so ist die Bedingung (13) und für jedes Paar n, n' die Bedingung (14) erfüllt; nach Nr. 2 ist aber auch die dieser Wahl entsprechende Reihe S, nämlich

$$S = \sum_n \frac{1}{n^s},$$

unbedingt convergent, sobald der reelle Bestandtheil von s grösser als 1 vorausgesetzt wird. Dann bestehen also die Gleichungen:

$$(20)\quad \prod_q \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}}\right) = \sum_n \frac{1}{n^s}$$

und

$$(21)\quad \sum_q \frac{1}{q^s} + \tfrac{1}{2} \sum_q \frac{1}{q^{2s}} + \tfrac{1}{3} \sum_q \frac{1}{q^{3s}} + \cdots = \log \sum_n \frac{1}{n^s},$$

welche schon von Euler im 15. Capitel des 1. Bandes seiner introductio in analysin infinitorum, welches den Titel führt: de seriebus ex evolutione factorum ortis, gegeben worden sind.

Legen wir nun der Funktion $f(n)$ ausser den durch die Gleichungen (13) und (14) resp. (14a) ausgedrückten Eigenschaften die fernere Eigenschaft bei, zu verschwinden, so oft n durch gewisse Primzahlen theilbar ist, so leuchtet sofort

ein, dass die Gleichungen (17), (18), (19) auch giltig bleiben, wenn in ihnen q nur alle diejenigen Primzahlen durchläuft, die von den gegebenen verschieden, n aber nur alle diejenigen positiven ganzen Zahlen, welche durch die gegebenen Primzahlen nicht theilbar sind.

Sei z. B. D eine beliebige ganze Zahl und $p_1, p_2, \ldots p_z$ die verschiedenen ungeraden Primzahlen, welche in ihr aufgehen. Das Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{D}{n}\right)$, welches, so oft $2D$ und n relativ prim sind, stets einen der Werthe ± 1 bedeutet, wollen wir dahin verallgemeinern, dass wir im entgegengesetzten Falle unter $\left(\frac{D}{n}\right)$ die Null verstehen. Indem wir dann

$$f(n) = \left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s}$$

wählen, erfüllt offenbar die Funktion die Bedingungen (13), (14) und (14a), verschwindet aber zudem, so oft n durch eine der Primzahlen $2, p_1, p_2, \ldots p_z$ theilbar ist. Wird endlich der reelle Bestandtheil σ von s grösser als 1 vorausgesetzt, so erfüllt auch die Reihe

$$S = \sum_n \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

die Voraussetzung, unbedingt convergent zu sein, da ihre Modulreihe nur ein Bestandtheil der Reihe $\sum_n \frac{1}{n^\sigma}$ ist. Hiernach findet man sofort:

$$\prod_q \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}\right) = \sum_n \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}, \tag{22}$$

eine Gleichung, in welcher man die Multiplikation nur über alle nicht in $2D$ aufgehende Primzahlen q, die Summation nur über alle positiven und zu $2D$ relativ primen Zahlen n zu erstrecken braucht.

Zweiter Abschnitt.

Die Zerfällung der Zahlen in Summanden.

1. Euler, der zuerst auf die Formeln (20) und (21) des vorigen Abschnittes aufmerksam gemacht hat, ist auch als der Erste zu bezeichnen, der die Analysis zur Herleitung zahlentheoretischer Sätze in Anwendung gebracht hat*).

Der Keim dieser Anwendung ist in der Entwicklung eines endlichen Produktes

$$(1) \qquad (1 + x_1 z)(1 + x_2 z)(1 + x_3 z) \cdots (1 + x_n z)$$

nach den Potenzen von z zu erblicken. Aus den ersten Grundsätzen der Multiplikation ergiebt sich diese in der Gestalt

$$(2) \qquad 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_m z^m + \cdots + X_n z^n,$$

worin allgemein der Coefficient X_m gleich der Summe aller aus je m der Grössen

$$(3) \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots \quad x_n$$

gebildeten Produkte ist, deren es so viele giebt, als diese n Grössen zu je m combinirt werden können, nämlich

$$(4) \qquad C_m^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}.$$

Werden nun die Grössen (3) sämmtlich gleich 1 vorausgesetzt, so verwandelt sich die Summe X_m jener Produkte in ihre Anzahl C_m^n, und die obige Entwicklung in die folgende Gleichung:

*) S. Introductio in Analysin infinitorum, t. I cap. 16 de partitione numerorum, oder besser noch die gleich benannte Abhandlung in Nov. Comment. Petrop. III, 1750—51 p. 125, abgedruckt in Comment. Arithmethicae collectae t. I p. 73.

$$(1+z)^n = 1 + C_1^n z + C_2^n z^2 + \cdots + C_m^n z^m + \cdots + C_n^n z^n$$

d. h. in den binomischen Lehrsatz. Man erschliesst hier also unmittelbar aus dem Wesen der ausgeführten analytischen Operation den rein arithmetischen Satz, dass der sogenannte Binomialcoefficient C_m^n eine ganze Zahl ist. Setzt man m' statt $n - m$, also $m + m'$ statt n, so kann man diesem Coefficienten die Form geben:

$$\frac{(m'+1)(m'+2)\cdots(m'+m)}{1 \cdot 2 \cdots m}$$

oder auch diese:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+m')}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m'}.$$

Beide Quotienten sind also ganzen Zahlen gleich; insbesondere lehrt die erstere Form, dass das Produkt von m *aufeinanderfolgenden* Zahlen stets durch das Produkt der *ersten* m Zahlen theilbar ist, während aus der zweiten Form offenbar der allgemeinere Satz gefolgert werden kann, dass auch der Quotient

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+m'+m''+\cdots)}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots m' \cdot 1 \cdot 2 \cdots m'' \cdots},$$

in welchem m, m', m''... beliebig viel positive ganze Zahlen sind, der Polynomialcoefficient, einer ganzen Zahl gleich ist.

Die Bedeutung des Entwicklungscoefficienten X_m bleibt immer die gleiche, wie gross auch die Zahl n gedacht werde. Folgt daraus nun auch für das unendliche Produkt die entsprechende Gleichung:

$$(1+x_1 z)(1+x_2 z)(1+x_3 z)\cdots = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} X_m z^m ?$$

2. Bei der Beantwortung dieser Frage setzen wir der Allgemeinheit wegen z und die Grössen x_i als complex voraus und

$$\text{mod. } z = r, \qquad \text{mod. } x_i = \varrho_i.$$

Wir wollen annehmen, das unendliche Produkt

$$(5) \qquad (1+\varrho_1)(1+\varrho_2)(1+\varrho_3)\cdots$$

oder auch (Nr. 4 v. A.) die Reihe

$$(6) \qquad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots$$

sei convergent. Dann ist auch

$$r\varrho_1 + r\varrho_2 + r\varrho_3 + \cdots$$

und wieder nach jener Nr. auch das unendliche Produkt

$$\mathsf{P} = (1 + r\varrho_1)(1 + r\varrho_2)(1 + r\varrho_3)\cdots \tag{7}$$

und gleichfalls das unendliche Produkt

$$P = (1 + x_1 z)(1 + x_2 z)(1 + x_3 z)\cdots \tag{8}$$

convergent; das Produkt stellt also dann für jeden endlichen Werth von z einen bestimmten endlichen Werth vor, d. h. es ist eine eindeutige und endliche Funktion von z:

$$P = F(z). \tag{9}$$

Wir wollen uns überzeugen, dass diese Funktion auch eine bestimmte endliche Ableitung besitzt. Betrachten wir zu diesem Zwecke zuerst nur das Produkt der ersten m Faktoren von P und nehmen von diesem Produkte P_m seine Ableitung, so ergiebt sich

$$\frac{1}{P_m} \cdot \frac{dP_m}{dz} = S_m, \tag{10}$$

wo

$$S_m = \frac{x_1}{1 + x_1 z} + \frac{x_2}{1 + x_2 z} + \cdots + \frac{x_m}{1 + x_m z}$$

gesetzt ist. Auch beschränken wir uns vorläufig auf solche Werthe von z, deren Modulus r kleiner ist, als eine nach Belieben gewählte Grösse R. Bei unendlichem Wachsen von m geht nun S_m in eine unendliche Reihe

$$S = \frac{x_1}{1 + x_1 z} + \frac{x_2}{1 + x_2 z} + \frac{x_3}{1 + x_3 z} + \cdots$$

über, von der man sich leicht überzeugt, dass sie convergirt. Aus den Annahmen folgt nämlich sogleich, dass $\varrho_i = \text{mod. } x_i$ mit unendlich wachsendem Index gegen Null convergirt, dass also, wenn unter ε ein beliebiger positiver ächter Bruch verstanden wird, für jedes z der angegebenen Art und von einem bestimmten Werthe m des Index i ab

$$1 - \varrho_i r > 1 - \varrho_i R > 1 - \varepsilon$$

sein wird. Bildet man daher für S die Reihe der Moduln ihrer Glieder und bedenkt, dass

$$\text{mod. } (1 + x_i z) > 1 - \varrho_i r, \quad \text{mod. } \frac{x_i}{1 + x_i z} < \frac{\varrho_i}{1 - \varrho_i r}$$

also von jenem Werthe des Index i ab

$$\text{mod. } \frac{x_i}{1 + x_i z} < \frac{\varrho_i}{1 - \varepsilon}$$

sein wird, so bleibt die Modulreihe vom Index $m + 1$ an kleiner als die von z unabhängige und wegen der Convergenz der Reihe (6) beliebig kleine Grösse

$$\varrho = \frac{1}{1 - \varepsilon} (\varrho_{m+1} + \varrho_{m+2} + \cdots),$$

sie ist demnach convergent, und auch die Reihe S convergirt und zwar gleichmässig für alle bezeichneten Werthe von z, und stellt für jeden derselben eine bestimmte endliche Funktion von z dar. Setzt man also

$$S = S_m + \delta,$$

so folgt durch Integration zwischen den Grenzen 0 und z

$$\int_0^z S dz = \int_0^z S_m dz + \int_0^z \delta dz .$$

Hier verschwindet der Modulus des letzten Integrales, das wir zur Abkürzung mit Δ bezeichnen, zugleich mit ϱ; das erste Integral zur Rechten aber hat mit Rücksicht auf die Formel (10) sowie auf den Umstand, dass $P_m = 1$ ist für $z = 0$, den Werth $\log P_m$, und folglich ergiebt sich

$$P_m = e^{\int_0^z S dz} \cdot e^{-\Delta}$$

und für $m = \infty$

$$P = e^{\int_0^z S dz},$$

also

$$\frac{dP}{dz} = S \cdot e^{\int_0^z S dz},$$

d. h. die Funktion, welche durch das unendliche Produkt P dargestellt wird, hat für alle z, deren Modulus kleiner ist, als eine beliebig gewählte Grösse R, d. i. aber offenbar für alle endlichen z, eine bestimmte endliche Ableitung.

Aus diesem Verhalten des Produktes P folgt nun nach den elementarsten Grundsätzen der Funktionentheorie, dass das Produkt auf eine ganz bestimmte Weise sich nach den steigenden positiven Potenzen von z entwickeln lässt:

$$P = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + X_3 z^3 + \cdots . \tag{11}$$

Die Bestimmtheit dieser Entwicklung auf der einen Seite, auf der andern die Art und Weise, wie sie durch wirkliche Ausführung des unendlichen Produktes gewonnen wird, lässt erkennen, dass dem Entwicklungscoefficienten X_m die Bedeutung zukommt: die Summe aller Produkte aus je m verschiedenen der Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zu sein.

3. Betrachten wir nun auch den Ausdruck

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{(1 + x_1 z)(1 + x_2 z)(1 + x_3 z)\cdots},$$

sowie die Beziehung

$$\frac{d\left(\frac{1}{P}\right)}{dz} = -\frac{1}{P^2} \cdot \frac{dP}{dz},$$

so leuchtet ein, dass zugleich mit P auch $\frac{1}{P}$ eine eindeutige endliche Funktion von z ist und eine solche Ableitung besitzt für alle endlichen z, ausgenommen diejenigen Werthe $z = -\frac{1}{x_i}$, für welche P verschwindet. Werden demnach unter x_i solche Werthe verstanden, deren Moduln kleiner als 1, und beschränkt man sich auf solche Werthe von z, deren Moduln nicht grösser als 1 sind, so kommen die genannten Ausnahmewerthe von z nicht in Betracht, und wir finden: Unter der Voraussetzung, dass $\text{mod. } x_i < 1$ und $\text{mod. } z < 1$ ist, stellt $\frac{1}{P}$ eine endliche Funktion von z mit endlicher Ableitung dar und lässt sich demnach auf ganz bestimmte Weise in eine nach den positiven steigenden Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln.

Dasselbe gilt aber ersichtlich auch bezüglich des Ausdruckes

$$Q = \frac{1}{(1 - x_1 z)(1 - x_2 z)(1 - x_3 z)\cdots}; \tag{12}$$

man erhält demnach diese Entwicklung

$$Q = 1 + \xi_1 z + \xi_2 z^2 + \xi_3 z^3 + \cdots , \tag{13}$$

in welcher die Coefficienten eindeutig bestimmte Werthe haben. Andererseits ist unter den gemachten Beschränkungen für z und x_i

$$\frac{1}{1-x_i z} = 1 + x_i z + x_i^2 z^2 + x_i^3 z^3 + \cdots$$

und demnach

$$(14) \qquad Q = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i z + x_i^2 z^2 + x_i^3 z^3 + \cdots) .$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit der vorigen Entwicklung von Q lässt die Bedeutung erkennen, welche hier dem Entwicklungscoefficienten ξ_m zukommt: er ist die Summe aller Produkte aus je m gleichen oder verschiedenen der Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots$

4. Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen verstehen wir nun, indem z stets einen Werth bedeuten soll, dessen Modulus < 1 ist, für jedes i unter x_i die Potenz x^i, unter x aber einen Werth, dessen Modulus $\varrho < 1$ ist; da alsdann $\varrho_i = \varrho^i$ ist, convergirt die Reihe (6) und die vorigen Resultate bleiben in Geltung. Man findet daher für das Produkt

$$(15) \qquad P = (1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3 z) \cdots$$

die Entwicklung

$$(16) \qquad P = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + X_3 z^3 + \cdots ,$$

in welcher X_m gleich der Summe aller Produkte aus je m verschiedenen positiven Potenzen von x ist. Fasst man in dieser Summe diejenigen Potenzen zusammen, welche gleichen Exponenten s haben und schreibt also

$$(17) \qquad X_m = \sum_{s=1}^{\infty} C_{m,s} \cdot x^s ,$$

so bedeutet $C_{m,s}$ die Anzahl, wie oft die positive ganze Zahl s aus m *verschiedenen* positiven ganzen Summanden zusammengesetzt oder in solche zerfällt werden kann*).

*) Euler hat jeder Zerfällung einer Zahl in positive Summanden den Namen partitio numerorum beigelegt. Es ist hier ein für alle Mal zu bemerken, dass bei den betreffenden Sätzen die zerfällte Zahl, insoweit die Natur der Zerfällung es gestattet, immer selbst als eine solche Zerfällung mitzurechnen ist.

Gleicherweise findet sich für den Ausdruck

$$Q = \frac{1}{(1 - xz)(1 - x^2z)(1 - x^3z)\cdots} \tag{18}$$

die Entwicklung

$$Q = 1 + \xi_1 z + \xi_2 z^2 + \xi_3 z^3 + \cdots, \tag{19}$$

in welcher allgemein

$$\xi_m = \sum x^{h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \cdots}$$

ist, ausgedehnt über alle nicht negativen Zahlen $h_1, h_2, h_3, \ldots$, deren Summe gleich m ist. Fasst man hier wieder diejenigen Potenzen von x zusammen, welche gleichen Exponenten s haben, schreibt also

$$\xi_m = \sum_{s=1}^{\infty} \Gamma_{m,s} \cdot x^s, \tag{20}$$

so bedeutet $\Gamma_{m,s}$ die Anzahl, wie oft die positive ganze Zahl s aus m *gleichen oder verschiedenen* positiven ganzen Summanden zusammengesetzt oder in solche zerfällt werden kann; mit andern Worten: $\Gamma_{m,s}$ ist die Anzahl nicht negativer ganzzahliger Auflösungen der beiden Gleichungen

$$h_1 + h_2 + h_3 + \cdots = m$$
$$1 \cdot h_1 + 2 \cdot h_2 + 3 \cdot h_3 + \cdots = s.$$

Um diese Zahlen $C_{m,s}$ und $\Gamma_{m,s}$ zu ermitteln, bemerken wir, dass, wenn xz statt z in P gesetzt wird, der erste Faktor $1 + xz$ verloren geht; wird alsdann, um ihn wieder einzuführen, mit $1 + xz$ multiplicirt und die Entwicklung (16) berücksichtigt, so ergiebt sich die Gleichheit

$$(1 + xz) \cdot (1 + X_1 x \cdot z + X_2 x^2 \cdot z^2 + \cdots) = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots,$$

aus welcher sofort sich die Recursionsformel

$$X_m \cdot (1 - x^m) = X_{m-1} \cdot x^m$$

und daraus die Bestimmung

$$X_m = \frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1 - x)(1 - x^2)\cdots(1 - x^m)} \tag{21}$$

herleiten lässt.

In gleicher Weise verliert Q bei solcher Substitution den Faktor $1 - xz$ im Nenner; stellt man ihn durch Division mit

diesem Faktor wieder her und berücksichtigt die Entwicklung (19), so findet sich die Gleichheit

$$1 + \xi_1 x \cdot z + \xi_2 x^2 \cdot z^2 + \cdots = (1 - xz)(1 + \xi_1 z + \xi_2 z^2 + \cdots)$$

und vermittelst derselben die Recursionsformel

$$\xi_m (1 - x^m) = x \cdot \xi_{m-1} ,$$

sowie für ξ_m der nachstehende Ausdruck:

$$\xi_m = \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} . \tag{22}$$

Betrachten wir nun den Ausdruck

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} , \tag{23}$$

der als gemeinsamer Faktor beider Ausdrücke (21) und (22) auftritt. Nach der über x gemachten Voraussetzung dürfen wir ihn gleichsetzen dem Produkte

$$\begin{aligned} &(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &\cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ &\cdot (1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots) \end{aligned}$$

unendlicher Reihen, in dessen Entwicklung das allgemeine Glied die Gestalt haben wird:

$$x^{h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \cdots + mh_m} \quad (\text{für } h_i \geqq 0).$$

Demnach ist der Ausdruck (23) gleich der Summe

$$\sum x^{h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \cdots + mh_m}$$

oder auch, indem darin diejenigen Glieder zusammengefasst werden, welche gleichen Exponenten σ haben, gleich

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \gamma_{m,\sigma} \cdot x^{\sigma} , \tag{24}$$

wo nun $\gamma_{m,0} = 1$, für $\sigma > 0$ aber $\gamma_{m,\sigma}$ die Anzahl bedeutet, wie oft die positive ganze Zahl σ aus gleichen oder verschiedenen Summanden aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots m$ zusammengesetzt werden kann.

Mit Rücksicht auf (17) und (21) ergiebt sich hieraus

$$X_m = \sum_s C_{m,s} x^s = \sum_\sigma \gamma_{m,\sigma} \cdot x^{\sigma + \frac{m(m+1)}{2}} ,$$

und mit Rücksicht auf (20) und (22) ebenso

$$\xi_m = \sum_s \Gamma_{m,s} x^s = \sum_\sigma \gamma_{m,\sigma} \cdot x^{\sigma+m}.$$

Die Vergleichung der beiden Ausdrücke für X_m ergiebt sogleich die Beziehung:

$$C_{m,s} = \gamma_{m,\sigma}, \quad \text{wenn} \quad \sigma = s - \frac{m(m+1)}{2},$$

und die Vergleichung der beiden Ausdrücke für ξ_m diese andere:

$$\Gamma_{m,s} = \gamma_{m,\sigma}, \quad \text{wenn} \quad \sigma = s - m \quad \text{ist.}$$

Das heisst: Eine positive ganze Zahl s kann ebenso oft aus m verschiedenen positiven ganzen Summanden zusammengesetzt werden, als es die Zahl $s - \frac{m(m+1)}{2}$ aus gleichen oder verschiedenen Summanden aus der Reihe 1, 2, 3, ... m werden kann.

Dagegen kann die Zahl s ebenso oft aus m gleichen oder verschiedenen positiven ganzen Summanden zusammengesetzt werden, als die Zahl $s - m$ aus gleichen oder verschiedenen Summanden aus der Reihe 1, 2, 3, ... m gebildet werden kann.

Und demnach lässt die Zahl $s = \sigma + m$ sich ebenso oft aus m gleichen oder verschiedenen Summanden zusammensetzen, wie die Zahl

$$\sigma + \frac{m(m+1)}{2} = s + \frac{m(m-1)}{2}$$

aus m verschiedenen Summanden.

Da $\frac{m(m+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + m$ ist, kann der erste dieser Sätze auch folgendermassen ausgesprochen werden:

Eine positive ganze Zahl s kann ebenso oft in m verschiedene ganze Summanden zerfällt werden, als sie sich aus den ersten m Zahlen zusammensetzen lässt, vorausgesetzt, dass bei *jeder* solchen Zusammensetzung diese Zahlen mehrfach benutzt werden dürfen, *jede* von ihnen aber auch mindestens einmal benutzt *wird*.

Es erübrigt nach diesen Sätzen, die Anzahl $\gamma_{m,\sigma}$ zu ermitteln. Setzen wir zu diesem Zwecke in den beiden gleichen

Ausdrücken (23) und (24) $m-1$ für m, so ergiebt sich ohne weiteres die Recursionsformel:

$$\sum_{\sigma} \gamma_{m-1,\sigma} \cdot x^{\sigma} = (1 - x^{m}) \cdot \sum_{\sigma} \gamma_{m,\sigma} \cdot x^{\sigma}$$

und aus ihr durch Vergleichung gleicher Potenzen auf beiden Seiten die Beziehung

(25a) $\gamma_{m,\sigma} = \gamma_{m-1,\sigma} + \gamma_{m,\sigma-m}$, sobald $\sigma \geq m$ ist,

während

(25b) $$\gamma_{m,\sigma} = \gamma_{m-1,\sigma} \quad \text{für } \sigma < m$$

gefunden wird. Durch die erstere dieser Formeln wird der Werth von $\gamma_{m,\sigma}$ für den Fall, dass $\sigma \geq m$ ist, zurückgeführt auf denjenigen Fall, wo $\sigma < m$ ist, in welchem sich der Werth von $\gamma_{m,\sigma}$ aus dem von $\gamma_{m-1,\sigma}$ sofort ergiebt. Da nun $\gamma_{1,\sigma}$ der Entwicklungscoefficient des Ausdruckes $\frac{1}{1-x}$ also gleich 1 ist, kann in solcher Weise allmählich auch $\gamma_{m,\sigma}$ für jeden Werth von m berechnet werden*).

5. Der Formel (25b) zufolge stimmen die Entwicklungen des Ausdruckes (23) für wachsende Werthe von m in immer mehr anfänglichen Gliedern überein. Besonders interessant ist es daher, die Reihe der Entwicklungscoefficienten für $m = \infty$ aufzustellen, der sich die Reihe der $\gamma_{m,\sigma}$ gewissermassen asymptotisch annähert. Suchen wir daher die Entwicklung des unendlichen Ausdrucks

(26) $$Q_1 = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

nach den steigenden Potenzen von x. Sie ist offenbar gleich

(27) $$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \Gamma(\sigma) \cdot x^{\sigma},$$

worin $\Gamma(0)$ die Eins, für jedes $\sigma > 0$ aber $\Gamma(\sigma)$ die Anzahl bedeutet, wie oft die positive ganze Zahl σ in gleiche oder verschiedene positive ganze Summanden zerfällt werden kann.

*) S. zu diesem Gegenstande u. a. auch Faà di Bruno, sur la partition des nombres in Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 85 pag. 317.

Betrachten wir andrerseits den Nenner

(28) $$N = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\cdots;$$

man kann demselben offenbar zunächst diese andere Gestalt geben:

$$N = (1 - x) - x^2(1 - x) - x^3(1 - x)(1 - x^2) - x^4(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) - \cdots$$

wie sogleich zu sehen ist, wenn man erst die beiden ersten Glieder, dann mit ihnen das dritte, dann das vierte u. s. w. zusammenfasst. Schreiben wir dafür

(29) $$N = 1 - x - x^2 \cdot N_1,$$

so bedeutet N_1 den Ausdruck

$$N_1 = (1-x) + x(1-x)(1-x^2) + x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \cdots,$$

in welchem wir bei den einzelnen Gliedern die Multiplikation mit $1 - x$ ausführen wollen, worauf dann

$$\begin{aligned} N_1 = {} & 1 - x + x(1 - x^2) \\ & - x^2(1 - x^2) + x^2(1 - x^2)(1 - x^3) \\ & - x^3(1 - x^2)(1 - x^3) + x^3(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

d. i.

(29b) $$N_1 = 1 - x^3 - x^5 \cdot N_2$$

wird, wenn unter N_2 der Ausdruck

$$N_2 = 1 - x^2 + x^2(1-x^2)(1-x^3) + x^4(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \cdots$$

verstanden wird. Setzt man hiernach allgemein

$$N_i = (1 - x^i) + x^i(1 - x^i)(1 - x^{i+1}) + x^{2i}(1 - x^i)(1 - x^{i+1})(1 - x^{i+2}) + \cdots$$

und führt bei den einzelnen Gliedern die Multiplikation mit $1 - x^i$ aus, so findet man

$$\begin{aligned} N_i = {} & 1 - x^i + x^i(1 - x^{i+1}) \\ & - x^{2i}(1 - x^{i+1}) + x^{2i}(1 - x^{i+1})(1 - x^{i+2}) \\ & - x^{3i}(1-x^{i+1})(1-x^{i+2}) + x^{3i}(1-x^{i+1})(1-x^{i+2})(1-x^{i+3}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

d. h. vereinfacht

$$N_i = 1 - x^{2i+1} - x^{3i+2}(1 - x^{i+1}) - x^{4i+3}(1-x^{i+1})(1-x^{i+2}) - \cdots$$

und folglich

$$N_i = 1 - x^{2i+1} - x^{3i+2} \cdot N_{i+1}, \tag{29c}$$

eine allgemeine Formel, welche die besonderen (29) und (29b) für $i = 0$ und $i = 1$ in sich enthält und zur beliebig weiteren Fortsetzung derselben Rechnung dienen kann. Durch allmähliche Substitution in die vorangehenden Gleichungen erhält man schliesslich

$$N = 1 - x - x^2(1 - x^3) + x^{2+5}(1 - x^5) - x^{2+5+8}(1 - x^7) \cdots$$

oder mittels des Summenzeichens:

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot (1 - x^{2i+1}) \cdot x^{2+5+8+\cdots+(3i-1)}.$$

Nun ist

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3i - 1) = \frac{3i^2 + i}{2}$$

und

$$2i + 1 + \frac{3i^2 + i}{2} = \frac{3(i+1)^2 - (i+1)}{2},$$

und während i die ganzen Zahlen 0, 1, 2, ... durchläuft, nimmt $i + 1$ die Werthe 1, 2, 3, ... an. Trennt man daher im allgemeinen Gliede der Summe die beiden Theile, welche der Differenz entsprechen, so kann man endlich, indem man für N seine Bedeutung einführt, folgende sehr interessante Gleichung schreiben:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(x^{\frac{3i^2+i}{2}} + x^{\frac{3i^2-i}{2}} \right)$$

oder auch

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \cdot x^{\frac{3i^2+i}{2}}. \tag{30}$$

Diese, in der zweiten der obengenannten Euler'schen Abhandlungen zunächst nur durch Induction gefundene merkwürdige Beziehung ist später von ihm durch die hier dargestellten Betrachtungen auch bewiesen worden*).

*) Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum, N. Comment. Petrop. V p. 75 oder Comment. Arithm. coll. I p. 324.

Denkt man jedoch auf der linken Seite dieser Gleichung die Multiplikation wirklich ausgeführt und diejenigen Potenzen von x zusammengefasst, welche gleichen Exponenten s haben, so wird, da diese Potenzen mit dem Faktor $+1$ oder -1 behaftet sind, je nachdem s aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Summanden entsteht, der Coefficient von x^s der Unterschied sein zwischen der Anzahl, wie oft s aus einer geraden Anzahl verschiedener Summanden, und der Anzahl, wie oft s aus einer ungeraden Anzahl von verschiedenen Summanden zusammengesetzt werden kann. Die Gleichung (30) lehrt also den Satz: dass die erstere Anzahl gleich der letzteren ist, so oft s keine Pentagonalzahl, d. i. keine Zahl von der Form $\frac{3i^2+i}{2}$ ist; dass aber für jede Pentagonalzahl s die erstere um eine Einheit grösser oder kleiner ist als die letztere, je nachdem in der Formel $s = \frac{3i^2+i}{2}$ die Zahl i gerade oder ungerade, oder je nachdem $24s+1$ gleich dem Quadrate einer Zahl $12k \pm 1$ oder $12k \pm 7$ ist.

6. Euler hat aus der Gleichung (30) noch eine andere und aus dieser ein eigenthümliches Gesetz hergeleitet, welches sich auf die Summe aller Theiler einer Zahl bezieht. Er gewinnt die neue Gleichung, indem er von der vorigen beiderseits die Logarithmen nimmt und dann nach x differenzirt. Wird zuletzt noch beiderseits mit x multiplicirt, so kommt:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{3i^2+i}{2} \cdot x^{\frac{3i^2+i}{2}}}{\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^i \cdot x^{\frac{3i^2+i}{2}}}.$$

Hier lässt sich zunächst das allgemeine Glied der Summe auf der linken Seite nach den Potenzen von x^n entwickeln, womit diese Seite in eine Doppelsumme:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} nx^{nn'}$$

übergeht, der man aber, indem man alle Potenzen zusammenfasst, deren Exponent denselben Werth $nn' = m$ hat und bemerkt, dass die verschiedenen Coefficienten n, welche ihnen entsprechen, die verschiedenen Theiler von m sein werden, sofort die Gestalt einer einfachen Summe:

$$-\sum_{m=1}^{\infty} S(m) \cdot x^m$$

geben kann, in welcher $S(m)$ die Summe aller Theiler von m bedeutet. Aus der obigen Gleichung erhält man dann durch Fortschaffen des Nenners, dessen Summationsbuchstaben wir durch k bezeichnen wollen, die folgende:

$$(31)\quad \sum_{m=1}^{\infty} S(m) \cdot x^m \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{\frac{3k^2+k}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot x^{\frac{3i^2+i}{2}}.$$

Wird hier links die Multiplikation ausgeführt, so erhält man eine Doppelsumme mit dem allgemeinen Gliede

$$(-1)^k \cdot S(m) \cdot x^{m+\frac{3k^2+k}{2}}$$

und wenn alle Glieder der letzteren, bei welchen der Exponent denselben Werth

$$n = m + \frac{3k^2+k}{2}$$

hat, zusammengefasst werden, die einfache Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)} \cdot x^n$$

mit der Bestimmung, dass

$$S^{(n)} = \sum_{k} (-1)^k \cdot S\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)$$

und die Summe über alle positive und negative k einschliesslich der Null auszudehnen ist, für welche das Argument $n - \frac{3k^2+k}{2}$ positiv ist.

Die Vergleichung mit der rechten Seite der Gleichung (31) liefert den Euler'schen Satz. Wir haben die Fälle zu unterscheiden, ob n eine Pentagonalzahl ist oder nicht. Im letztern Falle entspricht dem Gliede x^n zur Linken kein solches zur Rechten und demnach ist

$$(32) \qquad \sum_k (-1)^k \cdot S\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) = 0.$$

Ist dagegen n eine Pentagonalzahl

$$(33) \qquad n = \frac{3i^2+i}{2},$$

so würde

$$\sum_k (-1)^k \cdot S\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) = (-1)^{i-1} \cdot n$$

oder

$$(34) \qquad \sum_k (-1)^k \cdot S\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) + (-1)^i \cdot n = 0$$

sein. Würde in diesem Falle die Summation bis $k = i$ ausgedehnt, so würde man ein letztes Glied erhalten, bei welchem das Argument der Funktion S nicht mehr positiv, sondern Null ist, nämlich $(-1)^i \cdot S(0)$; kommt man also überein, unter dem Zeichen $S(0)$, so oft n die Pentagonalzahl (33) ist, diese letztere selbst zu verstehen, so lässt sich die Gleichung (34) einfacher so schreiben:

$$\sum_k (-1)^k \cdot S\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) = 0,$$

worin nun aber die Summation auch noch auf den Werth $k = i$ d. h. so weit auszudehnen ist, als das Argument $n - \frac{3k^2+k}{2}$ nicht negativ wird. Genau ebenso weit erstreckt sie sich aber auch in der Gleichung (32), denn, da im ersteren Falle keins der Argumente Null werden kann, ist die Ausdehnung über alle positiven Argumente gleichbedeutend mit derjenigen über alle nicht negativen Argumente. Auf solche Weise findet sich der folgende Eulersche Satz über die Summe aller Theiler einer Zahl:

Für jede positive ganze Zahl n ist

$$(35) \quad S(n) = \sum_k (-1)^{k-1} \cdot \left[S\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) + S\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right)\right],$$

wo die Summation über alle *positiven* Werthe von k ausgedehnt werden muss, für welche die Argumente der Funktion S nicht negativ sind, und unter dem Zeichen $S(0)$, welches nur vorkommen wird, so oft n

eine Pentagonalzahl ist, eben diese Pentagonalzahl selbst zu verstehen ist.

Die Formel (30) gestattet auch, für den Ausdruck Q_1 seine Entwicklung, nämlich die mit $\Gamma(\sigma)$ bezeichneten Zahlen zu ermitteln. Man findet ohne weiteres folgende Gleichung:

$$(36) \qquad \sum_{\sigma=0}^{\infty} \Gamma(\sigma) \cdot x^{\sigma} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^i \cdot x^{\frac{3i^2+i}{2}} = 1;$$

bei Ausführung der Multiplikation erhält man eine Doppelsumme mit dem allgemeinen Gliede

$$(-1)^i \cdot \Gamma(\sigma) \cdot x^{\sigma + \frac{3i^2+i}{2}},$$

und wenn man alle Glieder vereint, deren Exponent den gleichen Werth $\sigma + \frac{3i^2+i}{2} = n$ hat, geht die Doppelsumme über in folgende einfache:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)} \cdot x^n$$

mit der Bestimmung, dass

$$\Gamma^{(n)} = \sum_i (-1)^i \cdot \Gamma\left(n - \frac{3i^2+i}{2}\right)$$

und die Summation über alle ganzen Zahlen i auszudehnen ist, für welche $n - \frac{3i^2+i}{2}$ nicht negativ wird. Die Gleichung (36) lehrt aber, dass für jeden positiven Werth von n diese Summe:

$$\sum_i (-1)^i \cdot \Gamma\left(n - \frac{3i^2+i}{2}\right) = 0$$

ist, eine Gleichung, aus welcher allmählich alle Coefficienten $\Gamma(\sigma)$ berechnet werden können. Man kann ihr folgende, mit (35) analoge Form geben:

$$(37) \quad \Gamma(n) = \sum_k (-1)^{k-1} \cdot \left[\Gamma\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) + \Gamma\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right)\right],$$

wo der Umfang der Summation der dort angegebene und unter dem Zeichen $\Gamma(0)$, welches nur vorkommen wird, sobald n eine Pentagonalzahl ist, die Eins zu verstehen ist.

Wird endlich die Gleichung (31) beiderseits mit

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \Gamma(\sigma) \cdot x^{\sigma}$$

multiplicirt und dann (36) beachtet, so ergiebt sich die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{\infty} S(m)\, x^m = \sum_{i,\sigma} (-1)^{i-1} \cdot \frac{3i^2+i}{2}\, \Gamma(\sigma) \cdot x^{\frac{3i^2+i}{2}+\sigma},$$

aus welcher, wenn rechts alle Glieder mit derselben Potenz x^m zusammengefasst werden, noch folgende Beziehung gefunden wird:

$$(38) \qquad S(m) = \sum_{i} (-1)^{i-1} \cdot \frac{3i^2+i}{2} \cdot \Gamma\left(m - \frac{3i^2+i}{2}\right),$$

die auf i bezügliche Summe so weit fortgesetzt, bis das Argument von Γ negativ wird. — Auf diese beiden Beziehungen (37) und (38) haben zuerst Zeller und Stern aufmerksam gemacht*).

7. Noch eine andere sehr wichtige Formel, welche Euler entdeckt hat, knüpft sich an die Funktion Q_1. Multiplicirt man ihren reciproken Werth mit dem unendlichen Produkte

$$(39) \qquad P_1 = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots,$$

so findet sich sogleich

$$\frac{P_1}{Q_1} = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots$$

und folglich, wenn man setzt

$$(40) \qquad H_1 = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots,$$

$\frac{P_1}{Q_1} \cdot H_1 = \frac{1}{Q_1}$, d. h. $P_1 = \frac{1}{H_1}$ oder

$$(41) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = \frac{1}{\prod_{\nu} (1-x^{\nu})},$$

*) Zeller, „Zu Euler's Recursionsformel für die Divisorensummen", in Acta Math. Bd. 4 p. 415 und Stern „eine Bemerkung über Divisorensummen" ebendas. Bd. 6 p. 327. S. zu diesem Gegenstande auch eine Reihe von Noten, welche Sylvester in den Comptes Rendus der franz. Akademie Bd. 96 gegeben hat.

wenn links die Multiplikation auf alle positiven, rechts nur auf alle ungeraden positiven ganzen Zahlen erstreckt wird. Denken wir uns aber beide Ausdrücke nach den steigenden Potenzen von x entwickelt, was nach dem Obigen erlaubt ist, sobald der Modulus von x kleiner ist als 1, so wird die Entwicklung der linken Seite

$$\sum_{s=0}^{\infty} C(s) \cdot x^s,$$

wo $C(0) = 1$, für jedes positive s aber $C(s)$ die Anzahl bedeutet, wie oft die Zahl s aus verschiedenen ganzzahligen Summanden zusammengesetzt werden kann; die Entwicklung der rechten Seite aber wird

$$\sum_{s=0}^{\infty} \Gamma_u(s) \cdot x^s,$$

wo $\Gamma_u(0) = 1$, für jedes positive s aber $\Gamma_u(s)$ die Anzahl bedeutet, wie oft s sich in gleiche oder verschiedene ungerade Summanden zerfällen lässt. Die Gleichung (41) führt uns zur folgenden:

$$C(s) = \Gamma_u(s)$$

und damit zu dem Satze: Jede positive ganze Zahl lässt sich ebenso oft aus *verschiedenen* Summanden *überhaupt* zusammensetzen, als sie aus *gleichen oder verschiedenen aber ungeraden* Summanden zusammengesetzt werden kann.

Gleichzeitig mit dem Produkte P_1 convergirt auch das folgende, das nur aus einem Theile seiner Faktoren zusammengesetzt ist:

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^k})$$

und, wenn es nach den steigenden Potenzen von x entwickelt gedacht wird:

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^k}) = \sum_{s=0}^{\infty} K(s) x^s,$$

so wird offenbar $K(0) = 1$ sein, für jedes positive s aber $K(s)$ die Anzahl bedeuten, wie oft s als Summe verschiedener

Potenzen von 2 darstellbar ist. Zu ihrer Bestimmung bemerke man, dass, wenn x im Produkte durch x^2 ersetzt wird, sein erster Faktor verloren geht; multipliciren wir dann, um ihn wiederherzustellen, mit $1 + x$, so gewinnen wir folgende Recursionsformel:

$$(1 + x) \cdot \sum_{s=0}^{\infty} K(s) \cdot x^{2s} = \sum_{s=0}^{\infty} K(s) \cdot x^s,$$

aus welcher sich sofort die Beziehung

$$K(2s) = K(2s + 1) = K(s)$$

und vermittelst ihrer die Werthreihe

$$K(0) = K(1) = 1$$
$$K(2) = K(3) = K(1) = 1$$
$$K(4) = K(5) = K(2) = 1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

allgemein also $K(s) = 1$ ergiebt. Es gilt also der Satz: Jede positive ganze Zahl lässt sich stets und zwar nur auf eine einzige Weise aus verschiedenen Potenzen von 2 durch Addition zusammensetzen. —

8. Diesen Euler'schen Sätzen schliessen ihrer Natur nach andere sich an, welche Jacobi aus ähnlichen Grundsätzen hergeleitet hat. Doch bedarf man im allgemeinen dazu der Lehre von den elliptischen Funktionen; den Anwendungen dieser Lehre auf die Theorie der Zahlen gedenken wir aber ein eigenes Werk zu widmen und sehen deshalb in dem gegenwärtigen von allen diesen Jacobi'schen Untersuchungen ab. Nur eine derselben kann hier ohne besondere Mittel angeschlossen und wie Jacobi gezeigt hat, die merkwürdige Formel der genannten Theorie, welche ihr zu Grunde liegt, sogar durch ganz elementare arithmetische Betrachtungen erwiesen werden, so dass wir die interessanten zahlentheoretischen Folgerungen, welche aus ihr fliessen, nicht übergehen, sondern im Anschluss an die Euler'schen Sätze noch mittheilen wollen*).

*) Vgl. Jacobi „elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel, nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen", Crelle's Journ. f. d. r. u. a. M. Bd. 21 p. 13.

Wir knüpfen wieder an an die Formel (30):

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^i\cdot x^{\frac{3i^2+i}{2}}.$$

In seinen fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum § 66 zeigt Jacobi, wie auch der Cubus dieses unendlichen Produktes in eine Reihe entwickelt werden kann, bei welcher die Exponenten der Potenzen von x gleichfalls eine arithmetische Progression zweiter Ordnung, nämlich statt der Reihe der Pentagonalzahlen $\frac{3i^2+i}{2}$ die Reihe der Trigonalzahlen $\frac{i^2+i}{2}$ bilden. Es besteht in der That folgende Gleichung:

$$(42)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot(2i+1)\cdot x^{\frac{i^2+i}{2}}.$$

Ohne grosse Mühe können wir zunächst diese Formel mit Hilfe der voraufgehenden Resultate herleiten.

Es ist gezeigt worden, dass das Produkt

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^nz)$$

für jeden endlichen Werth von z convergirt und nach den steigenden Potenzen von z entwickelt werden kann. Gleicherweise wird auch das Produkt

$$P'=\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^nz^{-1})$$

nach den steigenden Potenzen von z^{-1} entwickelbar sein und demnach für das Produkt $P\cdot P'$ eine Gleichung sich ansetzen lassen von der Form:

$$(43)\qquad \prod_{1}^{\infty}(1+x^nz)\,.\,(1+x^nz^{-1})=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m f_m(x)z^m,$$

in welcher die Coefficienten gleich hoher positiver und negativer Potenzen von z offenbar einander gleich, d. i.

$$f_{-m}(x)=f_m(x)$$

sein werden, da das Produkt bei der Vertauschung von z mit

z^{-1} sich nicht ändert. Setzt man aber xz statt z, so verliert das Produkt den Faktor $1 + xz$ und gewinnt den Faktor $1 + z^{-1} = \frac{1+z}{z}$. Hieraus ergiebt sich für die Entwicklung (43) folgende Recursionsformel:

$$(1 + z) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} f_m(x) z^m = (1 + xz) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} f_m(x) x^m z^{m+1}$$

oder, anders geschrieben:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \big(f_m(x) + f_{m-1}(x)\big) z^m = \sum_{-\infty}^{\infty} \big(f_{m-1}(x) + f_{m-2}(x)\big) x^{m-1} z^m,$$

so dass sich die allgemeine Beziehung herausstellt:

$$f_m(x) + f_{m-1}(x) = \big(f_{m-1}(x) + f_{m-2}(x)\big) \cdot x^{m-1}.$$

Da es genügt, positive Werthe von m zu betrachten, benutzen wir diese Formel für die Werthe $m,\ m-1,\ m-2,\ \cdots 2,\ 1$. Setzen wir dabei zur Abkürzung

$$f_m(x) + f_{m-1}(x) = F_m(x),$$

so findet sich ohne Mühe

$$F_m(x) = F_1(x) \cdot x^{\frac{m(m-1)}{2}}$$

und demnach die folgende Formel:

$$(44)\quad (1+z) \cdot \prod_{1}^{\infty} (1+x^n z)(1+x^n z^{-1}) = F_1(x) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} x^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot z^m,$$

oder, wenn wir x durch x^3 ersetzen,

$$(1 + z) \cdot \prod_{1}^{\infty} (1 + x^{3n} z)(1 + x^{3n} z^{-1}) = F_1(x^3) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} x^{\frac{3m(m-1)}{2}} \cdot z^m.$$

Hier bemerkt man leicht, dass die Summe zur Rechten dadurch, dass z in $-x$ verwandelt wird, in die Form

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m \cdot x^{\frac{3m^2-m}{2}}$$

d. h. in das Produkt $\prod_{1}^{\infty} (1 - x^m)$ übergeht; man findet so

die Gleichung

$$(1-x)\cdot\prod_1^\infty(1-x^{3n+1})(1-x^{3n-1}) = F_1(x^3)\cdot\prod_1^\infty(1-x^m),$$

wo nun sogleich einleuchtet, dass links alle Faktoren $1-x^m$ stehen, diejenigen ausgenommen, bei welchen m durch 3 theilbar ist; man findet also

$$F_1(x^3) = \frac{1}{\prod_1^\infty(1-x^{3n})}$$

oder

$$F_1(x) = \frac{1}{\prod_1^\infty(1-x^n)}.$$

Mit Rücksicht hierauf nimmt die Gleichung (44) folgende Gestalt an:

$$\prod_1^\infty(1-x^n)\cdot(1+z)\cdot\prod_1^\infty(1+x^nz)(1+x^nz^{-1}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x^{\frac{m(m-1)}{2}}\cdot z^m. \tag{45}$$

Indem nunmehr aber nach z differenzirt und mit $P(z)$ das Produkt (43) bezeichnet wird, ergiebt sich

$$\prod_1^\infty(1-x^n)\cdot\left[(1+z)\frac{dP(z)}{dz}+P(z)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} m x^{\frac{m(m-1)}{2}}\cdot z^{m-1}$$

und endlich für $z=-1$

$$\prod_1^\infty(1-x^n)^3 = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot m x^{\frac{m^2-m}{2}},$$

oder, wenn wir die beiden Glieder, welche den Werthen $m=-i$ und $m=i+1$ entsprechen und für welche $\frac{m^2-m}{2}$ denselben Exponenten

$$\frac{i^2+i}{2} = \frac{(i+1)^2-(i+1)}{2}$$

bedeutet, zusammenfassen:

$$\prod_1^\infty(1-x^n)^3 = \sum_0^\infty(-1)^i\cdot(2i+1)x^{\frac{i^2+i}{2}}.$$

9. Die elementare Bestätigung dieser Formel, wie Jacobi sie gegeben hat, ist folgende: Man setze für die linke Seite ihren Werth nach Formel (30), indem man den Summationsbuchstaben zur Unterscheidung mit k bezeichnet, so wird die zu bestätigende Formel die Gestalt erhalten

$$(46)\quad \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\cdot x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right)^3 = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot(2i+1)x^{\frac{i^2+i}{2}}.$$

Durch logarithmische Differenzirung und wenn dann beiderseits mit x multiplicirt wird, ergiebt sich aber hieraus

$$3\cdot\frac{\sum(-1)^k\cdot\frac{3k^2+k}{2}\cdot x^{\frac{3k^2+k}{2}}}{\sum(-1)^k\cdot x^{\frac{3k^2+k}{2}}} = \frac{\sum(-1)^i(2i+1)\cdot\frac{i^2+i}{2}\cdot x^{\frac{i^2+i}{2}}}{\sum(-1)^i(2i+1)x^{\frac{i^2+i}{2}}}$$

und durch Wegschaffen der Nenner

$$\sum_{k,i}(-1)^{i+k}(2i+1)[3(3k^2+k)-i^2-i]\cdot x^{\frac{3k^2+k}{2}+\frac{i^2+i}{2}} = 0.$$

Da x eine Unbestimmte bezeichnet, darf man hierin auch x^{24} statt x setzen, und wenn dann noch mit $4x^1$ multiplicirt wird, so wird der Exponent von x die Form

$$(47)\qquad (6k+1)^2+3\cdot(2i+1)^2$$

und die ganze Gleichung die folgende Form erhalten:

$$\sum_{i,k}(-1)^{i+k}(2i+1)[(6k+1)^2-(2i+1)^2]x^{(6k+1)^2+3(2i+1)^2}=0.$$

Nun fasse man alle Glieder zusammen, welche gleichen Exponenten s haben, so erstreckt sich die neue Summation über alle ganzen Zahlen s, welche als Summe eines Quadrates einer positiven oder negativen Zahl $6k+1$ und des dreifachen Quadrates einer positiven Zahl $2i+1$ entstehen können. Die Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$(48)\qquad \sum C_s\cdot x^s = 0$$

und lehrt sofort, dass der Entwicklungscoefficient, nämlich die Summe

$$(49)\quad C_s = \sum(-1)^{i+k}(2i+1)[(6k+1)^2-(2i+1)^2],$$

ausgedehnt über alle positiven oder negativen Zahlen $6k + 1$ und alle positiven Zahlen $2i + 1$, für welche

$$(6k + 1)^2 + 3 \cdot (2i + 1)^2 = s$$

ist, verschwindet.

Diese Folgerung gewannen wir aus der zu bestätigenden Gleichung (46); da man aber von der Gleichung (48) aus den Rückgang zur Formel (46) ohne weiteres bewerkstelligen kann, so wird diese Formel bestätigt sein, wenn es uns gelingt, die aus ihr gezogene Folgerung zu erhärten.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die Gleichung

$$(6k + 1)^2 + 3 \cdot (2i + 1)^2 = a^2 + 3b^2$$

stattfinden wird, sobald man setzt

$$(50) \quad a = \varepsilon \cdot \frac{6k + 1 - \delta \cdot 3(2i + 1)}{2}, \quad b = \varepsilon' \cdot \frac{6k + 1 + \delta(2i + 1)}{2}$$

und unter δ, ε, ε' positive oder negative Einheiten versteht. Nun ist

$$a = 3\varepsilon(k - \delta i) + \varepsilon \cdot \frac{1 - 3\delta}{2}, \quad b = \varepsilon'\left(3k + \delta i + \frac{1 + \delta}{2}\right).$$

Sind 1) k, i gleichartig, so wird a dann und nur dann von der Form $6k' + 1$ sein, wenn $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$ gewählt, also

$$a = 3(i - k) + 1 = 6k' + 1, \quad k' = \frac{i - k}{2}$$

gesetzt wird, und dann wird

$$b = \varepsilon'(3k + i + 1) = 2i' + 1$$

bei geeigneter Wahl von $\varepsilon' = \pm 1$ eine positive ungerade Zahl.

Sind 2) k, i ungleichartig, so wird

$$a \equiv \varepsilon\left(3 + \frac{1 - 3\delta}{2}\right) \pmod 6$$

also dann und nur dann von der Form $6k' + 1$ sein, wenn $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$ gewählt, also

$$a = -3(i + k) - 2 = 6k' + 1, \quad k' = -\frac{i + k + 1}{2}$$

gesetzt wird, und dann wird

$$b = \varepsilon'(3k - i) = 2i' + 1$$

bei geeigneter Wahl von $\varepsilon' = \pm 1$ eine positive ungerade

Zahl. Man beachte, dass die zu treffende Wahl von δ durch die Formel

$$\delta = (-1)^{i+k} \tag{50a}$$

bestimmt ist; leicht findet man ferner $i' + k' \equiv \frac{\varepsilon' - 1}{2} \pmod 2$ also

$$(-1)^{i'+k'} = (-1)^{\frac{\varepsilon'-1}{2}} = \varepsilon', \tag{50b}$$

während $\varepsilon = -1$ zu wählen ist.

Hiernach giebt es also für jedes in der Summe (49) zulässige System von Zahlen i, k ein bestimmtes System von Zahlen i', k' derselben Art, und dies System ist von dem erstgenannten verschieden, mit Ausnahme des einzigen Falles, in welchem $i = 3k$, resp. $-i = (3k+1)$, von dem wir aber absehen können, da für ihn das entsprechende Glied der Summe (49) von selber verschwindet. In jedem andern Falle ergiebt sich nach den Formeln (50) für $a = 6k' + 1$, $b = 2i' + 1$:

$$(6k'+1)^2 - (2i'+1)^2 = -2\delta(2i+1)\big(6k+1-\delta(2i+1)\big)$$

also

$$\begin{aligned}&(-1)^{i'+k'}(2i'+1)\cdot[(6k'+1)^2-(2i'+1)^2]\\ &= -\delta\cdot(-1)^{i'+k'}\cdot\varepsilon'(2i+1)[(6k+1)^2-(2i+1)^2]\end{aligned}$$

d. i. nach (50a) und (50b) gleich

$$-(-1)^{i+k}(2i+1)[(6k+1)^2-(2i+1)^2],$$

und folglich heben sich die Glieder der Summe (49), welche den beiden zusammengehörigen Systemen i, k; i', k' entsprechen, auf, und die Formel (46) ist somit bewiesen.

10. Um nun die arithmetische Folgerung zu gewinnen, welche durch diese Formel unmittelbar ausgesprochen wird, ersetzen wir darin wieder die Unbestimmte x durch x^{24} und multipliciren beiderseits mit x^3; so nimmt die Formel die Gestalt an:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\cdot x^{(6k+1)^2}\right)^3 = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot(2i+1)x^{3(2i+1)^2}. \tag{51}$$

Hier durchläuft $6k+1$, wenn k von 0 bis ∞ läuft, alle positiven Zahlen $a \equiv 1 \pmod 6$, oder, was dasselbe sagt, alle

ungeraden positiven Zahlen $a \equiv 1 \pmod 3$ und es wird $(-1)^k = (-1)^{\frac{a-1}{6}}$ sein; wenn aber $k = -k'$ alle negativen Werthe durchläuft, so durchläuft $6k + 1 = -(6k' - 1)$ alle Zahlen $-a'$, für welche a' positiv und $\equiv -1 \pmod 6$ d. h. ungerade und $\equiv 2 \pmod 3$ ist, und man findet $(-1)^k = (-1)^{\frac{a'+1}{6}}$. Die Summe zur Linken ist also nichts anderes als diese:

$$\sum_{\alpha} (\pm x^{\alpha^2}), \tag{52}$$

ausgedehnt über alle positiven ungeraden Zahlen α, welche nicht theilbar sind durch 3, während das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem α von der Form $12k \pm 1$ oder von der Form $12k \pm 7$ ist. Die linke Seite der Gleichung (51) lässt sich demnach schreiben als eine dreifache Summe:

$$\sum_{\alpha, \alpha', \alpha''} (\pm x^{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2}), \tag{53}$$

deren jede den angegebenen Umfang hat, während das obere Vorzeichen gilt, wenn eine oder drei der Zahlen α, α', α'' von der Form $12k \pm 1$, die andern von der Form $12k \pm 7$ sind, das untere Vorzeichen aber, wenn es umgekehrt ist.

Dies vorausgeschickt, bemerken wir, dass die Quadratsumme

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2,$$

da die Zahlen α, α', α'' ungerade sind, (mod. 8) den Rest 3 lassen muss; da sie durch 3 nicht theilbar sind, ist jene Summe (mod. 3) derselben Zahl 3 congruent, und somit findet sich zunächst, dass alle Exponenten der Summe (53) von der Form $24h + 3$ sind.

Ist umgekehrt s eine beliebige positive Zahl von dieser Form, und $s = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2$ eine Zerfällung derselben in drei Quadrate, deren Grundzahlen α, α', α'' positiv gewählt werden dürfen, so müssen α, α', α'' nothwendig ungerade sein, denn sonst müsste eine dieser Zahlen ungerade, die beiden andern gerade sein, wo dann die Summe $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \equiv 1 \pmod 4$ würde, gegen die vorausgesetzte Form von s. Da

aus dieser Form folgt, dass $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2$ durch 3 theilbar ist, so sind ferner entweder alle drei Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha''$ theilbar durch 3, was aber nur geschehen kann, wenn s durch 9 theilbar ist, oder sie sind alle drei nicht theilbar durch 3, denn andernfalls würde die Summe der drei Quadrate den Rest 1 oder 2 (mod. 3) lassen. Hieraus folgt: Ist s eine durch 9 nicht theilbare Zahl von der Form $24h + s$, so wird jede Zerfällung von s in die Summe dreier Quadrate unter den Exponenten von x in der Summe (53) sich finden; ist dagegen s eine durch 9 theilbare Zahl dieser Form, so finden sich nur diejenigen Zerfällungen dort vor, bei denen die Quadrate nicht alle drei durch 9 theilbar sind.

Fassen wir nunmehr diejenigen Glieder der Summe (53) zusammen, welche gleichen Exponenten haben, sodass sie die Gestalt annimmt

$$\sum_s C_s \cdot x^s, \tag{54}$$

die Summation über alle positiven Zahlen s von der Form $24h + 3$ erstreckt, und beachten, dass bei der Bildung des Cubus von (52) jedes Glied $x^{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2}$, wenn die drei Quadrate verschieden sind, 6 mal, wenn zwei von ihnen gleich sind, nur 3 mal, und wenn sie alle gleich sind, nur einmal entstehen wird, so findet man mit Rücksicht auf das oben über das Vorzeichen des Gliedes Gesagte folgende Bestimmung für C_s:

Ist A die Anzahl der Zerfällungen

$$s = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2$$

in drei ungleiche Quadrate, bei denen eine oder drei der Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Form $12k \pm 1$, die andern die Form $12k \pm 7$ haben, A' die Anzahl solcher Zerfällungen in drei ungleiche Quadrate, bei denen es umgekehrt ist;

ist ferner B die Anzahl der Zerfällungen

$$s = \alpha^2 + 2\alpha'^2,$$

bei denen α, α' von einander verschieden und α von der Form $12k \pm 1$ ist, B' die Anzahl solcher Zerfällungen, bei welchen α von der Form $12k \pm 7$ ist;

ist endlich $C = \pm 1$, wenn $s = 3\alpha^2$ d. i. das dreifache

Quadrat einer ungeraden nicht durch 3 theilbaren Zahl α ist, wobei das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem α von der Form $12k \pm 1$ oder $12k \pm 7$ ist, dagegen $C = 0$, wenn es sich mit s anders verhält — so findet sich allgemein:

$$C_s = 6(A - A') + 3(B - B') + C. \tag{55}$$

Durch Vergleichung der Summe (54) mit der ihr gleichen rechten Seite der Gleichung (51) endlich gewinnen wir nun die folgenden bemerkenswerthen Sätze:

Ist s nicht das Dreifache eines ungeraden Quadrates, so muss C_s gleich Null sein, d. h. mit Rücksicht auf die vorige Bestimmung von C_s, es ist

$$6(A - A') + 3(B - B') = 0$$

oder:

$$2A + B = 2A' + B'. \tag{56}$$

Ist aber s das Dreifache eines ungeraden Quadrates

$$s = 3 \cdot (2i + 1)^2,$$

$2i + 1$ aber nicht theilbar durch 3, so wird

$$6(A - A') + 3(B - B') \pm 1 = (-1)^i \cdot (2i + 1);$$

falls dagegen $2i + 1$ durch 3 aufgeht, so wird

$$6(A - A') + 3(B - B') = (-1)^i \cdot (2i + 1),$$

und folglich kann man, diese beiden Fälle zusammenfassend, sagen:

Ist s das Dreifache eines ungeraden Quadrates,

$$s = 3 \cdot (2i + 1)^2,$$

so ist immer

$$2A + B = 2A' + B' + \frac{(-1)^i \cdot (2i + 1) - j}{3}, \tag{57}$$

wenn j den absolut kleinsten Rest von $(-1)^i \cdot (2i + 1)$ (mod. 3) bezeichnet.

Die Formeln (56) und (57) sprechen eine merkwürdige Eigenschaft der Zahlen von der Form $24h + 3$ in Bezug auf ihre Zerfällung in die Summe dreier Quadratzahlen aus.

11. Wir knüpfen hier endlich noch an einige Reihen an, welche zwar auch der Theorie der elliptischen Funktionen

angehören, aber, wie Lebesgue gezeigt hat*), auch ohne ihre Hilfe hergeleitet werden können, und auf welche wir auch an einer späteren Stelle noch werden zurückzuweisen haben.

Setzen wir

$$(58) \quad f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \frac{1 - z \cdot 1 - xz \cdots 1 - x^{k-1}z}{1 - x \cdot 1 - x^2 \cdots 1 - x^k}$$

d. h.

$$f(z) = 1 + x\frac{1-z}{1-x} + x^3 \cdot \frac{1-z \cdot 1-xz}{1-x \cdot 1-x^2} + x^6 \cdot \frac{1-z \cdot 1-xz \cdot 1-x^2z}{1-x \cdot 1-x^2 \cdot 1-x^3} + \cdots;$$

diese Reihe ist convergent, sobald mod. $x < 1$ ist, denn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist

$$x^k \cdot \frac{1 - x^{k-1}z}{1 - x^k},$$

und da der erste Faktor mit unendlich wachsendem k gegen Null, der zweite gegen Eins convergirt, so ist nach einem bekannten Reihensatze die obige Reihe convergent. Dieser Definitionsgleichung entspricht die unschwer erweisliche Funktionalgleichung

$$f(z) = (1 - xz) \cdot f(x^2 z),$$

aus welcher sich allgemeiner

$$f(z) = f(x^{2n} z) \cdot (1 - xz)(1 - x^3 z)(1 - x^5 z) \cdots (1 - x^{2n-1} z)$$

ergiebt, und da das Produkt unter der für x gemachten Annahme bei unendlich wachsendem n convergirt,

$$f(z) = \lim_{n=\infty} f(x^{2n} z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1} z).$$

Nun ist

$$\lim_{n=\infty} f(x^{2n} z) = f(0)$$ **)

ein endlicher, weil durch eine convergente Reihe dargestellter Werth, der jedoch aus der vorigen Gleichung fortgeschafft werden kann, wenn man dieselbe für einen bestimmten Werth von z bildet und dann beide Gleichungen in einander dividirt;

*) Lebesgue, sommation de quelques séries, in Liouville's Journal des Mathématiques t. V p. 42.

**) Die Berechtigung dieser Gleichheit wollen wir hier nicht näher erörtern.

hierzu eignet sich der Werth $z = 1$, da für ihn $f(z) = 1$ wird. Somit findet man

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2n-1} z}{1 - x^{2n-1}}$$

d. h. die Gleichung

$$(59)\quad 1 + x \frac{1-z}{1-x} + x^3 \cdot \frac{1-z}{1-x} \cdot \frac{1-xz}{1-x^2} + \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2n-1} z}{1 - x^{2n-1}}.$$

Setzt man hierin $x = \xi^{-1}$, wo mod. $\xi > 1$ ist, und $z = \xi^m$, so ergiebt sich die Gaussische Formel

$$1 - \frac{1-\xi^m}{1-\xi} + \frac{(1-\xi^m)(1-\xi^{m-1})}{(1-\xi)(1-\xi^2)} - \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \xi^{m-2n+1}}{1 - \xi^{-2n+1}}$$

und, wenn man $z = x$ setzt, diese gleichfalls von Gauss angegebene merkwürdige Beziehung:

$$(60)\qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^{2n-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot *)$$

Versteht man ferner unter $f(z)$ den Ausdruck

$$(61)\qquad f(z) = \Theta(z^2) + \frac{z}{x} \varphi(z^2),$$

während

$$(62)\quad \begin{cases} \Theta(z^2) = 1 - x \cdot \dfrac{1-z^2}{1-x^2} + x^4 \cdot \dfrac{(1-z^2)(1-x^2z^2)}{(1-x^2)(1-x^4)} - \cdots \\ \varphi(z^2) = x - x^4 \cdot \dfrac{1-z^2}{1-x^2} + x^9 \cdot \dfrac{(1-z^2)(1-x^2z^2)}{(1-x^2)(1-x^4)} - \cdots \end{cases}$$

ist, zwei Reihen, welche aus gleicher Ursache convergiren, wie die zuvor betrachtete Reihe, wenn mod. $x < 1$ ist, so besteht die Funktionalgleichung

$$f(z) = (1 + z) \cdot f(xz),$$

aus welcher allgemeiner

$$f(z) = f(x^n z) \cdot (1 + z)(1 + xz) \cdots (1 + x^{n-1} z)$$

und bei unendlich wachsendem n die Gleichung

$$f(z) = f(0) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{n-1} z)$$

*) Gauss, summatio quarundam serierum singularium art. 6, im 2. Bd. s. Werke p. 20.

hervorgeht. Da sich $f(1) = 2$ findet, ergiebt sich hieraus die andere:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + x^{n-1}z}{1 + x^n}. \tag{63}$$

Da nun aus (61)

$$2\Theta(z^2) = f(z) + f(-z), \qquad 2\frac{z}{x}\varphi(z^2) = f(z) - f(-z)$$

hervorgeht, so gewinnt man für die Reihen (62) folgende Darstellungen unter Produktenform:

$$\Theta(z^2) = \frac{1}{2}\prod_{1}^{\infty} \frac{1 + x^{n-1}z}{1 + x^n} + \frac{1}{2}\prod_{1}^{\infty} \frac{1 - x^{n-1}z}{1 + x^n}$$

$$\varphi(z^2) = \frac{x}{2z}\prod_{1}^{\infty} \frac{1 + x^{n-1}z}{1 + x^n} - \frac{x}{2z}\prod_{1}^{\infty} \frac{1 - x^{n-1}z}{1 + x^n},$$

zwei Formeln, welche Jacobi in seinen fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum p. 186 ohne Beweis aufgestellt hat. Für $z = -x$ erhält man aus (61) — (63) die ebenfalls von Jacobi herrührende Formel:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - x^n}{1 + x^n} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{k^2}. \tag{64}$$

12. Aus den Formeln (60) und (64) fliessen interessante arithmetische Folgerungen, um derentwillen wir sie abgeleitet haben. Bedenken wir, dass

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} C(m) \cdot x^m$$

ist, wo $C(m)$ die Anzahl bedeutet, wie oft m aus verschiedenen ganzen Summanden entsteht, so wird ebenso

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} C'(m) \cdot x^m$$

sein, wenn $C'(m)$ den Unterschied bedeutet zwischen der Anzahl der Zerfällungen von m in eine gerade und der Anzahl ihrer Zerfällungen in eine ungerade Menge verschiedener ganzer Summanden. Multiplicirt man daher in (64) mit dem Nenner, so ergiebt sich

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} C'(m)x^m = \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} C(m)x^m\right)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{k^2}\right)$$

d. i. gleich

$$1 + \sum_{m} C(m)x^m + 2\sum_{k}(-1)^k x^{k^2} + 2\sum_{m,k}(-1)^k C(m)x^{m+k^2}.$$

Fasst man aber rechts alle Potenzen von x mit demselben Exponenten zusammen und vergleicht mit der linken Seite, so gelangt man zu folgender Beziehung:

$$C'(m) = C(m) + 2\sum_{k}(-1)^k \cdot C(m - k^2), \tag{65}$$

wo die Summe über alle positive ganze Zahlen k, welche $m - k^2 \geq 0$ machen, ausgedehnt werden muss. Man kann ihr aber eine einfachere Gestalt geben. Bezeichnet nämlich $G(m)$ die Anzahl der Zerfällungen einer positiven Zahl m in eine gerade Menge verschiedener Summanden, $U(m)$ die Anzahl ihrer Zerfällungen in eine ungerade Menge, so ist offenbar

$$C(m) = G(m) + U(m), \qquad C'(m) = G(m) - U(m).$$

Die Formel (65) nimmt demnach die Gestalt an:

$$U(m) = \sum_{k}(-1)^{k-1} \cdot C(m - k^2)$$

und lehrt folgenden Satz: Die Anzahl der Zerfällungen einer positiven ganzen Zahl m in eine *ungerade* Menge verschiedener ganzer Summanden ist gleich dem Ueberschuss der Anzahl aller *möglichen* Zerfällungen der (nicht negativen) Zahlen $m - (2h+1)^2$ über die Anzahl aller *möglichen* Zerfällungen der (nicht negativen) Zahlen $m - 4h^2$ in verschiedene ganze Summanden.

Gleicherweise giebt die Formel (60) zunächst diese neue:

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} C'_g(2m)\cdot x^{2m} = \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} C'_u(m)x^m\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{k(k+1)}{2}}\right); \tag{66}$$

in ihr bezeichnet

$$C'_g(2m) = G_g(2m) - U_g(2m)$$

den Unterschied zwischen der Anzahl Zerfällungen der geraden Zahl $2m$ in eine gerade Menge und der Anzahl ihrer Zer-

fällungen in eine ungerade Menge gerader Summanden; desgleichen

$$C'_u(m) = G_u(m) - U_u(m)$$

den Unterschied zwischen der Anzahl Zerfällungen der Zahl m in eine gerade Menge und der Anzahl ihrer Zerfällungen in eine ungerade Menge ungerader Summanden; für ein gerades m ist offenbar $C'_u(m)$ gleich der Anzahl der Zerfällungen von m in ungerade Summanden, für ein ungerades m aber dieser Anzahl entgegengesetzt gleich. Vergleicht man nun in (66) rechts und links die Coefficienten derselben Potenz x^m, so ergiebt sich, gleichviel ob m gerade oder ungerade ist, die Beziehung:

$$(67)\quad G_g(m) - U_g(m) = G_u(m) - U_u(m) + \sum_k C'_u\left(m - \frac{k(k+1)}{2}\right),$$

wo die Summation sich auf alle ganzen Zahlen $k = 1, 2, 3, \ldots$ erstreckt, für welche $m - \frac{k(k+1)}{2} > 0$ ist. Diese Gleichung lässt sich aber, wie unschwer zu erkennen, als Satz folgendermassen aussprechen:

Die Anzahl Zerfällungen einer *ungeraden* Zahl m in verschiedene *ungerade* Summanden, sowie die Anzahl Zerfällungen einer *geraden* Zahl m in eine *gerade* Menge verschiedener *gerader* Summanden, letztere vermindert um die Anzahl ihrer Zerfällungen in eine *ungerade* Menge *gerader* und eine *gerade* Menge *ungerader* Summanden, ist gleich der Anzahl der Zerfällungen aller (nicht negativen) *geraden* Zahlen $m - \frac{k(k+1)}{2}$, vermindert um die Anzahl der Zerfällungen aller (nicht negativen) *ungeraden* Zahlen $m - \frac{k(k+1)}{2}$ in *ungerade* Summanden.

Dritter Abschnitt.

Ueber die Dirichlet'schen Reihen.

1. Die ferneren Anwendungen, welche man von der Analysis auf die Zahlentheorie gemacht hat, nahmen ihren Ausgangspunkt von dem berühmten Satze der Theorie der quadratischen Reste, welchem Legendre den Namen des Reciprocitätsgesetzes beigelegt hat. Wir schicken der näheren Bezeichnung dieses Ursprungs der analytischen Methoden der Zahlentheorie eine Betrachtung vorauf, von der wir auch sonst mehrfach werden Gebrauch zu machen haben.

Seien zunächst P, R zwei relativ prime ungerade Zahlen, von denen wenigstens P nur aus lauter verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzt ist, und δ, ε positive oder negative Einheiten. Wird dann die Summe

$$\sum_n \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \tag{1}$$

auf alle Glieder eines reducirten Restsystems (mod. $8PR$) erstreckt, so erhält man Null, so oft nicht gleichzeitig $\delta = \varepsilon = P = 1$ ist.

Da

$$\delta^{\frac{n-1}{2}} = \delta^{\frac{n'-1}{2}}, \quad \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} = \varepsilon^{\frac{n'^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{n'}{P}\right)$$

ist, sobald

$$n \equiv n' \pmod{8PR}$$

ist, so darf man, um den Satz zu beweisen, irgend ein bestimmtes reducirtes Restsystem, z. B. diejenigen Zahlen für n wählen, welche aus der Formel

$$n = 8Rv + 8P\mu + PR\alpha \tag{2}$$

hervorgehen, wenn darin α, μ, ν reducirte Restsysteme resp. nach den Moduln 8, R, P durchlaufen.

Zuerst behaupten wir nun, dass, sobald P von 1 verschieden ist, unter den Resten ν (mod. P) ebensoviel Reste $\nu = a$ vorhanden sind, für welche $\left(\frac{a}{P}\right) = +1$ ist, als Reste $\nu = b$, für welche $\left(\frac{b}{P}\right) = -1$ ist. Dies ist einleuchtend für den Fall, in welchem P eine Primzahl p ist, denn für einen solchen Modulus giebt es $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste und ebensoviel Nichtreste. Ist aber P aus mehr als einem Primfaktor zusammengesetzt, sodass man setzen darf $P = pP'$, wo P' von 1 verschieden, so giebt es wenigstens eine Zahl ν' von der Kategorie b; denn, ist β ein Nichtrest (mod. p) und wählt man, was immer möglich ist, die Zahl ν' so, dass $\nu' \equiv \beta$ (mod. p), $\nu' \equiv 1$ (mod. P') ist, so folgt

$$\left(\frac{\nu'}{p}\right) = \left(\frac{\beta}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{\nu'}{P'}\right) = +1 \quad \text{also} \quad \left(\frac{\nu'}{P}\right) = -1.$$

Nun bilden die Zahlen a, b und deshalb auch die Zahlen $\nu' a$, $\nu' b$ zusammen ein reducirtes Restsystem (mod. P); da jedoch

$$\left(\frac{\nu' a}{P}\right) = -1, \quad \left(\frac{\nu' b}{P}\right) = +1$$

gefunden wird, so stimmen die Reste $\nu' a$ mit den Resten b, die Reste $\nu' b$ mit den Resten a überein und daraus folgt sogleich, dass die Anzahl aller a gleich derjenigen aller b sein muss. Somit aber findet sich die wichtige Gleichung:

$$\sum \left(\frac{\nu}{P}\right) = 0, \tag{3}$$

wenn diese Summe auf alle Glieder eines reducirten Restsystems (mod. P) erstreckt wird, z. B. auf diejenigen positiven ungeraden Zahlen, welche $< 2P$ und prim sind zu P.

Ferner aber kann das allgemeine Glied der Summe (1) durch Einsetzen des Ausdrucks (2), da $n \equiv PR\alpha$ (mod. 8) also

$$\delta^{\frac{n-1}{2}} = \delta^{\frac{PR-1}{2}} \cdot \delta^{\frac{\alpha-1}{2}}, \qquad \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} = \varepsilon^{\frac{(PR)^2-1}{8}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha^2-1}{8}},$$

und $n \equiv 8R\nu$ (mod. P) also $\left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{2R}{P}\right) \cdot \left(\frac{\nu}{P}\right)$ ist, folgendermassen geschrieben werden:

$$\delta^{\frac{PR-1}{2}}\varepsilon^{\frac{(PR)^2-1}{8}}\left(\frac{2R}{P}\right)\cdot\delta^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon^{\frac{\alpha^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right),$$

wo der erste Faktor allen Gliedern gemeinsam, der zweite aber von μ unabhängig und daher für jeden der $\varphi(R)$ Werthe von μ derselbe ist; die Summe (1) wird demnach gleich

$$\varphi(R)\cdot\delta^{\frac{PR-1}{2}}\varepsilon^{\frac{(PR)^2-1}{8}}\left(\frac{2R}{P}\right)\cdot\sum_{\alpha}\delta^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon^{\frac{\alpha^2-1}{8}}\cdot\sum_{\nu}\left(\frac{\nu}{P}\right).$$

Sind nun nicht δ, ε, P gleichzeitig gleich 1, so verschwindet wenigstens eine dieser beiden Summen und folglich, wie behauptet, auch die Summe (1). Im entgegengesetzten Falle ist offenbar ihr Werth gleich $\varphi(8PR)$.

Sei ferner D eine beliebig gegebene aber nicht quadratische ganze Zahl; wir können sie stets in folgender Form dargestellt denken:

(4) $$D = \pm 2^c \cdot P \cdot S^2,$$

wo S^2 das grösste in D aufgehende Quadrat, c einen der Werthe 0 oder 1, P aber, wenn es nicht gleich 1 ist, eine nur aus ungeraden, von einander verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzte positive Zahl bedeutet. Indem wir nun mit n irgend eine zu $2D$ prime positive ganze Zahl bezeichnen, suchen wir den Werth für das Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{D}{n}\right)$.

Aus (4) findet sich

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^c \cdot \left(\frac{\pm P}{n}\right)$$

und nun mittels des verallgemeinerten Reciprocitätsgesetzes

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^c \cdot \left(\frac{n}{P}\right) \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pm P-1}{2}}.$$

Hier ist $(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pm P-1}{2}} = \delta^{\frac{n-1}{2}}$, wo $\delta = \pm 1$, je nachdem $\pm P \equiv 1$ oder $3 \pmod 4$ ist, und $\left(\frac{2}{n}\right)^c = \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}$, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, je nachdem $c = 0$ oder 1 ist. Man erhält also bei Anwendung dieser Bezeichnungen die Formel:

(5) $$\left(\frac{D}{n}\right) = \delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right).$$

Aus dieser Formel folgt zunächst, dass stets

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{n}\right),$$

sobald

$$m \equiv n \pmod{8P}$$

ist; mit Worten: allen positiven Zahlen n derselben Restclasse (mod. $8P$) entspricht der gleiche Werth von $\left(\frac{D}{n}\right)$.

Verstehen wir ferner unter R das Produkt derjenigen verschiedenen ungeraden Primfaktoren, welche in S aber nicht in P aufgehen, so werden P, R relativ prim sein, und mit Rücksicht auf die Formel (5) führt der zuvor bewiesene Satz über die Summe (1) folgenden Schluss herbei:

Die Summe $\sum_n \left(\frac{D}{n}\right)$, auf alle positiven Zahlen n erstreckt, welche $< 8PR$ und prim zu $2D$ oder zu $8PR$ sind, ist Null:

$$\sum_n \left(\frac{D}{n}\right) = 0. \tag{6}$$

Hervorzuheben ist der besondere Fall, wo $D = \pm 2^\varepsilon \cdot P$ also $R = 1$ ist. Für ihn lautet der Satz: Die vorstehende Summe ist Null, wenn sie auf alle positiven Zahlen n erstreckt wird, welche $< 8P$ und prim sind zu $8P$.

Und auch hier noch zeichnen wir zwei einfache Fälle aus. Im Falle $\delta = +1$, $\varepsilon = +1$ d. h. wenn

$$D = \pm P \equiv 1 \pmod{4}$$

ist, giebt die allgemeine Formel (5)

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{P}\right).$$

Nach (3) genügt es in diesem Falle, die Summation in der Gleichung (6) auf alle Glieder n eines positiven reducirten Restsystems (mod. $2P$), z. B. auf alle Zahlen $n < 2P$, welche prim sind zu $2P$, zu erstrecken.

Im Falle $\delta = -1$, $\varepsilon = +1$, d. h. wenn

$$D = +P \equiv 3 \pmod 4$$

ist, ergiebt sich aus (5)

$$\left(\frac{D}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n}{P}\right),$$

den Zahlen

$$n = 8\nu + 5P \quad \text{bezw.} \quad n = 8\nu + 7P$$

entspricht daher jedesmal derselbe Werth von $\left(\frac{D}{n}\right)$, wie den Zahlen

$$n = 8\nu + 1P \quad \text{resp.} \quad n = 8\nu + 3P,$$

denen jene (mod. $4P$) congruent sind. Demnach wird in diesem Falle die Gleichung (6) schon bestehen, sobald die Summe sich über alle Glieder $n < 4P$, welche prim sind zu $4P$, erstreckt.

2. Aus der voraufgehenden Untersuchung entnehmen wir für unsern gegenwärtigen Zweck das Resultat, dass allen (positiven) Zahlen n derselben Restclasse (mod. $8PR$) der gleiche Werth von $\left(\frac{D}{n}\right)$ entspricht. Bezeichnet man daher allgemein diejenigen positiven Zahlen $n < 8PR$, welche prim sind zu $2D$ und für welche $\left(\frac{D}{n}\right) = +1$ ist, mit a, diejenigen aber, für welche $\left(\frac{D}{n}\right) = -1$ ist, mit b, so darf man sagen: sämmtliche positive Zahlen n, für welche $\left(\frac{D}{n}\right) = +1$ ist, sind identisch mit den positiven Zahlen von der Form $8PRz + a$, sämmtliche positive Zahlen n, für welche $\left(\frac{D}{n}\right) = -1$ ist, sind identisch mit den positiven Zahlen von der Form $8PRz + b$. Die einen wie die andern sind also die Glieder gewisser arithmetischer Progressionen von der Form $8PRz + Q$, worin das Anfangsglied Q und die Differenz $8PR$ zwei Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind. Wegen der Gleichung (6) muss die Anzahl der Zahlen a genau der Anzahl der Zahlen b gleich sein.

Dies Resultat hat sich uns als eine nothwendige Folge aus dem Reciprocitätsgesetze ergeben, das wir als bewiesen

voraussetzten. Der erste Versuch, dasselbe zu beweisen, rührt von Legendre her*), sein Beweis kann jedoch, wie zuerst Gauss sehr richtig bemerkt hat**), wie geistvoll er auch ist, nicht als strenge betrachtet werden, weil er auf einer Annahme beruht, die durchaus nicht von selbst einleuchtend ist. Legendre setzt nämlich mehrfach in seinem Beweise eine Primzahl voraus, in Bezug auf welche eine gegebene Zahl — nennen wir sie wieder D — quadratischer Rest sei, d. i. er setzt voraus, dass unter den Zahlen, für welche $\left(\frac{D}{n}\right) = 1$ ist, sich eine Primzahl befinde. Dies läuft darauf hinaus, dass wenigstens in einer der arithmetischen Progressionen von der Form $8PRz + a$ ein Glied vorhanden sei, das einer Primzahl gleich ist, und führt naturgemäss zu der allgemeineren Frage: ob eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied und deren Differenz zwei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, *stets* eine Primzahl enthält oder nicht.

Legendre selbst hat schon den Versuch gemacht, nachzuweisen, dass diese Frage zu bejahen sei. Er gründet seinen Nachweis auf die Lösung der an sich sehr interessanten Aufgabe, die grösstmögliche Anzahl auf einander folgender Glieder einer solchen arithmetischen Progression zu bestimmen, welche durch eine oder mehrere von gegebenen ungeraden Primzahlen theilbar sind. Die höchst beachtenswerthe Lösung, welche er giebt, ist folgende***): Wenn $k + 1$ die Anzahl der gegebenen Primzahlen, p_k die k^{te} (ungerade) Primzahl der natürlichen Zahlenreihe ist, so wird unter p_k auf einander folgenden Gliedern der arithmetischen Progression wenigstens eines durch keine der gegebenen Primzahlen theilbar sein. Da aber Legendre diesen Satz nur durch Induction begründete, so stand die Entscheidung über die obige Frage noch immer aus.

Hier war es nun Dirichlet, der die Lücke in Legendre's Arbeit zu ergänzen suchte, aber er stiess dabei auf Schwierig-

*) S. seinen Essai sur la théorie des Nombres 2. éd. p. 198 oder Hist. de l'Acad. de Paris 1784 u. 1785.

**) Gauss, Disquisitiones Arithmeticae artt. 296 u. 297.

***) Legendre, Essai sur la th. des Nombres 2. éd. p. 404.

keiten, deren Ueberwindung ihm nicht gelingen wollte, und erst nachdem er den Legendre'schen Weg verlassen*), fand er einen andern, der ihn ans Ziel brachte, zugleich aber sich als geeignet erwies, auch andere zahlentheoretische Aufgaben zu lösen. Dieser Weg sind die analytischen Methoden, die wir jetzt nach ihrem erlauchten Erfinder die Dirichlet'schen Methoden nennen.

Das Mittel aber, dessen er sich bedient hat, sind unendliche Reihen und Produkte von ganz derselben Art, wie sie uns in Nr. 5 des 1. Abschnittes schon entgegengetreten sind, und unter diesen vor allem die Reihe

$$\sum_n \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

welche in der Formel (22) dort auftritt. Die genauere Untersuchung ihrer analytischen Natur, insbesondere ihres Verhaltens, wenn sie als eine Funktion von s aufgefasst werden, bildet die wesentliche Grundlage der Dirichlet'schen Methoden, und ihr werden wir hier unsere ganze Aufmerksamkeit zuwenden müssen, bevor wir jene Methoden selbst zur Darstellung bringen können.

3. Die Reihen, welche wir zu betrachten haben, sind von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{7}$$

oder noch allgemeiner von der folgenden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n^s}, \tag{8}$$

wo c_n eine positive, mit dem Index n unendlich wachsende Grösse bedeutet, während a_n beliebig reell oder complex sein kann; s bedeutet eine reelle Grösse, die wir stets grösser als Null voraussetzen werden**). Wenn $\sigma \gtrless 0$ und eine solche

*) Dirichlet in der Einleitung zu seiner Abhandlung in den Abhandlungen der Berliner Akademie a. d. J. 1837.

**) Wir könnten die im 1. Abschnitte geltende Annahme, dass s eine Grösse sei, deren reeller Bestandtheil positiv ist, auch hier weiter verfolgen, doch genügt die obige Beschränkung unserm Zwecke.

Reihe für alle $s > \sigma$ convergent ist, so bezeichnet sie für alle diese Werthe von s eine bestimmte Funktion von s, und wir haben hauptsächlich darnach zu fragen, ob sie sich stetig mit s verändert oder nicht. In dieser Hinsicht ist ein Princip von höchstem Werthe, welches zuerst von Abel benutzt worden ist. Denken wir uns allgemein eine Reihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s),$$

deren einzelne Glieder gegebene stetige Funktionen von s sind und welche für alle $s \geqq \sigma$ convergent ist. Um ihre Stetigkeit als Funktion von s zu untersuchen, zerlegen wir die unendliche Reihe in zwei Theile:

$$S = S_m + R_m,$$

wo S_m die Summe ihrer ersten m Glieder, R_m den Rest aller folgenden bedeutet. So oft nun die Reihe für alle $s \geqq \sigma$ *gleichmässig* convergirt, d. h. so oft eine hinreichend grosse Zahl μ angebbar ist von der Beschaffenheit, dass, wenn $m > \mu$, der Rest R_m seinem absoluten Betrage nach für alle $s > \sigma$ kleiner ist als ein beliebig kleiner Werth δ, wird die Reihe S für alle $s \geqq \sigma$ eine stetige Funktion von s sein*).

Denn ist s' ein Nachbarwerth von s, und ihm entsprechend

$$S' = S'_m + R'_m,$$

so hat man

$$S' - S = (S'_m - S_m) + (R'_m - R_m).$$

Nun ist nach der Voraussetzung sowohl R_m als auch R'_m dem absoluten Betrage nach kleiner als δ, wenn nur $m > \mu$ gedacht wird; ferner ist der erste Theil S_m der Reihe offenbar eine stetige Funktion von s und deshalb kann s' so nahe an s gedacht werden, dass auch der absolute Betrag von $S'_m - S_m$ kleiner als δ wird. Hieraus ergiebt sich der absolute Betrag von $S' - S$ sicher kleiner als 3δ d. i. beliebig klein, und folglich ersieht man die Stetigkeit von S als Funktion von s.

*) Die Stetigkeit für $s = \sigma$ ist dabei so zu verstehen, dass die Reihe bei einem gegen σ hin abnehmendem s den Werth der Reihe für $s = \sigma$ zum Grenzwerthe hat.

Ein Beispiel dieser Art bietet die Reihe (7), falls die Moduln der Coefficienten a_n sämmtlich kleiner sind als eine endliche Grösse C; die Reihe (7) ist dann eine stetige Funktion von s für alle $s > 1$. Denn nach der Voraussetzung wird mod. R_m sicher kleiner sein als

$$C\left(\frac{1}{(m+1)^s} + \frac{1}{(m+2)^s} + \frac{1}{(m+3)^s} + \cdots\right).$$

Nun convergirt aber nach dem ersten Abschnitte die Reihe

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

für jedes $s > 1$; ist daher σ eine Zahl, welche beliebig wenig grösser als 1 ist, so convergirt auch die Reihe

$$\frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \cdots$$

und demnach kann μ so gross gewählt werden, dass der Rest dieser Reihe, nämlich

$$\frac{1}{(m+1)^\sigma} + \frac{1}{(m+2)^\sigma} + \frac{1}{(m+3)^\sigma} + \cdots$$

kleiner als δ ist, sobald $m > \mu$ gewählt wird. Daraus folgt für alle $s > \sigma$

$$C\left(\frac{1}{(m+1)^s} + \frac{1}{(m+2)^s} + \cdots\right) < C \cdot \delta$$

d. h. gleichfalls beliebig klein, und nunmehr dem Abel'schen Principe zufolge die Stetigkeit der Reihe (7) für alle s, welche grösser als σ d. i. offenbar, welche grösser als 1 sind.

4. Mit Hilfe dieses Abel'schen Grundsatzes leiten wir nun einen Satz her, welcher in seiner ganzen Allgemeinheit in Dedekind's Ausgabe der Dirichlet'schen Vorlesungen über Zahlentheorie (3. Aufl. p. 376) ausgesprochen und bewiesen worden ist. Wir beschränken hier jedoch seine Allgemeinheit zu grösserer Klarheit so weit, als es die Anwendungen, um deren willen wir den Satz aufstellen, verstatten.

Sei

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(s) \tag{9}$$

eine unendliche Reihe, deren einzelne Glieder Produkte aus

einer Constanten a_n von reellem oder complexem Werthe und einer Funktion $\psi_n(s)$ der positiven Veränderlichen s sind. Wir setzen voraus:

Der analytische Modulus der Summe

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{10}$$

bleibe bei unendlich wachsendem Index n stets unter einem endlichen Werthe A; die Funktion $\psi_n(s)$ aber habe für alle $s > \sigma$ folgende Eigenschaften:

1) sie sei reell und positiv,

2) $\psi_n(s)$ nehme mit wachsendem Index n ab und convergire gegen Null,

3) $\psi_n(s)$ verändere sich stetig mit s und nehme ab, wenn s wächst, sodass immer

$$\psi_n(s) < \psi_n(\sigma)$$

ist. —

Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir den Satz: Für alle $s > \sigma$ convergirt die Reihe S und stellt eine stetige Funktion von s dar. Zum Beweise betrachten wir neben der Reihe S die folgende:

$$S' = A_1\big(\psi_1(s) - \psi_2(s)\big) + A_2\big(\psi_2(s) - \psi_3(s)\big) + \cdots.$$

Diese Reihe ist gleichmässig für alle $s \geqq \sigma$ convergent; denn die Summe einer beliebig grossen Anzahl m von Gliedern, welche auf das n^{te} Glied der Reihe folgen, hat der Voraussetzung über A_n zufolge einen Modulus kleiner als

$$A\big(\psi_{n+1}(s) - \psi_{n+m+1}(s)\big),$$

ein Werth, der nach den Eigenschaften der Funktion $\psi_n(s)$ kleiner ist als $A\psi_{n+1}(\sigma)$ d. i. für ein hinreichend grosses n und für alle $s \geqq \sigma$ beliebig klein. Die Reihe S' ist also auch dem Abel'schen Grundsatze gemäss für alle $s \geqq \sigma$ stetig.

Vergleichen wir nun die Summe S_n' ihrer ersten n Glieder mit der Summe S_n der ersten n Glieder der Reihe S. Mit Rücksicht auf Gleichung (10), aus welcher

$$A_n - A_{n-1} = a_n$$

folgt, findet man sogleich

$$S_n' = a_1\psi_1(s) + a_2\psi_2(s) + \cdots + a_n\psi_n(s) - A_n \cdot \psi_{n+1}(s)$$

d. h.

$$S_n = S_n' + A_n\psi_{n+1}(s),$$

eine Gleichung, aus welcher bei unendlich wachsendem n mit Bezugnahme auf die Voraussetzungen

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} S_n'$$

erschlossen wird. Hiernach ist für alle $s \geq \sigma$ auch die Reihe S gleichmässig convergent und von gleichem Werthe wie die Reihe S' und daher, wie diese, eine stetige Funktion von s.

5. Wir machen von diesem allgemeinen Satze zuerst eine Anwendung auf die Reihen von der mit (8) bezeichneten Art:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n^s}, \tag{8}$$

welche wir nach Dedekind's Vorgange Dirichlet'sche Reihen nennen wollen, und behaupten den Satz: Eine Dirichlet'sche Reihe ist für alle positiven Werthe von s gleichmässig convergent und eine stetige Funktion von s, sobald die Summe

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

bei unendlich wachsendem n endlich bleibt.

Ist nämlich σ ein beliebig kleiner positiver Werth, so erfüllt die Reihe (8) für alle $s \geq \sigma$ die sämmtlichen Voraussetzungen, welche dem vorigen allgemeinen Satze zu Grunde liegen: die auf A_n bezügliche Voraussetzung ist soeben ausgesprochen worden, die Funktion $\psi_n(s)$ aber ist hier $\psi_n(s) = \frac{1}{c_n^s}$ und demnach ist sie für alle $s \geq \sigma$ reell und positiv, nimmt mit wachsendem n fortwährend und zwar, da c_n dann unendlich wachsen soll, unendlich ab, während sie zugleich stetig abnimmt, wenn s wächst. Hieraus erschliessen wir mittels des allgemeinen Satzes, dass die Reihe (8) für alle s, welche gleich oder grösser sind, als der beliebig kleine positive Werth σ, d. h. für alle positiven s gleichmässig convergent und eine stetige Funktion von s ist.

Sei nun s ein bestimmter positiver Werth und ε eine

positive Veränderliche, welche wir werden unendlich abnehmen lassen. Wir bezeichnen mit S' die Reihe

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n^{s+\varepsilon}},$$

mit S_m, S_m' die Summe der m ersten Glieder der Reihen S und S', mit R_m, R_m' die Reste. Alsdann kann man schreiben:

$$\frac{S-S'}{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{m} a_n \cdot \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{c_n^s} - \frac{1}{c_n^{s+\varepsilon}}\right) + \frac{R_m - R_m'}{\varepsilon}.$$

Da man aber dem bereits Bewiesenen zufolge m so gross denken kann, dass R_m und R_m' beide kleiner sind, als ein beliebig kleiner Werth, so wird sich diese Gleichung einfacher folgendermassen darstellen lassen:

$$\frac{S-S'}{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{c_n^s} - \frac{1}{c_n^{s+\varepsilon}}\right), \tag{11}$$

und wir wollen nun sehen, was geschieht, wenn ε gegen 0 convergirt. Die Reihe hat die allgemeine Gestalt der Reihe (9), nur dass die Veränderliche ε heisst, statt s, sie ist nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \psi_n(\varepsilon),$$

wenn

$$\psi_n(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{c_n^s} - \frac{1}{c_n^{s+\varepsilon}}\right) \tag{12}$$

gesetzt wird. Wir zerlegen diese unendliche Reihe in einen anfänglichen Theil

$$\sum_{n=1}^{\nu} a_n \psi_n(\varepsilon) \tag{13}$$

und den übrigen Theil, der sich folgendermassen schreiben lässt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{\nu+i} \cdot \psi_{\nu+i}(\varepsilon). \tag{14}$$

Da die Summe A_n bei unendlich wachsendem n endlich bleibt, gilt dasselbe auch für die Summe

$$A_{n+\nu} - A_\nu = a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \cdots + a_{\nu+n}$$

die Funktion $\psi_{\nu+i}(\varepsilon)$ ist jedenfalls reell und positiv; da ferner aus der Formel

$$F(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x^s} - \frac{1}{x^{s+\varepsilon}}\right)$$

sich

$$F'(x) = \frac{s}{\varepsilon x^{s+\varepsilon+1}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{s} - x^{\varepsilon}\right)$$

findet, welcher Ausdruck mit Rücksicht darauf, dass

$$1 + \frac{\varepsilon}{s} < e^{\frac{\varepsilon}{s}}$$

ist, negativ ist, so lange $x > e^{\frac{1}{s}}$ d. i. $s \log x > 1$ ist, so wird $F(x)$ alsdann bei wachsendem x abnehmen, und somit wird $\psi_{\nu+i}(\varepsilon)$ nach seiner Bedeutung mit wachsendem Index abnehmen, sobald $s \log c_{\nu+i} > 1$ ist, was für alle i geschieht, wenn $s \log c_\nu > 1$ ist, und daher durch Wahl eines hinreichend grossen ν sich erreichen lässt; auch ist ersichtlich, dass $\psi_{\nu+i}(\varepsilon)$ mit unendlich wachsendem Index gegen Null convergirt.

Zudem ist $\psi_{\nu+i}(\varepsilon)$ offenbar eine stetige Funktion von ε, welche mit unendlich abnehmendem ε dem Grenzwerthe $\frac{\log c_{\nu+i}}{c_{\nu+i}^s}$ zustrebt; und da aus der Formel für $\psi_n(\varepsilon)$ sich

$$\psi_n'(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2 c_n^{s+\varepsilon}}(1 + \varepsilon \log c_n - c_n^{\varepsilon}),$$

also mit Rücksicht auf die für positive ε geltende Ungleichheit

$$1 + \varepsilon \log c_n < e^{\varepsilon \log c_n} \text{ d. i. } < c_n^{\varepsilon}$$

$\psi_n'(\varepsilon)$ sich negativ ergiebt, $\psi_n(\varepsilon)$ also mit wachsendem ε abnimmt, so dass immer

$$\psi_n(\varepsilon) < \frac{\log c_n}{c_n^s}$$

sein wird, so sind, wenn unter σ die Null verstanden wird, sämmtliche Voraussetzungen, aus denen der allgemeine Satz vor. Nr. entsprang, für die Reihe (14) erfüllt. Man darf demnach schliessen, dass diese Reihe für alle $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion von ε ist, was von der endlichen Summe (13) ohne weiteres ausgesagt werden darf. Aus diesem Grunde findet man den Grenzwerth der ganzen Reihe (11) für $\varepsilon = 0$, indem

man in ihren einzelnen Gliedern $\varepsilon = 0$ setzt, und findet somit

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{S - S'}{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\log c_n}{c_n^s}.$$

Diese Formel lehrt, dass die Reihe (8), als eine Funktion von s aufgefasst, eine endliche Ableitung besitzt, welche gegeben wird durch die Reihe

$$\frac{dS}{ds} = -\sum_{1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\log c_n}{c_n^s}. \tag{15}$$

Und diese Ableitung ist wieder für alle positiven s eine stetige Funktion von s. Denn die in dieser unendlichen Reihe auftretende Funktion

$$\psi_n(s) = \frac{\log c_n}{c_n^s}$$

erfüllt, wie man leicht sieht, für alle positive Werthe s wieder die sämmtlichen Voraussetzungen des allgemeinen Satzes*).

6. Als ein für unsere ferneren Untersuchungen besonders wichtiges Beispiel Dirichlet'scher Reihen wählen wir die Reihe

$$\sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

welcher wir in Formel (22) des ersten Abschnittes bereits begegnet sind. Die Summation bezog sich dort auf alle positive ganze Zahlen n, welche prim sind zu $2D$; wird jedoch die Bedeutung des Jacobi'schen Symbols in der dort auch schon angegebenen Weise erweitert, dass nämlich

$$\left(\frac{D}{n}\right) = 0$$

sein soll, so oft n keine relative Primzahl zu $2D$ ist, so kann die Summe auch über sämmtliche positive ganze Zahlen n ausgedehnt gedacht werden. Da sie aber, so lange $s > 1$ ist,

*) Streng genommen ist das oben Ausgesagte durch die voraufgehenden Betrachtungen nur für den „vorwärts genommenen Differentialquotienten" von S nachgewiesen; aber aus seiner Stetigkeit in Verbindung mit der Stetigkeit von S selbst folgt seine Gleichheit mit dem „rückwärts genommenen Differentialquotienten", also seine Identität mit der Ableitung von S. (S. Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung Nr. 100.)

unbedingt convergirt, also von der Aufeinanderfolge der Summanden unabhängig ist, dürfen wir sie auch nach den wachsenden Werthen von n geordnet denken, also folgendermassen schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}. \tag{16}$$

So ist sie dann eine Dirichlet'sche Reihe von derselben Beschaffenheit, wie die Reihe S voriger Nr.; in der That genügt, um dies einzusehen, die Bemerkung, dass, wenn

$$a_n = \left(\frac{D}{n}\right)$$

gesetzt wird,

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

bei unendlich wachsendem n endlich bleibt. Das ergiebt sich aber mittels des Satzes in Nr. 1, nach welchem die Summe

$$\sum \left(\frac{D}{n}\right) = 0 \tag{17}$$

ist, wenn sie auf alle Glieder eines positiven reducirten Restsystems (mod. $8PR$) oder auch bei der erweiterten Bedeutung des Jacobi'schen Symbols, wenn sie über je $8PR$ aufeinanderfolgende positive Zahlen n erstreckt wird. Da ausserdem

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{n}\right)$$

ist, sobald $m \equiv n \pmod{8PR}$, so ist offenbar, wenn wir unter m den kleinsten positiven Rest von n (mod. $8PR$) verstehen,

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

und wird daher niemals grösser als der grösste der Werthe $A_1, A_2, \ldots A_{8PR-1}$.

Indem wir also die Resultate der vorigen Nr. auf die Reihe (16) zur Anwendung bringen, erkennen wir, dass diese Reihe für alle positiven Werthe von s eine stetige Funktion von s ist. Lassen wir daher s z. B. gegen 1, oder, indem wir $s = 1 + \varrho$ setzen, das positive ϱ gegen 0 convergiren, so wird der zugehörige Grenzwerth der Reihe erhalten, wenn man in ihren einzelnen Gliedern $\varrho = 0$ setzt, und somit findet sich die wichtige Gleichung:

$$\lim_{\varrho=0} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}. \tag{18}$$

Man bemerke, dass links die Reihenfolge der Glieder ganz willkürlich ist, da die dort stehende Reihe unbedingt convergirt, dass aber rechts die für die Summation angegebene natürliche Reihenfolge der Zahlen n durchaus erforderlich ist; die rechts stehende Reihe gehört in der That zu den nur bedingt convergenten, und nur der Werth, welcher der natürlichen Reihenfolge entspricht, giebt den Grenzwerth, um den es sich handelt.

Wir fügen eine weitere Anwendung des allgemeinen Satzes der vorigen Nr. hier an, indem wir zwei Reihen von der Form (8) betrachten, von denen wir annehmen wollen, dass sie für alle s, welche gleich oder grösser sind als ein gegebener positiver Werth σ, convergent und einander gleich seien, in Zeichen:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n^s} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n'}{c_n'^s}, \tag{19}$$

wo auch die Grössen c_n' positive mit dem Index n unendlich wachsende Werthe sein sollen. Es wird behauptet, aus der angenommenen *Gleichheit* (19) folge die völlige *Identität* beider Reihen, d. h. für jedes n sei

$$c_n' = c_n, \quad a_n' = a_n.$$

Bei dem Beweise dürfen wir offenbar voraussetzen, dass $c_1 \leqq c_1'$ sei, und die angenommene Gleichheit auch folgendermassen schreiben:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{c_1}{c_n}\right)^s = \sum_{1}^{\infty} a_n' \cdot \left(\frac{c_1}{c_n'}\right)^s$$

oder auch so:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \left(\frac{c_1}{c_n}\right)^{\sigma} \cdot \frac{1}{\left(\frac{c_n}{c_1}\right)^{s'}} = \sum_{1}^{\infty} a_n' \left(\frac{c_1}{c_n'}\right)^{\sigma} \cdot \frac{1}{\left(\frac{c_n'}{c_1}\right)^{s'}}, \tag{20}$$

wo $s' + \sigma$ für s gesetzt ist. Nun ist nach der Voraussetzung jede der beiden Reihen

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{c_1}{c_n}\right)^{\sigma} \quad \text{und} \quad \sum_{1}^{\infty} a_n' \left(\frac{c_1}{c_n'}\right)^{\sigma}$$

convergent und demnach bleibt für jede von ihnen die Summe der ersten n Glieder endlich. Somit erweisen sich jene beiden gleichen Reihen (20) als zwei Dirichlet'sche Reihen genau von der Art, wie sie in voriger Nr. mit S bezeichnet worden sind, und sind folglich für alle Werthe $s' > 0$ stetige Funktionen von s'. Man erhält daher ihren Grenzwerth für einen beliebig grossen Werth von s', indem man in ihren einzelnen Gliedern s' diesen Werth annehmen lässt, wodurch aber, wenn s' unendlich gross gewählt wird, die Reihe links sich auf ihr Anfangsglied a_1, die Reihe zur Rechten auf den Werth a_1' oder Null reducirt, je nachdem c_1' gleich oder grösser als c_1 ist. Die Gleichheit beider Reihen erfordert also $c_1' = c_1$ zugleich mit $a_1' = a_1$. Hiernach kann man in den vorausgesetzt gleichen Reihen (19) beiderseits die ersten Glieder weglassen, erhält auf solche Weise eine ähnliche Gleichung, auf welche nun wieder genau dieselben Schlüsse anwendbar sind, sodass sich auch $c_2' = c_2$, $a_2' = a_2$ ergiebt, u. s. f.

7. An die Dirichlet'schen Reihen knüpft sich ein höchst merkwürdiger Satz, den Dirichlet gefunden und bewiesen hat und welcher eine der wesentlichsten Grundlagen seiner zahlentheoretischen Untersuchungen geworden ist. Dedekind hat gezeigt, wie derselbe mit den mitgetheilten Sätzen über Dirichlet'sche Reihen in unmittelbare Beziehung gesetzt werden kann, indem er eine Anzahl von allgemeinen Sätzen entwickelt hat, aus denen sie alle entspringen*). Wir wollen den Dirichlet'schen Satz zunächst aus diesen Betrachtungen von Dedekind entwickeln, indem wir sie jedoch nur insoweit benutzen, als dieser Zweck es erheischt.

Sei also

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{c_i^{\varrho}} \tag{21}$$

eine Dirichlet'sche Reihe, ϱ eine positive Veränderliche. Unter M_n verstehen wir den Ausdruck

$$M_n = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n , \tag{22}$$

*) Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet, 3. Auflage, S. 381.

während A_n nach wie vor die Summe bedeutet

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{23}$$

woraus sogleich

$$a_n = A_n - A_{n-1}, \tag{24}$$

sowie

$$a_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{c_n} \tag{25}$$

folgt. Vermöge der letztern Gleichheit zieht man aus der Formel (23) die folgende:

$$A_n - \frac{M_n}{c_n} = M_1\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) + M_2\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}\right) + \cdots + M_{n-1}\left(\frac{1}{c_{n-1}} - \frac{1}{c_n}\right).$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{c_i} - \frac{1}{c_{i+1}} = \int_{c_i}^{c_{i+1}} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{h_i} \log \frac{c_{i+1}}{c_i},$$

wenn unter h_i ein Werth zwischen c_i und c_{i+1} verstanden wird. Hiernach nimmt der vorige Ausdruck die Gestalt an:

$$A_n - \frac{M_n}{c_n} = \frac{M_1}{h_1} \log \frac{c_2}{c_1} + \frac{M_2}{h_2} \log \frac{c_3}{c_2} + \cdots + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \log \frac{c_n}{c_{n-1}} \tag{26}$$

und gestattet, folgende Behauptung zu beweisen: Wenn für die Dirichlet'sche Reihe (21) die Ausdrücke

$$\frac{M_i}{c_i} \quad \text{und} \quad \frac{M_i}{c_{i+1}}$$

bei unendlich wachsendem Index i gegen eine gemeinsame (von Null verschiedene) Grenze ω convergiren, so convergirt auch der Quotient

$$\frac{A_i}{\log c_i}$$

gegen dieselbe Grenze.

Aus der Voraussetzung ergiebt sich zuerst, dass $\frac{c_i}{c_{i+1}}$ gegen die Einheit, und dass auch der Ausdruck $\frac{M_i}{h_i}$ gegen die gemeinsame Grenze ω convergiren muss. Zerlegt man nun die rechte Seite der Gleichung (26) in zwei Theile:

$$\frac{M_1}{h_1}\log\frac{c_2}{c_1}+\frac{M_2}{h_2}\log\frac{c_2}{c_2}+\cdots+\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\cdot\log\frac{c_m}{c_{m-1}}$$

und

$$\frac{M_m}{h_m}\log\frac{c_{m+1}}{c_m}+\cdots+\frac{M_{n-1}}{h_{n-1}}\log\frac{c_n}{c_{n-1}},$$

so wird man, mit Rücksicht darauf, dass die Logarithmen sämmtlich positive Werthe haben, diese beiden Theile einfacher folgendermassen darstellen können:

$$\mathfrak{M}\cdot(\log c_m-\log c_1),\qquad \mathfrak{M}'\cdot(\log c_n-\log c_m),$$

indem man unter $\mathfrak{M}$ einen Mittelwerth der Grössen $\frac{M_1}{h_1}$, $\frac{M_2}{h_2}\cdots\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$ und unter $\mathfrak{M}'$ einen Mittelwerth der Grössen $\frac{M_m}{h_m}$ bis $\frac{M_{n-1}}{h_{n-1}}$ versteht. Lässt man sodann n und zugleich auch m unendlich wachsen, so werden die letztern dem Grenzwerthe ω unendlich sich annähern, also $\lim.\,\mathfrak{M}'=\omega$ sein, während die erstern und folglich auch $\mathfrak{M}$ zwischen endlichen Grenzen verbleiben. Richtet man aber das gleichzeitige Wachsen von m und n so ein, dass dabei $\frac{\log c_m}{\log c_n}$ unendlich abnimmt, so wird die Formel (26), nachdem sie durch $\log c_n$ dividirt worden, bei solchem Grenzübergange die Gleichung ergeben:

$$\lim.\,\frac{A_n}{\log c_n}=\omega. \tag{27}$$

Nachdem dies festgestellt ist, bezeichnen wir nun mit S_n die Summe der ersten n Glieder der Reihe (21) und gewinnen für sie mittels der Beziehung (24) folgende Gleichung:

$$S_n-\frac{A_n}{c_n^\varrho}=A_1\left(\frac{1}{c_1^\varrho}-\frac{1}{c_2^\varrho}\right)+A_2\left(\frac{1}{c_2^\varrho}-\frac{1}{c_3^\varrho}\right)+\cdots+A_{n-1}\left(\frac{1}{c_{n-1}^\varrho}-\frac{1}{c_n^\varrho}\right).$$

Nun kann man aber setzen

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}}\varrho\frac{\log x\,dx}{x^{1+\varrho}}=\log h_i\left(\frac{1}{c_i^\varrho}-\frac{1}{c_{i+1}^\varrho}\right),$$

wenn wieder unter h_i ein Werth zwischen c_i und c_{i+1} ver-

standen wird. Mit Hilfe dieser Formel lässt sich die vorige Gleichung so darstellen:

$$(28)\quad S_n - \frac{A_n}{c_n^\varrho} = \frac{A_1}{\log h_1}\int_{c_1}^{c_2} \varrho \frac{\log x\,dx}{x^{1+\varrho}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{\log h_{n-1}}\int_{c_{n-1}}^{c_n} \varrho \frac{\log x\,dx}{x^{1+\varrho}}.$$

Hier zerlegen wir wieder die Summe zur Rechten in zwei Theile, indem wir die ersten $m-1$ Glieder derselben zusammenfassen und die übrigen Glieder desgleichen. Verstehen wir sodann unter $\mathfrak{M}$ einen Mittelwerth der Grössen

$$\frac{A_1}{\log h_1},\quad \frac{A_2}{\log h_2},\quad \cdots\quad \frac{A_{m-1}}{\log h_{m-1}}$$

und unter $\mathfrak{M}'$ einen Mittelwerth der Grössen $\frac{A_m}{\log h_m}$ bis $\frac{A_{n-1}}{\log h_{n-1}}$, so werden wir die genannten beiden Theile mit Rücksicht darauf*), dass die Integrale wesentlich positive Werthe haben, einfacher folgendermassen ausdrücken können:

$$(29)\qquad \mathfrak{M}\cdot\int_{c_1}^{c_m} \varrho \frac{\log x\,dx}{x^{1+\varrho}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}'\cdot\int_{c_m}^{c_n} \varrho \frac{\log x\,dx}{x^{1+\varrho}}.$$

Dem bereits Bewiesenen zufolge nähert sich $\frac{A_i}{\log c_i}$ bei unendlich wachsendem Index der Grenze ω, Gleiches gilt aber auch, da $\frac{c_i}{c_{i+1}}$, wie bemerkt ist, gegen 1 convergirt, von $\frac{A_i}{\log c_{i+1}}$ und folglich auch von $\frac{A_i}{\log h_i}$. Verstehen wir demnach bei der obigen Zerlegung unter m einen festen aber hinreichend grossen, nämlich so grossen Werth, dass der Ausdruck

$$\frac{1+\varrho\log c_m}{\varrho c_m^\varrho},$$

der mit unendlich wachsendem m gegen Null convergirt, beliebig klein wird und dass zugleich für jedes $i > m$ sich

*) Man darf beim Beweise $c_1 > 1$ denken, indem man andernfalls $\frac{S}{k^\varrho}$ statt S betrachtet, wo $kc_1 > 1$.

$\frac{A_i}{\log h_i}$ um weniger als δ von ω unterscheidet, so liegt der zweite der Theile (29) zwischen

$$(\omega - \delta) \cdot \int_{c_m}^{c_n} \frac{\varrho \log x dx}{x^{1+\varrho}} \quad \text{und} \quad (\omega + \delta) \cdot \int_{c_m}^{c_n} \frac{\varrho \log x dx}{x^{1+\varrho}}$$

und wird, wenn n unendlich gross wird, zwischen den Grenzen

$$(\omega - \delta) \cdot \int_{c_m}^{\infty} \frac{\varrho \log x dx}{x^{1+\varrho}} \quad \text{und} \quad (\omega + \delta) \cdot \int_{c_m}^{\infty} \frac{\varrho \log x dx}{x^{1+\varrho}}$$

d. i. zwischen

$$(\omega \pm \delta) \cdot \frac{1 + \varrho \log c_m}{\varrho c_m^{\varrho}}$$

enthalten, also beliebig klein sein. Mit andern Worten: die rechte Seite der Gleichung (28) geht bei unendlich wachsendem n in eine convergente Reihe über. Da nun zugleich auf der linken Seite

$$\frac{A_n}{c_n^{\varrho}} = \frac{A_n}{\log c_n} \cdot \frac{\log c_n}{c_n^{\varrho}},$$

so lange ϱ ein, wenn auch noch so kleiner, doch positiver Werth ist, mit $n = \infty$ unendlich klein wird, ergiebt sich für $\lim_{n=\infty} S_n$ oder für die Dirichlet'sche Reihe (21) der endliche Werth

$$(30) \quad S = \frac{A_1}{\log h_1} \int_{c_1}^{c_2} \frac{\varrho \log x dx}{x^{1+\varrho}} + \frac{A_2}{\log h_2} \int_{c_2}^{c_3} \frac{\varrho \log x dx}{x^{1+\varrho}} + \cdots.$$

Unter der über die Ausdrücke $\frac{M_i}{c_i}$ und $\frac{M_i}{c_{i+1}}$ gemachten Annahme ist also die Dirichlet'sche Reihe (21) für jedes noch so kleine positive ϱ convergent.

Das Produkt ϱS aber convergirt, während die positive Grösse ϱ unendlich abnimmt, gegen die Grenze ω:

$$(31) \quad \lim_{\varrho=0} \varrho S = \omega.$$

Zum Beweise multipliciren wir die Gleichung (30) mit ϱ und schreiben sie dann, indem wir wie bei (29) einen anfänglichen Theil und den übrigen unterscheiden, folgendermassen:

$$\varrho S = \mathfrak{M} \cdot \varrho \int_{c_1}^{c_m} \frac{\varrho \log x\,dx}{x^{1+\varrho}} + \mathfrak{M}' \cdot \varrho \int_{c_m}^{\infty} \frac{\varrho \log x\,dx}{x^{1+\varrho}}$$

oder auch so:

$$(32)\quad \varrho S = \mathfrak{M}\left(\varrho \int_{c_1}^{\infty} \frac{\varrho \log x\,dx}{x^{1+\varrho}} - \varrho \int_{c_m}^{\infty} \frac{\varrho \log x\,dx}{x^{1+\varrho}}\right) + \mathfrak{M}' \cdot \varrho \int_{c_m}^{\infty} \frac{\varrho \log x\,dx}{x^{1+\varrho}},$$

wo dann $\mathfrak{M}'$ einen Mittelwerth aus den unendlich vielen Werthen

$$\frac{A_m}{\log h_m}, \qquad \frac{A_{m+1}}{\log h_{m+1}}, \qquad \frac{A_{m+2}}{\log h_{m+2}}, \quad \ldots$$

bedeutet, der sich wieder, wenn m hinreichend gross gedacht wird, von dem Grenzwerthe ω dieser Grössen nur um beliebig wenig unterscheiden und wenn wir hier m als veränderlich ansehen und unendlich wachsen lassen, diesem Grenzwerthe unendlich annähern wird. Wir wollen aber, während m unendlich wächst, gleichzeitig ϱ unendlich abnehmen lassen, doch so, dass $c_m^{\varrho} = e^{\varrho \log c_m}$ gegen 1 d. i. $\varrho \log c_m$ gegen 0 convergirt. Hierbei nähert sich dann

$$\varrho \int_{c_m}^{\infty} \frac{\varrho \log x\,dx}{x^{1+\varrho}} = \frac{1 + \varrho \log c_m}{c_m^{\varrho}}$$

ebenso wie

$$\varrho \int_{c_1}^{\infty} \frac{\varrho \log x\,dx}{x^{1+\varrho}} = \frac{1 + \varrho \log c_1}{c_1^{\varrho}}$$

bei unendlich abnehmendem ϱ der Grenze 1, während $\mathfrak{M}$ zwischen endlichen Grenzen verbleibt. Alles in allem giebt auf solche Weise die Formel (32) beim Uebergange zur Grenze $\varrho = 0$ das behauptete Resultat:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho S = \omega.$$

8. Nunmehr können wir ohne Mühe den Dirichlet'schen Satz beweisen. Er lautet so, wie ihn Dirichlet zuletzt ausgesprochen hat*), folgendermassen: Sind

*) S. Dirichlet, sur un théorème relatif aux séries, Crelle's Journal Bd. 53.

(33) $k_1, \; k_2, \; k_3, \; \ldots \; k_n, \ldots$

positive, mit wachsendem n über jede Grenze hinaus wachsende und der Grösse nach geordnete Constanten, sodass allgemein $k_n < k_{n+1}$ ist, von der Beschaffenheit, dass, wenn t eine stetig und über alle Grenzen wachsende positive Veränderliche und T die Anzahl der Constanten bedeutet, welche nicht grösser als t sind, das Verhältniss $\frac{T}{t}$ gegen eine Grenze $\omega > 0$ convergirt, so ist die unendliche Reihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^{1+\varrho}} \tag{34}$$

für jedes positive ϱ convergent und ϱS nähert sich bei unendlich abnehmendem ϱ gleichfalls der Grenze ω.

Wir bemerken zuvörderst, dass Dirichlet seinen Satz ursprünglich*) in einer etwas anderen und weniger allgemeinen Fassung ausgesprochen hat; statt nämlich die Voraussetzung so zu fassen, wie geschehen ist, dass $\frac{T}{t}$ mit unendlich abnehmendem t gegen eine Grenze ω convergire, formulirte er sie dahin, dass man setzen dürfe

$$T = \omega \cdot t + t^{\gamma} \cdot \psi(t),$$

wo γ ein positiver Werth < 1 und $\psi(t)$ eine Funktion sei, welche kleiner bleibe als ein endlicher Werth C. Man sieht, dass diese Voraussetzung unter der vorigen mitbegriffen ist, aber diese ist umfassender und würde z. B. auch zutreffen, wenn in der obigen Formel $\log t$ statt $\psi(t)$ gesetzt würde.

Um nun den Satz zu beweisen, bemerken wir weiter, dass sich in der Reihe (33) stets nur eine endliche Anzahl gleicher Werthe befinden kann. Denn, wären unendlich viel der Constanten von gleichem Werthe, so würde, wenn t dem letztern gleich gewählt wird, T unendlich gross und das Verhältniss $\frac{T}{t}$ von diesem Augenblicke an unendlich sein und bleiben, während es sich doch einem Grenzwerthe annähern

*) S. Dirichlet, recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Crelle's Journal, Bd. 19 u. 21.

soll. Hiernach werden wir also, wenn wir die Reihe (33) von Anfang an durchgehen, zunächst eine Anzahl m_1 von Grössen finden, welche gleichen Werth c_1 haben:

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_{m_1} = c_1,$$

dann m_2 Grössen von dem gemeinsamen Werthe $c_2 > c_1$:

$$k_{m_1+1} = k_{m_1+2} = \cdots = k_{m_1+m_2} = c_2,$$

darauf m_3 Grössen vom gemeinsamen Werthe $c_3 > c_2$:

$$k_{m_1+m_2+1} = \cdots = k_{m_1+m_2+m_3} = c_3$$

u. s. f.; sodass die Reihe (34) sich folgendermassen schreiben lässt:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i}{c_i^{1+\varrho}}$$

oder auch, wenn man

$$\frac{m_i}{c_i} = a_i \tag{35}$$

setzt, als eine Dirichlet'sche Reihe:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{c_i^{\varrho}},$$

für welche der oben mit M_i bezeichnete Ausdruck

$$M_i = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_i c_i$$

identisch ist mit

$$M_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_i .$$

Lässt man aber t von 0 an wachsen bis gegen c_1, so ist T constant gleich 0, wird gleich m_1, wenn t den Werth c_1 erreicht, und behält diesen Werth, während t gegen c_2 hin wächst; von $t = c_2$ an ist $T = m_1 + m_2$, so lange t den Werth c_3 noch nicht erreicht hat; von $t = c_3$ an wird $T = m_1 + m_2 + m_3$ und behält diesen Werth, so lange t noch nicht den Werth c_4 erreicht hat, u. s. w. Demgemäss wird allgemein der Quotient $\frac{T}{t}$, während t von c_i an gegen c_{i+1} hin wächst, vom Werthe

$$\frac{M_i}{c_i} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}{c_i}$$

an abnehmend gegen

$$\frac{M_i}{c_{i+1}} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}{c_{i+1}}$$

convergiren, und, indem t durch den Werth c_{i+1} hindurchgeht, unstetig zum Werthe

$$\frac{M_{i+1}}{c_{i+1}} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_i + m_{i+1}}{c_{i+1}}$$

überspringen. Soll also mit unendlich wachsendem t das Verhältniss $\frac{T}{t}$ gegen ω convergiren, so müssen auch alle diese Ausdrücke derselben Grenze näher und näher kommen, mit andern Worten:

$$\frac{M_i}{c_i} \quad \text{und} \quad \frac{M_i}{c_{i+1}}$$

müssen mit unendlich wachsendem Index i gegen ω convergiren. Dem vorigen Satze zufolge convergirt aber dann die Reihe S für jedes positive ϱ und $\lim_{\varrho=0} \varrho S$ ist ω, was zu beweisen war.

Hervorzuheben ist seiner späteren Verwendung wegen ein Specialfall des allgemeinen Dirichlet'schen Satzes, der sich so ausspricht:

Sind a, b zwei positive Werthe, so convergirt die Reihe

$$S' = \frac{1}{b^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}} + \cdots \tag{36}$$

für jedes positive ϱ und $\lim_{\varrho=0} \varrho S'$ ist $\frac{1}{a}$. Denn in diesem Falle bilden die Grössen

$$b, \quad a+b, \quad 2a+b, \quad 3a+b, \ldots$$

die Reihe (33); die stetig wachsende Grösse t kann man durch

$$t = na + b + \Theta a$$

darstellen, indem man n die Reihe der ganzen Zahlen, und für jeden Werth von n die Grösse Θ das Intervall von 0 bis 1 durchlaufen lässt. Der Quotient $\frac{T}{t}$ liegt dann für jedes bestimmte n zwischen $\frac{n+1}{na+b}$ und $\frac{n+1}{(n+1)a+b}$, welche beide mit unendlich wachsendem n gegen $\frac{1}{a}$ convergiren, sodass auch $\lim_{t=\infty} \frac{T}{t} = \frac{1}{a}$ ist.

9. Auf diesen Specialfall des allgemeinen Satzes hat Dirichlet seinen Beweis des letztern begründet; ursprünglich verwendete er dabei die Γ-Funktionen, sein späterer, sehr einfacher Beweis aber*) ist von ihnen unabhängig. Bei der grossen Wichtigkeit des Dirichlet'schen Satzes für die zahlentheoretischen Probleme, welche im Folgenden behandelt werden sollen, wollen wir der vorher gegebenen Herleitung desselben noch diesen Dirichlet'schen Beweis hier anfügen, was mit wenig Worten geschehen kann.

Es ist gezeigt worden, wie aus der Annahme, dass $\frac{T}{t}$ mit unendlich wachsendem t gegen ω convergirt, Gleiches sich auch ergiebt für die Verhältnisse $\frac{M_i}{c_i}$ und $\frac{M_i}{c_{i+1}}$ oder, was dasselbe ist, für die Verhältnisse $\frac{M_{i-1}}{c_i}$ und $\frac{M_i}{c_i}$ bei unendlich wachsendem Index i. Sei nun k_n eine derjenigen Constanten der Reihe (33), welche den gemeinsamen Werth c_i haben; ist es die letzte von ihnen, so ist

$$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$$

und folglich

$$\frac{n}{k_n} = \frac{M_i}{c_i};$$

ist es nicht die letzte, so ist n zwischen M_{i-1} und M_i enthalten, also

$$\frac{n}{k_n} \quad \text{zwischen} \quad \frac{M_{i-1}}{c_i} \quad \text{und} \quad \frac{M_i}{c_i},$$

und folglich nähert sich auf alle Fälle auch $\frac{n}{k_n}$ bei unendlich wachsendem n der Grenze ω, sodass man für alle n, welche gleich oder grösser sind als eine hinreichend grosse Zahl ν

$$\omega - \delta < \frac{n}{k_n} < \omega + \delta$$

setzen kann, wo δ beliebig klein ist. Hieraus ergiebt sich allgemeiner

*) In der obengenannten Abhandlung in Crelle's Journal, Bd. 53.

$$(37)\quad (\omega-\delta)^{1+\varrho}\cdot\sum_{\nu}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}}<\sum_{\nu}^{\infty}\frac{1}{k_n^{1+\varrho}}<(\omega+\delta)^{1+\varrho}\cdot\sum_{\nu}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Diese Ungleichheiten zeigen zunächst, dass

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k_n^{1+\varrho}}$$

für jeden positiven Werth von ϱ zugleich mit der Reihe $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}}$ convergirt. — Die Summe

$$(38)\qquad \sum_{\nu}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

ist aber offenbar nur der besondere Fall der Reihe (36), welcher den Werthen $a=1$, $b=\nu$ entspricht. Wenn man also jetzt, wie Dirichlet es thut, den Specialfall des allgemeinen Satzes beweist, so geht aus ihm der Beweis dieses letztern unmittelbar mittels der Ungleichheiten (37) hervor. Wir ziehen hier vor, die Methode Dirichlet's direkt auf die Summe (38) anzuwenden und so den Specialfall zugleich mit dem allgemeinen zu begründen.

Das Integral

$$\int_{\nu}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\varrho}}=\frac{1}{\varrho\nu^{\varrho}}$$

können wir auch als unendliche Reihe schreiben:

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x^{1+\varrho}}.$$

Da aber $\frac{1}{x^{1+\varrho}}$ von der untern zur obern Grenze hin abnimmt, so ist das Integral unter dem Summenzeichen kleiner als $\frac{1}{n^{1+\varrho}}$ und man findet daher sogleich die erste Ungleichheit:

$$(39a)\qquad \frac{1}{\varrho\nu^{\varrho}}<\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}};$$

das Integral unter dem Summenzeichen ist aber andererseits grösser als $\frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}}$ und demnach findet sich zweitens:

$$\frac{1}{\varrho\, \nu^{\varrho}} > \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}}$$

d. i.

$$\frac{1}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{1}{\varrho\, \nu^{\varrho}} > \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}}. \tag{39b}$$

Hieraus entstehen die beiden Ungleichheiten:

$$\frac{1}{\nu^{\varrho}} < \varrho \cdot \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}} < \frac{1}{\nu^{\varrho}} + \frac{\varrho}{\nu^{1+\varrho}},$$

aus denen, wenn ϱ unendlich klein wird, sich

$$\text{lim. } \varrho \sum_{\nu}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}} = 1$$

ergiebt. Geht man folglich auch in den Ungleichheiten (37) zur Grenze $\varrho = 0$ über, so findet sich aus ihnen mittels dieses Resultates offenbar, dass der Ausdruck

$$\varrho \sum_{\nu}^{\infty} \frac{1}{k_n^{1+\varrho}}$$

für jedes hinreichend kleine ϱ zwischen den Grenzen

$$\omega - \varepsilon \quad \text{und} \quad \omega + \varepsilon$$

enthalten sein wird, wo ε, wie vorher δ, einen beliebig kleinen Werth bedeutet; und da ersichtlicherweise

$$\varrho \sum_{1}^{\nu-1} \frac{1}{k^{1+\varrho}}$$

mit unendlich abnehmendem ϱ unendlich klein wird, erhält man, wie zu beweisen war,

$$\text{lim. } \varrho \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varrho}} = \omega.$$

Vierter Abschnitt.

Der Satz von der arithmetischen Progression.

1. In diesem Abschnitte werden wir den schon ausgesprochenen Satz von der arithmetischen Progression nach Dirichlet's Vorgange beweisen. Er gehört zu den vielen zahlentheoretischen Sätzen, welche zwar leicht durch eine fortgesetzte Induction sich auffinden liessen, deren Beweis aber nur einer tiefen Ergründung aus allgemeineren Principien gelang und so zur Quelle neuer wichtiger Entdeckungen ward. Theilt man in der That die auf einander folgenden Primzahlen durch einen gegebenen Divisor M, so wird man finden, dass — abgesehen von der endlichen Menge der Primzahlen, aus welchen M besteht — unter den Resten derselben jeder zu M prime Rest N (mod. M) fort und fort sich wieder einstellen wird, ja sogar, dass das Verhältniss der Zahlen, welche für irgend zwei solche Reste angeben, wie oft sie bis zu einer gewissen Primzahl hin erschienen sind, bei stets weiterem Fortgange in der Reihe der letzteren die Einheit zur Grenze hat; mit andern Worten: es stellt sich das Gesetz heraus, dass eine arithmetische Progression $Mx + N$, in welcher M, N ohne gemeinsamen Theiler sind, unendlich viele Primzahlen enthält, sowie, dass die Primzahlen auf die verschiedenen arithmetischen Progressionen dieser Art sich annähernd gleich vertheilen.

Indem wir von dem zweiten Theile dieses Inductionsgesetzes hier absehen wollen, setzen wir nunmehr die Methode auseinander, durch welche Dirichlet die Richtigkeit des ersten Theils desselben strenge bewiesen hat. Es genügt, wie leicht zu sehen, den Fall eines ungeraden N zu betrachten und den

behaupteten Satz für die arithmetische Progression $8Mx + N$ zu beweisen, in welcher $8M$ und N (also auch M und N) relativ prim sind, denn, wenn diese Progression für alle Werthe $x = y_1, y_2, y_3, \ldots$ Primzahlen darstellt, so stellt die Progression $Mx + N$ dieselben Primzahlen dar, wenn man $x = 8y_1$, $8y_2$, $8y_3$, ... wählt. Der grösseren Einfachheit wegen beschränken wir uns also auf solche Progressionen, bei denen die sogenannte „Differenz" durch 8 theilbar ist. Nennen wir diese Progression wieder einfach

$$Mx + N, \tag{1}$$

so wird M, in Primzahlpotenzen zerlegt, die Form haben:

$$M = 2^c \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots, \tag{2}$$

worin $c \geqq 3$ ist, und μ mag die Anzahl der verschiedenen ungeraden Primfaktoren $p_1, p_2, p_3, \ldots$ bedeuten.

Der Weg, welchen Dirichlet einschlug, um den genannten Satz zu beweisen, war schon von Euler betreten worden, indem dieser aus seiner Formel (20) S. 11 auf die Existenz von unendlich vielen Primzahlen schloss. Lässt man nämlich in dieser für jedes $s > 1$ bestehenden Gleichung s gegen 1 convergiren, so würde das Produkt, falls die Anzahl aller Primzahlen nur eine endliche wäre, nothwendig endlich verbleiben, während doch die Summe auf der rechten Seite der Gleichung dann über jeden Werth hinaus wächst.

2. Indem wir nun diesen Weg weiter verfolgen wollen, schicken wir zunächst eine Betrachtung voraus, welche dabei vonnöthen und später in ähnlicher Weise zu wiederholen ist. Aus den Elementen der Zahlentheorie ist bekannt*), dass, wenn $g_1, g_2, \ldots$ primitive Wurzeln für die Moduln $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots$ bedeuten und man setzt

$$\omega_1 = \varphi(p_1^{\alpha_1}), \qquad \omega_2 = \varphi(p_2^{\alpha_2}), \cdots$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\varphi(2^c) = 2^{c-2},$$

für jede zu M relativ prime Zahl n folgende Congruenzen stattfinden werden:

(3) $n \equiv (-1)^\alpha 5^\lambda \pmod{2^c}$, $n \equiv g_1^{\nu_1} \pmod{p_1^{\alpha_1}}$, $n \equiv g_2^{\nu_2} \pmod{p_2^{\alpha_2}} \cdots$

*) S. z. B. meine Elemente der Zahlentheorie S. 100–102.

worin $\nu_1, \nu_2, \ldots$ je eine bestimmte Zahl der Reihen

$$0, 1, 2, \ldots \varpi_1 - 1; \quad 0, 1, 2, \ldots \varpi_2 - 1; \cdots$$

α eine bestimmte der beiden Zahlen 0, 1 und λ eine bestimmte Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots \gamma - 1$ bezeichnen. Diese Zahlen $\alpha, \lambda, \nu_1, \nu_2, \ldots$ heissen die Indices der Zahl n.

Bezeichnen nun ferner $\theta, \eta, \omega_1, \omega_2, \ldots$ irgendwelche Wurzeln der Gleichungen

$$(4) \qquad \theta^2 = 1, \quad \eta^\gamma = 1, \quad \omega_1^{\varpi_1} = 1, \quad \omega_2^{\varpi_2} = 1, \cdots,$$

so wollen wir

$$(5) \qquad \chi(n) = \theta^\alpha \eta^\lambda \omega_1^{\nu_1} \omega_2^{\nu_2} \cdots$$

setzen und einen Charakter der Zahl n nennen. Solcher Charaktere giebt es demnach für jede Zahl so viel, als es verschiedene Combinationen der möglichen Wurzeln giebt, nämlich

$$(6) \qquad 2\gamma\, \varpi_1 \varpi_2 \cdots = \varphi(M).$$

Welche Combination $\theta, \eta, \omega_1, \omega_2, \ldots$ wir aber auch betrachten, stets ist für jedes Paar zu M relativ primer Zahlen n, n' die Gleichung

$$(7) \qquad \chi(n) \cdot \chi(n') = \chi(nn')$$

erfüllt. Denn sind $\alpha', \lambda', \nu_1', \nu_2', \ldots$ die Indices von n', so ist einerseits

$$\chi(n') = \theta^{\alpha'} \eta^{\lambda'} \omega_1^{\nu_1'} \omega_2^{\nu_2'} \cdots,$$

andererseits sind

$$\alpha + \alpha', \quad \lambda + \lambda', \quad \nu_1' + \nu_1, \quad \nu_2' + \nu_2, \cdots$$

den Indices von nn' nach den Moduln $2, \gamma, \varpi_1, \varpi_2, \ldots$ resp. congruent und demnach

$$\chi(nn') = \theta^{\alpha+\alpha'} \cdot \eta^{\lambda+\lambda'} \cdot \omega_1^{\nu_1+\nu_1'} \cdot \omega_2^{\nu_2+\nu_2'} \cdots.$$

Sind dagegen $\theta, \eta, \omega_1, \omega_2, \ldots$ und $\theta', \eta', \omega_1', \omega_2', \ldots$ zwei Wurzelcombinationen, die auch identisch sein können, so entsteht daraus stets eine ganz bestimmte dritte nach den Gleichungen:

$$\theta\theta' = \theta'', \quad \eta\eta' = \eta'', \quad \omega_1\omega_1' = \omega_1'', \quad \omega_2\omega_2' = \omega_2'', \cdots$$

d. h. zwei Charaktere $\chi(n)$, $\chi'(n)$ setzen sich stets nach der Formel

(8) $$\chi(n) \cdot \chi'(n) = \chi''(n),$$

welche dann für jede zu M prime Zahl n gilt, zu einem dritten Charakter zusammen. Wir wollen denjenigen Charakter, welcher den Wurzeln

$$\theta = 1, \quad \eta = 1, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1, \cdots$$

entspricht, den Hauptcharakter nennen; er hat offenbar für jede der Zahlen n den Werth 1. Setzen sich zwei Charaktere zum Hauptcharakter zusammen, so sollen sie entgegengesetzte Charaktere heissen. Soll ein Charakter ambige d. i. sich selbst entgegengesetzt sein, so muss für jede der Zahlen n d. i. für jedes der zulässigen Werthsysteme $\alpha, \lambda, \nu_1, \nu_2, \ldots$

$$\theta^{2\alpha} \cdot \eta^{2\lambda}\, \omega_1^{2\nu_1}\, \omega_2^{2\nu_2} \cdots = 1$$

sein, woraus, indem man successive jede der Zahlen $\alpha, \lambda, \nu_1, \nu_2, \ldots$ gleich 1, die übrigen gleich 0 wählt, sofort sich ergiebt, dass die sämmtlichen ambigen Charaktere, einschliesslich des Hauptcharakters, erhalten werden, indem man

$$\theta = \pm 1, \quad \eta = \pm 1, \quad \omega_1 = \pm 1, \quad \omega_2 = \pm 1, \cdots$$

wählt. Da die sämmtlichen Exponenten in den Gleichungen (4) gerade sind, hat jede von ihnen die beiden Wurzeln ± 1; demnach ist die Anzahl aller ambigen Charaktere, einschliesslich des Hauptcharakters, gleich $2^{\mu+2}$. Für alle übrigen Charaktere ist also mindestens eine der Wurzeln $\theta, \eta, \omega_1, \omega_2, \ldots$ imaginär und deshalb nennen wir auch diese Charaktere imaginär; der Charakter, welcher dem conjugirten Wurzelsysteme $\theta^{-1}, \eta^{-1}, \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}, \ldots$ entspricht, soll dem zum ersteren gehörigen Charakter conjugirt heissen. Conjugirte Charaktere sind stets von einander verschieden. —

Wir bemerken schliesslich noch drei wichtige Formeln.

1) Da Zahlen, welche (mod. M) congruent sind, die gleichen Indices haben, so muss für jeden Charakter

(9) $\chi(n) = \chi(n')$ sein, wenn $n \equiv n' \pmod{M}$.

2) Da andererseits, wenn n alle Glieder eines reducirten Restsystemes (mod. M) durchläuft, die Indices $\alpha, \lambda, \nu_1, \nu_2, \ldots$ alle ihre zulässigen Werthe durchlaufen, so wird für jeden Charakter die Gleichung bestehen:

$$\sum_n \chi(n) = \sum \theta^\alpha \eta^\lambda \omega_1^{\nu_1} \omega_2^{\nu_2} \dots,$$

letztere Summe über alle jene Werthe erstreckt, d. i. gleich dem Produkte:

$$\begin{aligned}
&(1 + \theta) \\
&\cdot (1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{\gamma-1}) \\
&\cdot (1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \cdots + \omega_1^{\varpi_1 - 1}) \\
&\cdot (1 + \omega_2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_2^{\varpi_2 - 1}) \\
&\cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

Sind aber nicht sämmtliche Wurzeln θ, η, ω_1, ω_2, ... gleich 1, so wird mindestens einer der Faktoren gleich Null und somit ergiebt sich der Satz:

Für jeden Charakter mit Ausnahme des Hauptcharakters ist die auf ein reducirtes Restsystem (mod. M) bezogene Summe

$$\sum_n \chi(n) = 0; \tag{10}$$

für den Hauptcharakter dagegen ist nach (6)

$$\sum_n \chi(n) = \varphi(M). \tag{10a}$$

3) Wir bilden endlich die Summe

$$\sum \theta^\alpha \eta^\lambda \omega_1^{\nu_1} \omega_2^{\nu_2} \cdots$$

auf alle Charaktere oder Wurzelcombinationen bezogen. Erinnern wir hierzu daran, dass sämmtliche Wurzeln einer Gleichung $x^m = 1$ durch

$$1, \ \omega, \ \omega^2, \ \dots \ \omega^{m-1}$$

ausgedrückt werden, wenn $\omega = \cos\frac{2\pi}{m} + i \sin\frac{2\pi}{m}$ gesetzt wird; demnach wird die Summe ihrer h^{ten} Potenzen gleich

$$1 + \omega^h + \omega^{2h} + \cdots + \omega^{(m-1)h} = \frac{\omega^{mh} - 1}{\omega^h - 1}$$

und daher, wenn $h < m$ ist, immer Null sein, mit Ausnahme des Falles $h = 0$, wo sie gleich m ist. In Anwendung hiervon wird jene Summe, welche gleich

$$\sum_{\theta} \theta^{\alpha} \cdot \sum_{\eta} \eta^{\lambda} \cdot \sum_{\omega_1} \omega_1^{\nu_1} \cdot \sum_{\omega_2} \omega_2^{\nu_2} \ldots$$

gesetzt werden kann, stets verschwinden, wenn nicht sämmtliche Indices α, λ, ν_1, ν_2, ... Null sind. Und hieraus folgt der Satz: Für jede der Zahlen n ist die auf alle Charaktere bezogene Summe

$$\sum_{\chi} \chi(n) = 0, \tag{11}$$

mit Ausnahme derjenigen Zahlen n, deren Indices sämmtlich gleich Null sind d. i. welche $\equiv 1 \pmod{M}$ sind, für welche

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \varphi(M) \tag{11a}$$

ist. —

3. Setzen wir nunmehr

$$f(n) = \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{12}$$

so besteht, da $\chi(1)$ gleich 1 ist, die Gleichung

$$f(1) = 1, \tag{13}$$

sowie auch, der Formel (7) gemäss, für je zwei Zahlen n, n' welche zu M relativ prim sind, und für jeden Charakter die Gleichung

$$f(n) f(n') = f(nn'). \tag{14}$$

Endlich ist die unendliche Reihe

$$\sum_{n} f(n) = \sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{15}$$

worin n alle positiven, zu M primen Zahlen erhalten soll, unbedingt convergent, so lange die hier reell vorausgesetzte Grösse $s > 1$ ist, da ihre Modulreihe nur ein Theil der alsdann convergenten Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist. Diese Aussage über die Reihe (15) lässt sich sogar vervollständigen, indem man hinzufügen darf: sie ist eine stetige Funktion von s für jedes $s > 1$, denn sie ist eine Reihe gleich der Reihe (7) vorigen Abschnittes, falls man in dieser

$$a_n = 0 \quad \text{oder} \quad a_n = \chi(n)$$

setzt, je nachdem n mit M einen gemeinsamen Theiler hat oder nicht; in der That ist dann mod. a_n stets < 1 und der dortige Satz (in Nr. 3) über die Reihe (7) ist anwendbar.

Aus dem Gesagten folgen aber nach Nr. 5 des 1. Abschnittes nachstehende beide Gleichungen:

$$\prod_q \frac{1}{1 - \frac{\chi(q)}{q^s}} = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{16}$$

und

$$\sum_q \frac{\chi(q)}{q^s} + \frac{1}{2}\sum_q \frac{\chi(q^2)}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_q \frac{\chi(q^3)}{q^{3s}} + \cdots = \log \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{17}$$

in denen die Operationen links über alle von $2, p_1, p_2, \ldots$ verschiedenen Primzahlen q, rechts über alle zu M primen positiven Zahlen n zu erstrecken sind.

Es wird sich wesentlich darum handeln, zu untersuchen, wie sich die Reihe (15) verhält, wenn s dem Werthe 1 oder, indem man $s = 1 + \varrho$ setzt, wenn die positive Veränderliche ϱ der Grenze 0 unendlich sich annähert. Die Antwort auf diese Frage lautet aber sehr verschieden, je nach dem besonderen Charakter, welcher unter $\chi(n)$ verstanden wird. Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

1) wenn $\chi(n)$ der Hauptcharakter also für jede der Zahlen n gleich 1 ist; die entsprechende Reihe (15) heisse R_1, sodass

$$R_1 = \sum_n \frac{1}{n^{1+\varrho}} \tag{18}$$

ist, die Summation auf alle positive ganze Zahlen n erstreckt, welche zu M prim sind;

2) wenn $\chi(n)$ einer der übrigen ambigen Charaktere ist; diese Reihen der zweiten Kategorie mögen R_2 heissen; sie sind also von der Form:

$$R_2 = \sum_n \frac{(\pm 1)^{\alpha} \cdot (\pm 1)^{\beta} \cdot (\pm 1)^{\gamma_1} \cdot (\pm 1)^{\gamma_2} \cdots}{n^{1+\varrho}}, \tag{19}$$

worin die Vorzeichen irgend eine der möglichen Combinationen derselben darstellen, ausgenommen diejenige, wo sie sämmtlich positiv sind; die Anzahl dieser Reihen ist also $2^{\mu+2} - 1$;

3) wenn $\chi(n)$ einen der imaginären Charaktere bezeichnet. Diese Reihen der dritten Kategorie mögen R_3 heissen.

4. Die Untersuchung der Reihen der zweiten Kategorie bot Dirichlet anfangs die grösste Schwierigkeit, die zu überwinden ihm nur durch indirecte und ziemlich complicirte Betrachtungen gelang; später erst überzeugte er sich, dass sich das Ziel auf anderem Wege viel kürzer erreichen lasse: durch eine eigenthümliche Umformung des allgemeinen Gliedes der Reihe (19) stellt sich nämlich ein inniger Zusammenhang derselben mit einer ganz anderen Frage heraus, zu deren Erledigung Dirichlet eben dadurch veranlasst worden ist, nämlich mit der Bestimmung der Anzahl von Classen äquivalenter quadratischer Formen für eine gegebene Determinante. Diese Umformung ist die folgende:

Wir wollen die verschiedenen ungeraden Primfaktoren, aus denen M zusammengesetzt ist, in zwei Arten unterscheiden, in diejenigen nämlich, welchen in R_2 die Wurzel $+1$, und diejenigen, welchen die Wurzel -1 entspricht; das Produkt jener heisse S, das der letzteren P; P resp. S würde durch 1 zu ersetzen sein, wenn die Anzahl der bezüglichen Primfaktoren Null wäre; falls θ und η beide $+1$ sind, wird P mindestens einen Primfaktor enthalten, also von 1 verschieden sein. Dies vorausgeschickt, sei p_1 einer der Primfaktoren von P, dann ist g_1 als primitive Wurzel (mod. $p_1^{\alpha_1}$) auch eine primitive Wurzel von p_1; wegen der Congruenz $n \equiv g_1^{\nu_1} \pmod{p_1^{\alpha_1}}$ wird also $\left(\frac{n}{p_1}\right) = +1$ sein, je nachdem ν_1 gerade oder ungerade ist, also $\left(\frac{n}{p_1}\right) = (-1)^{\nu_1}$, und ähnliches gilt für die übrigen Primfaktoren von P. Ferner aber folgt aus der ersten der Congruenzen (3)

$$n \equiv (-1)^{\alpha} \cdot 5^{\lambda} \pmod{8}$$

und, da $5^{\lambda} \equiv 5$ oder $5^{\lambda} \equiv 1 \pmod{8}$ ist, je nachdem λ ungerade oder gerade ist, so findet man

$n \equiv 1 \pmod{8}$, wenn α gerade, λ gerade
$n \equiv 5$ „ „ α gerade, λ ungerade
$n \equiv 7$ „ „ α ungerade, λ gerade
$n \equiv 3$ „ „ α ungerade, λ ungerade

ist, also

$$(-1)^{\alpha} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (-1)^{\lambda} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}.$$

Man erschliesst hieraus allgemein

$$\theta^{\alpha} \cdot \eta^{\lambda} = \theta^{\frac{n-1}{2}} \cdot \eta^{\frac{n^2-1}{8}}$$

und folglich als allgemeines Glied der Reihe (19) den Ausdruck

$$\theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{n}{P}\right) \cdot \frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Setzen wir nun

$$D = \pm PS^2 \quad \text{oder} \quad D = \pm 2PS^2,$$

je nachdem

$$\eta = +1 \quad \text{oder} \quad \eta = -1$$

ist, und wählen dann das Vorzeichen so, dass

$$\pm P \equiv 1 \quad \text{oder} \quad \pm P \equiv 3 \pmod 4$$

ist, je nachdem

$$\theta = 1 \quad \text{oder} \quad \theta = -1$$

ist, so stimmt die Bedeutung der Zeichen θ, η vollkommen mit derjenigen überein, welche den Zeichen δ, ε resp. in Nr. 1 des vorigen Abschnittes beigelegt worden ist, und wenn man bedenkt, dass offenbar die Zahlen n, welche zu M prim d. h. durch die Primfaktoren von P und S und durch die Zahl 2 nicht theilbar sind, mit den relativen Primzahlen zu $2D$ übereinstimmen, so findet man mit Rücksicht auf die dortige Gleichung (5)

$$\theta^{\frac{n-1}{2}} \cdot \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{D}{n}\right)$$

und die Summe (19) geht über in die folgende:

$$R_2 = \sum_n \left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^{1+\varrho}}, \tag{20}$$

welche sich über die genannten Zahlen n, nämlich über alle zu $2D$ primen positiven ganzen Zahlen erstreckt. —

Für die Reihen der ersten und zweiten Kategorie sind wir nun schon im Stande, die in vor. Nr. gestellte Frage zu beantworten.

Was zunächst die Reihe R_1 anlangt, so werden wir diese, für jedes positive ϱ unbedingt convergente Reihe in $\varphi(M)$ Theilreihen zerlegen können von der Gestalt

$$\sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(Mz+m)^{1+\varrho}},$$

welche sämmtlich erhalten werden, wenn man m die relativen Primzahlen zu M, die kleiner sind als M, annehmen lässt. Jede solche Theilreihe, mit ϱ multiplicirt, wird aber nach dem Specialfalle des Dirichlet'schen Satzes (Formel (36) vor. Abschn.) bei unendlich abnehmendem ϱ gegen die Grenze $\frac{1}{M}$ convergiren, und somit findet sich die Gleichung:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho R_1 = \frac{\varphi(M)}{M}. \tag{21}$$

Für die Reihe (20) aber finden wir mit Hilfe von Formel (18) vor. Abschn. die Gleichung

$$\lim_{\varrho=0} R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}, \tag{22}$$

in welcher die Summation zur Rechten über alle positiven ganzen Zahlen n, aber in der natürlichen Reihenfolge, erstreckt werden darf, wenn man wieder übereinkommt, das Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{D}{n}\right) = 0$ zu setzen, so oft n und $2D$ einen gemeinsamen Theiler haben. Für die Dirichlet'sche Untersuchung ist es nun wesentlich, festzustellen, dass dieser Grenzwerth der Reihen der zweiten Kategorie von Null verschieden ist. Wir werden diesen Nachweis bei der Bestimmung der schon genannten Classenanzahl führen und nehmen dies Resultat behufs der jetzigen Untersuchung hier vorweg.

5. Sei nun endlich

$$R_3 = \sum \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}} \tag{23}$$

eine Reihe der dritten Kategorie, sodass von den Einheitswurzeln θ, η, ω_1, ω_2, ... wenigstens eine imaginär ist. Setzt man dann statt des imaginären Charakters $\chi(n)$ den dazu

conjugirten, so erhält man eine zweite, von R_3 verschiedene Reihe der dritten Kategorie, welche R_3' heisse; offenbar ist sie conjugirt imaginär zu R_3.

Diese Reihen der dritten Kategorie sind sämmtlich Dirichlet'sche Reihen von der unter Nr. 5 vor. Abschn. betrachteten Art. Versteht man nämlich wieder unter a_n, je nachdem n relativ prim ist zu M oder nicht, den Werth $\chi(n)$ oder 0, so nimmt (23) die Gestalt an

$$R_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varrho}}. \tag{24}$$

Ferner aber ist mit Rücksicht auf (9)

$$a_{n'} = a_n, \quad \text{so oft} \quad n' \equiv n \pmod{M} \quad \text{ist;} \tag{25}$$

und endlich ergiebt sich aus (10), da der Charakter $\chi(n)$ vom Hauptcharakter verschieden ist, die Gleichung

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_M = 0.$$

Ist daher $n \equiv r \pmod{M}$, wo r den kleinsten positiven Rest von n bedeutet, so folgt hieraus mit Rücksicht auf (25) allgemein

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r = A_r$$

und folglich bleibt für die Reihe (24) die Summe A_n stets kleiner als die grösste der Summen $A_1, A_2, \ldots A_{M-1}$. Hiermit können wir auf die Reihe (24) d. i. auf jede Reihe der dritten Art den Satz der angezogenen Nr. anwenden und aussagen: Jede Reihe der dritten Art ist eine stetige Funktion von $s = 1 + \varrho$ für jeden positiven Werth von s, und ihre Ableitung nach s ist es auch.

Hieraus fliesst

$$\lim_{\varrho=0} R_3 = \sum_n \frac{\chi(n)}{n}.$$

Zwei Fälle nur sind denkbar: entweder ist dieser Grenzwerth von Null verschieden, oder er ist Null.

Gesetzt der zweite Fall fände statt; wenn wir

$$R_3 = \varphi(s) + i\psi(s)$$

also

$$R_3' = \varphi(s) - i\psi(s)$$

setzen, so sind dem eben Bemerkten zufolge nicht nur $\varphi(s)$ und $\psi(s)$, sondern auch $\varphi'(s)$ und $\psi'(s)$ stetige Funktionen von s für jedes positive s, und nach der Voraussetzung müsste

$$\lim_{\varrho=0} R_3 = \varphi(1) + i\psi(1) = 0$$

also auch

$$\varphi(1) = 0, \quad \psi(1) = 0$$

sein. Für einen sehr kleinen positiven Werth von ϱ fände man dann

$$R_3 = \varrho\,[\varphi'(1 + \delta\varrho) + i\psi'(1 + \varepsilon\varrho)]$$
$$R_3' = \varrho\,[\varphi'(1 + \delta\varrho) - i\psi'(1 + \varepsilon\varrho)],$$

wo δ, ε positive echte Brüche bezeichnen, also

$$R_3 \cdot R_3' = \varrho^2\,[\varphi'(1 + \delta\varrho)^2 + \psi'(1 + \varepsilon\varrho)^2]$$

oder

$$\lim_{\varrho=0} \frac{R_3 R_3'}{\varrho^2} = \varphi'(1)^2 + \psi'(1)^2, \tag{26}$$

ein Grenzwerth, der jedenfalls nicht negativ ist.

Auf Grund hiervon lässt sich beweisen, dass von jenen beiden denkbaren Fällen nur der erste eintreten kann. Zu diesem Zwecke knüpfen wir an die Gleichung (17) an, die wir uns für irgend einen der Charaktere aufgestellt denken. Unter N werde irgend eine zu M prime Zahl verstanden; genügt dann N' der Congruenz $NN' \equiv 1 \pmod{M}$, so wird $\chi(NN') = \chi(1)$ d. h.

$$\chi(N) \cdot \chi(N') = 1 \tag{27}$$

sein. Wir multipliciren dann die Gleichung (17) mit $\chi(N')$ und addiren über sämmtliche Charaktere; so entsteht die Gleichung

$$\sum_q \left(\frac{1}{q^s} \sum_\chi \chi(N'q)\right) + \frac{1}{2} \sum_q \left(\frac{1}{q^{2s}} \sum_\chi \chi(N'q^2)\right) + \cdots$$
$$= \sum_\chi \chi(N') \log \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{28}$$

in welcher nach (11) im ersten Gliede der linken Seite nur diejenigen Primzahlen verbleiben, für welche $N'q \equiv 1$ oder $q \equiv N \pmod{M}$ ist, im zweiten Gliede nur diejenigen Primzahlen q, für welche $N'q^2 \equiv 1$ oder $q^2 \equiv N \pmod{M}$ ist u. s. w.; und mit Rücksicht auf (11a) nimmt die Gleichung folgende einfachere Form an:

$$(29)\quad \varphi(M)\cdot\Big[\sum_q \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum_q \frac{1}{q^{2s}} + \cdots\Big] = \sum_\chi \chi(N')\cdot \log \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s},$$

in welcher die Summationen links der Reihe nach sich über diejenigen Primzahlen erstrecken, deren erste, zweite, dritte Potenzen u. s. w. (mod. M) congruent N, oder Zahlen der arithmetischen Progression $Mx + N$ sind.

6. Wir betrachten insbesondere den Fall, wo N also auch $\chi(N)$ und $\chi(N')$ gleich 1 sind. In diesem Falle lautet die Gleichung (29) so:

$$(30)\quad \varphi(M)\cdot\Big[\sum_q \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum_q \frac{1}{q^{2s}} + \cdots\Big] = \sum_\chi \Big(\log \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}\Big)\cdot$$

Indem man aber bei der Summation zur Rechten die drei oben unterschiedenen Arten von Reihen für sich zusammenhält, kann man die rechte Seite folgendermassen schreiben:

$$(31)\qquad \log R_1 + \sum \log R_2 + \sum \log R_3 R_3',$$

die erste Summe auf alle Reihen R_2 der zweiten Art, die zweite Summe auf alle Paare von je zwei conjugirt imaginären Reihen der dritten Art erstreckt*). Und mit Hilfe der so geschriebenen Gleichung wollen wir nun den Nachweis führen, dass der Grenzwerth jeder Reihe der dritten Art für ein unendlich abnehmendes positives ϱ von Null verschieden ist.

Nehmen wir an, für p conjugirte Paare solcher Reihen sei der Grenzwerth im Gegentheil Null. Der für ein solches Paar erschlossenen Formel (26) gemäss werden wir für jedes jener Paare setzen dürfen:

$$\log R_3 R_3' = -2\log\frac{1}{\varrho} + \log L,$$

wo L bei unendlich abnehmendem ϱ gegen einen endlichen positiven Werth (inclusive Null) convergirt, $\log L$ also sicherlich nicht $+\infty$ wird; für jene p Paare erhalten wir also

$$\sum \log R_3 R_3' = -2p\log\frac{1}{\varrho} + \log L',$$

wo für $\log L'$ dasselbe gilt, und diese Gleichung bleibt sogar

*) Die Logarithmen bedeuten hier überall ihre reellen Werthe.

bestehen, wenn die Summation auch über diejenigen Paare mit erstreckt wird, deren Grenzwerth von Null verschieden ist, für welche also $R_3 R_3'$ gegen einen endlichen positiven Werth convergirt.

Weiter haben wir aber bereits bemerkt, wenn der Beweis dafür auch erst später erbracht werden wird, dass jede Reihe R_2 gegen einen endlichen von Null verschiedenen Werth und daher $\log R_2$ gegen einen endlichen Werth convergirt. Und endlich folgt aus (21)

$$\log R_1 = \log \frac{1}{\varrho} + \log L'',$$

wo $\log L''$ endlich bleibt, so dass schliesslich der ganze Ausdruck (31) folgendermassen geschrieben werden kann:

$$-(2p-1)\log\frac{1}{\varrho} + R,$$

wo R bei unendlich abnehmendem ϱ jedenfalls nicht $+\infty$ wird. Die rechte Seite der Formel (30) würde also, wenn ϱ positiv unendlich klein wird, negativ unendlich werden, während die linke Seite, wie klein ϱ auch sei, nicht aufhört, wesentlich positiv zu sein. Aus diesem Widerspruch folgt aber die Richtigkeit der Behauptung.

7. Kehren wir nunmehr zur allgemeinen Gleichung (29) wieder zurück. Dem bisher Bewiesenen zufolge wird rechts jeder Logarithmus gegen einen endlichen Werth convergiren, wenn ϱ unendlich klein wird, mit alleiniger Ausnahme des Gliedes, welches dem Hauptcharakter entspricht, nämlich des Gliedes $\log R_1$, welches unendlich wächst. Wird aber somit bei unendlicher Abnahme von ϱ die rechte Seite unendlich, so muss dasselbe gelten von der linken. Nun ist jedoch offenbar der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\sum_q \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_q \frac{1}{q^{3s}} + \cdots,$$

wie klein ϱ auch werde, kleiner als der folgende:

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m^2} + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{m^3} + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{m^4} + \cdots,$$

in welchem die Summationen, statt nur über die in den vorigen Summen in Betracht kommenden Primzahlen, viel-

mehr über alle positiven ganzen Zahlen $m \geq 2$ sich erstrecken, d. i. kleiner als

$$\frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}{}' \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}.$$

Hieraus ist zu schliessen, dass bei unendlich abnehmendem ϱ die erste Summe zur Linken:

$$\sum_{q}{}' \frac{1}{q^s}$$

unendlich wachsen muss, was nicht geschehen könnte, wenn sie nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestände.

Also: es giebt unendlich viel Primzahlen q, deren erste Potenz nach dem Modulus M congruent N ist, oder: in der arithmetischen Progression $Mx + N$, in welcher M, N zwei Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, giebt es unendlich viel Primzahlen.

Fünfter Abschnitt.

Die Classenanzahl quadratischer Formen. — Grundformel.

1. Es ist bereits erwähnt worden, dass Dirichlet durch seine Behandlung der Aufgabe von der arithmetischen Progression veranlasst worden ist, die bei derselben angewandten analytischen Grundsätze auch für andere zahlentheoretische Aufgaben, insbesondere für die Bestimmung der Anzahl nicht äquivalenter Classen von quadratischen Formen einer gegebenen Determinante zu verwenden. Wir gehen jetzt dazu über, von dieser berühmtesten Dirichlet'schen Arbeit, welche von ihm selbst im 19. und 21. Bande des Crelle'schen Journals mitgetheilt*) und in Dedekind's Darstellung von Dirichlet's zahlentheoretischen Vorlesungen mit mancherlei schon von Letzterem gemachten Vereinfachungen aber auch mit verschiedenen werthvollen Ergänzungen reproducirt worden ist, eine Darstellung zu geben. Es muss jedoch bemerkt werden, dass schon längere Zeit vor Dirichlet von Gauss die gedachte Classenanzahl bestimmt worden ist**). Was darüber in seinem Nachlasse sich vorgefunden hat, sind zwar grossentheils nur kurze, abgerissene Notizen, doch enthalten dieselben nicht nur die gleiche Formel für die Classenanzahl, welche Dirichlet

*) In der bereits früher bemerkten Abhandlung: recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.

**) S. die Mittheilungen aus seinem Nachlasse, welche unter dem Titel: de nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem im Bd. II seiner Werke von p. 269 bis p. 291 nebst daran anschliessenden Bemerkungen von Dedekind Aufnahme gefunden haben; darnach stammen die Untersuchungen von Gauss bereits aus dem Jahre 1801.

gefunden, sondern sie lassen auch, wie sie Dedekind auf scharfsinnige Weise in Zusammenhang gebracht hat, erkennen, dass Gauss zur Herleitung seiner Resultate im wesentlichen derselben analytischen Hilfsmittel sich bedient hat, wie jener; und es tritt in seiner Behandlungsweise die eigentliche arithmetische Bedeutung der angewandten analytischen Mittel noch deutlicher heraus. Nach Dirichlet sind dessen Methoden theils von ihm selbst, theils von vielen Andern verwerthet worden, ähnliche zahlentheoretische Aufgaben, insbesondere diejenigen analogen Fragen zu erledigen, die in höheren Gebieten, in der Theorie allgemeinerer Formen oder in der Lehre von den complexen Zahlen verschiedenster Art sich finden. In diesem Werke beschränken wir uns lediglich auf solche Fragen, welche an die Elemente der Zahlentheorie sich knüpfen, also auf die Betrachtung der binären quadratischen Formen ausschliesslich. Bezüglich dieser letztern aber ist von Kronecker in einer interessanten Mittheilung*) gezeigt worden, wie die Dirichlet'schen Methoden noch weiter ausgenutzt werden können, um fast die ganze Theorie dieser Formen, abgesehen von ihrer elementaren arithmetischen Grundlage, aus rein analytischen Gesichtspunkten zu entwickeln. Es wird hiernach unsere Aufgabe sein, die Untersuchungen von Dirichlet, Gauss und Kronecker zu einem einheitlichen Ganzen zu verarbeiten.

2. Das Grundprincip dieser Untersuchungen besteht in einer zwiefachen Abzählung aller derjenigen positiven ganzen Zahlen, welche durch die eigentlich primitiven Formen einer gegebenen Determinante D darstellbar sind.

Wir geben vor allem die arithmetische Grundlage dieser doppelten Abzählung.

Die sämmtlichen eigentlich primitiven Formen der Determinante D lassen sich bekanntlich in Classen vertheilen der Art, dass alle Formen derselben Classe unter einander (eigent-

*) S. Monatsber. der Berliner Akademie 1864 p. 285: Ueber den Gebrauch der Dirichlet'schen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen.

lich) äquivalent, Formen verschiedener Classen nicht äquivalent sind; und es lässt sich demnach ein sogenanntes Formensystem

(1) $ax^2+2bxy+cy^2,\ a'x^2+2b'xy+c'y^2,\ a''x^2+2b''xy+c''y^2,\cdots$

denken, indem man aus jeder Classe nach Belieben je eine Form als ihren Repräsentanten auswählt. Wir beschränken uns, wenn die Determinante negativ ist, auf die sogenannten positiven Formen; die Coefficienten a, a', a'', ... sowie sämmtliche durch die Formen des Systems darstellbaren Zahlen sind in diesem Falle positiv. Aber auch im Falle einer positiven Determinante D denken wir uns, was erlaubt ist, die Repräsentanten der Classen so gewählt, dass die Coefficienten a, a', a'', ... positiv und zudem in beiden Fällen so, dass sie relativ prim sind zu einer beliebig gegebenen Zahl II*). Mit Hilfe der reducirten Formen wird in den Elementen der Zahlentheorie gezeigt, dass für jede Determinante die Anzahl der Classen eine endliche ist. Wir wollen diesen Umstand jedoch hier nicht als bekannt voraussetzen, werden ihn vielmehr nach Kronecker's Vorgange gleichfalls durch analytische Hilfsmittel erst erweisen.

Sei nun m eine positive ganze Zahl, welche durch die Form

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

eigentlich also mittels relativ primer Werthe $x=\alpha$, $y=\gamma$ darstellbar ist. Solche Darstellung gehört bekanntlich**) zu einer bestimmten Wurzel n der Congruenz

(2) $$z^2 \equiv D \pmod{m}$$

und zwar zu einer solchen Wurzel derselben, für welche die Zahlen

(3) $$m,\quad 2n,\quad \frac{n^2-D}{m}$$

ohne gemeinsamen Theiler sind, weil die Form $\left(m,\ n,\ \frac{n^2-D}{m}\right)$ der Form $(a,\ b,\ c)$ äquivalent und daher eigentlich primitiv

*) Vgl. in Betreff der Zulässigkeit dieser Wahl z. B. meine Elemente der Zahlentheorie, 4. Abschnitt Nr. 4. Wir werden diese Zahl II je nach Bedarf verschiedentlich wählen.

**) S. ebendas. S. 177 und 204.

ist, wie diese selbst. Alle eigentlichen Darstellungen x, y der Zahl m durch die Form (a, b, c), welche zu derselben Congruenzwurzel n gehören, bilden aber eine Gruppe von Darstellungen, welche alle aus der einen α, γ mittels der Formel

$$(4)\quad ax + by + y\sqrt{D} = (a\alpha + b\gamma + \gamma\sqrt{D}) \cdot (t + u\sqrt{D})$$

hervorgehen, wenn darin für t, u alle ganzzahligen Auflösungen der Pell'schen Gleichung

$$(5)\qquad t^2 - Du^2 = 1$$

eingesetzt werden. — Andrerseits wird, sobald n eine solche Wurzel der Congruenz (2) bedeutet, für welche die drei Zahlen (3) ohne gemeinsamen Theiler sind, die Zahl m durch irgend eine der Formen (1) eigentlich darstellbar sein, denn die Form $\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right)$ ist mit einer bestimmten dieser Formen äquivalent. Zu jeder der gedachten Congruenzwurzeln n gehört demnach eine Gruppe von Darstellungen analog derjenigen, welche bei (4) angegeben worden ist. Ist also m eine beliebige positive ganze Zahl, und bedeutet $\psi(m)$ die Anzahl derjenigen Wurzeln der Congruenz (2), für welche die Zahlen (3) ohne gemeinsamen Theiler sind, so giebt es $\psi(m)$ Gruppen von Darstellungen der Zahl m durch das Formensystem, welche die sämmtlichen eigentlichen Darstellungen der Zahl m durch dieses Formensystem ausmachen*).

Jede dieser Gruppen enthält aber genau so viel Darstellungen, als es ganzzahlige Auflösungen der Pell'schen Gleichung giebt. Die Anzahl τ dieser Auflösungen ist bekanntlich für eine negative Determinante D endlich, nämlich $\tau = 4$, wenn $D = -1$, dagegen $\tau = 2$ für jeden andern negativen Werth von D; ebenso gross ist also auch die Anzahl der Darstellungen in der Gruppe (4). Für eine positive Determinante D hat dagegen die Pell'sche Gleichung, wie in den Elementen der Zahlentheorie gezeigt wird, unendlich viele

*) Dies ist auch richtig für den Fall, dass m gar nicht durch Formen der Determinante D eigentlich darstellbar ist, denn alsdann hat die Congruenz (2) keine Wurzeln der angegebenen Art, $\psi(m)$ also ist Null.

Lösungen; jedoch wollen wir auch diesen Umstand hier nicht als bekannt voraussetzen, sondern nach Kronecker's Vorgange aus analytischen Betrachtungen erst herleiten.

Wir verfolgen zuerst den Fall einer negativen Determinante. Aus dem bereits Gesagten geht hervor, dass die Anzahl aller eigentlichen Darstellungen der Zahl m durch das Formensystem genau gleich $\tau \cdot \psi(m)$ ist. Wenn wir demnach einerseits sämmtliche positive ganze Zahlen m, jede genau $\tau \cdot \psi(m)$ Mal, geschrieben denken, andererseits die sämmtlichen Werthe, welche die Formen (1) durch Einsetzung aller relativ primen Werthsysteme x, y annehmen können, so erhalten wir beiderseits dieselbe Gesammtheit von Zahlen, und dasselbe wird der Fall sein, wenn wir diese Zahlen nicht selbst, sondern irgend eine eindeutige Funktion derselben beiderseits zählen. Und somit geht nachstehende Gleichheit hervor:

$$(6_0)\quad \tau \cdot \sum \psi(m) \cdot F(m) = \sum F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots,$$

in welcher links über sämmtliche positive ganze Zahlen m, rechts in jeder der Summen, die den einzelnen Formen des Systems (1) entsprechen und von denen zur Abkürzung nur eine geschrieben steht, über alle relativ prime Systeme x, y summirt werden muss.

3. Wenden wir uns nun zum Falle einer positiven Determinante, so ist einleuchtend, dass, so oft die Pell'sche Gleichung (5) eine endliche Anzahl τ von ganzzahligen Lösungen hat, genau dieselben Betrachtungen, und demgemäss auch die Gleichheit (6_0) in Geltung bleiben werden, mit dem einzigen Unterschiede, dass auf der rechten Seite der letztern nur über diejenigen der bezeichneten Werthsysteme x, y zu summiren sein würde, für welche der Werth der entsprechenden Form positiv wird, was zuvor nicht auszusprechen war, da die Formen von selbst nur positive Werthe erhielten.

Hat aber die Pell'sche Gleichung unendlich viel ganzzahlige Auflösungen t, u, so lassen sich diese, wie in den Elementen gezeigt zu werden pflegt, sämmtlich durch die sogenannte Fundamentalauflösung T, U mittels der Formel

$$t + u\sqrt{D} = \pm (T + U\sqrt{D})^k$$

ausdrücken, und ferner dann aus jeder Gruppe (4) von Darstellungen eine einzige Darstellung isoliren*), wenn man die darstellenden Zahlen x, y den Ungleichheiten unterwirft:

$$(7) \qquad \sigma \overline{<} ax + by + y\sqrt{D} < \sigma \cdot (T + U\sqrt{D}),$$

wo unter σ ein für jede Gruppe beliebiger positiver Werth zu verstehen ist, oder allgemeiner: es lassen sich genau λ Darstellungen isoliren, wenn x, y den Ungleichheiten

$$(8) \qquad \sigma \overline{<} ax + by + y\sqrt{D} < \sigma \cdot (t + u\sqrt{D})$$

unterworfen werden, in denen

$$(9) \qquad t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^2$$

ist. — Offenbar werden nun wieder dieselben Betrachtungen Platz greifen, wie bei Herleitung der Gleichung (6_0), wenn man nur Sorge trägt, auf der linken Seite $\tau = \lambda$ zu setzen, rechts aber in der ersten der Summen nur alle diejenigen relativen Primzahlen x, y zu berücksichtigen, welche, ausserdem dass sie der quadratischen Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ einen positiven Werth geben, auch noch den Ungleichheiten (8) genügen, und die Zahlen x, y bei den anderen Summen den analogen Beschränkungen zu unterwerfen. So erhält man, entsprechend der Gleichung (6_0) die folgende:

$$(6_1) \quad \tau \cdot \sum \psi(m) \cdot F(m) = \sum F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots,$$

wo $\tau = \lambda$ ist und die Summationen rechts den eben ausgesprochenen Umfang haben, während links wieder über sämmtliche positive ganze Zahlen m zu summiren ist.

Die Ungleichheiten (8) können jedoch durch andere, geeignetere ersetzt werden. Zunächst schliesst man aus ihnen die folgenden:

$$\sigma^2 \overline{<} (ax + by + y\sqrt{D})^2 < \sigma^2 \cdot (t + u\sqrt{D})^2,$$

in denen statt $(t + u\sqrt{D})^2$ auch $\dfrac{t + u\sqrt{D}}{t - u\sqrt{D}}$ geschrieben werden kann. Ist nun m die positive ganze Zahl, welcher die Darstellungsgruppe (4) entspricht, so dass für die darstellenden

*) S. Elemente der Zahlentheorie, S. 198.

Zahlen x, y, insbesondere also auch für die durch die Ungleichheiten (8) aus der Gruppe isolirte Darstellung x, y die Gleichheit erfüllt ist:

$$am = (ax + by + y\sqrt{D}) \cdot (ax + by - y\sqrt{D}),$$

so werden für die letztern Zahlen x, y die beiden irrationalen Faktoren positiv sein, der erste wegen der ersten der Ungleichheiten (8) und dann der zweite, weil das Produkt am positiv ist. Wird demnach für σ der Werth $+\sqrt{am}$ und dann für σ^2 der vorstehende Ausdruck für am gewählt, so nehmen die obigen Ungleichheiten nachstehende Form an:

$$(10)\quad ax+by-y\sqrt{D} < ax+by+y\sqrt{D} < (ax+by-y\sqrt{D}) \cdot \frac{t+u\sqrt{D}}{t-u\sqrt{D}}.$$

Fügt man ihnen dann noch die Ungleichheit

$$(10)\qquad ax + by - y\sqrt{D} > 0$$

hinzu, so ersetzen sie nicht nur die Ungleichheiten (8), sondern die sie erfüllenden x, y leisten auch noch der Bedingung Genüge, der quadratischen Form (a, b, c) einen positiven Werth zu geben. Man darf demnach den Umfang der ersten Summation zur Rechten der Gleichung (6_1) dahin fassen: dass dabei über alle, die Ungleichheiten (10) erfüllenden relativen Primzahlen x, y zu summiren ist; für die anderen Summen gelten die analogen Bestimmungen.

Endlich findet man durch eine einfache Diskussion der Ungleichheiten (10) die folgenden:

$$(11)\qquad y \gtrless 0, \quad x > \gamma y$$

wo γ zur Abkürzung steht für

$$\frac{t - bu}{au},$$

und rückwärts aus diesen wieder die Ungleichheiten (10) setzt man aber

$$(12)\qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x - \alpha y)(x - \beta y),$$

nämlich

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{D}}{a}, \qquad \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{a},$$

so ist

$$\alpha < \beta < \gamma,$$

das erste, weil a positiv ist, das zweite, weil

$$\gamma - \beta = \frac{t - u\sqrt{D}}{au}$$

ist. Demnach wird der Werth der Form (a, b, c) für alle, den Ungleichheiten (11) genügenden x, y von selbst positiv. Der Umfang der ersten Summation in (G_1) kann also einfacher auch so ausgesprochen werden, dass dabei über alle, die Ungleichheiten (11) erfüllenden relativen Primzahlen x, y zu summiren ist; für die anderen Summen gelten die analogen Bestimmungen.

4. Einer nicht eigentlichen Darstellung x, y von m durch eine Form (a, b, c) d. h. einer solchen Darstellung, deren darstellende Werthe x, y einen (grössten positiven) gemeinschaftlichen Theiler μ haben, sodass

$$x = \mu x', \qquad y = \mu y' \tag{12}$$

gesetzt werden kann, wo nun x', y' relative Primzahlen sind, entspricht eine eigentliche Darstellung von $\frac{m}{\mu^2}$ durch dieselbe Form mittels der Werthe x', y'; zudem leuchtet ein, dass, wenn x, y den Ungleichheiten (11) genügen, x', y' den Ungleichheiten von gleicher Form

$$y' \gtrless 0, \qquad x' > \gamma y'$$

Genüge leisten. Aber auch umgekehrt: wenn x', y' eine eigentliche, den letztern genügende Darstellung von $\frac{m}{\mu^2}$ durch (a, b, c) bedeuten, so werden die Werthe (12) eine solche, den Ungleichheiten (11) genügende uneigentliche Darstellung von m durch dieselbe Form sein, welcher der grösste gemeinsame Theiler μ zukommt. Da Gleiches mit Bezug auf die übrigen Formen gilt, so wird schliesslich die Anzahl aller solcher, den Ungleichheiten (11) resp. den mit ihnen analogen, auf die andern Formen bezüglichen Ungleichheiten genügenden Darstellungen von m durch das Formensystem genau gleich $\tau \cdot \psi\left(\frac{m}{\mu^2}\right)$ sein. Dies gilt für jeden der möglichen quadratischen Theiler μ^2 von m inclusive $\mu^2 = 1$. Also wird im Ganzen genommen die Anzahl der sämmtlichen eigentlichen

oder uneigentlichen, Darstellungen der Zahl m durch das Formensystem, (welche im Falle unendlich vieler Auflösungen der Pell'schen Gleichung den beschränkenden Ungleichheiten unterworfen sind), genau gleich $\tau \cdot f(m)$ sein, wenn

$$f(m) = \sum \psi\left(\frac{m}{\mu^2}\right) \tag{13}$$

gesetzt und die Summe über *alle* quadratischen Theiler μ^2 von m ausgedehnt wird.

Entsprechend den Gleichungen (6_0) und (6_1) wird man demnach auch die folgende Grundformel aufstellen können:

$$\tau \cdot \sum f(m) \cdot F(m) = \sum F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots, \tag{6}$$

in welcher τ die bei jenen Formeln angegebenen Werthe bezeichnet, während links über alle positive ganze Zahlen m, rechts aber jetzt über alle angegebenen ganzzahligen x, y zu summiren ist, welche, falls die Pell'sche Gleichung unendlich viele Lösungen hat, für die Form (a, b, c) den Ungleichheiten (11), für die übrigen Formen analogen Beschränkungen genügen. —

Zum Schluss mag ausdrücklich hervorgehoben werden, dass den gefundenen Gleichheiten, welche für alles Folgende die Grundlage bilden, zunächst nur eine rein formale Bedeutung zukommt, nämlich der Sinn, dass jeder Werth, der auf der einen Seite der Gleichheit geschrieben oder gedacht wird, genau ebenso oft auch auf ihrer anderen Seite gezählt wird, und dass somit beiderseits dieselbe Gesammtheit von Zahlen, nur in anderer Weise geordnet und zusammengefasst, vorhanden ist. Damit diese Gleichheiten gewöhnliche Gleichungen werden, durch welche ein Werth einem andern gleichgesetzt wird, müssen wir Sorge tragen, die bisher unbestimmte Funktion F so zu wählen, dass jede der beiden Seiten einen Werth darstellt d. h. convergirt. Bevor wir jedoch dazu übergehen, wollen wir die mit $\psi(m)$ und $f(m)$ bezeichneten zahlentheoretischen Funktionen genauer untersuchen.

5. Wir haben mit $\psi(m)$ die Anzahl derjenigen Wurzeln der Congruenz (2):

$$z^2 \equiv D \pmod{m}$$

bezeichnet, für welche die drei ganzen Zahlen (3):

$$m, \quad 2n, \quad \frac{n^2 - D}{m}$$

ohne gemeinsamen Theiler sind; $\alpha(m)$ bedeute die Anzahl aller ihrer Wurzeln. Ist m, in Primfaktoren zerlegt,

$$m = p^{\varpi} \cdot p'^{\varpi'} \cdot p''^{\varpi''} \cdots,$$

so ist stets, wie wir zeigen wollen,

$$\psi(m) = \psi(p^{\varpi}) \cdot \psi(p'^{\varpi'}) \cdots. \tag{14}$$

Einerseits ist nämlich jede Wurzel n der bezeichneten Art auch eine Wurzel ν, ν', ν'', ... der Congruenzen

$$z^2 \equiv D \pmod{p^{\varpi}}, \quad z^2 \equiv D \pmod{p'^{\varpi'}}, \cdots \tag{15}$$

von der Art, dass

$$\text{weder } p^{\varpi}, \quad 2\nu, \quad \frac{\nu^2 - D}{p^{\varpi}},$$

$$\text{noch } p'^{\varpi'}, \quad 2\nu', \quad \frac{\nu'^2 - D}{p'^{\varpi'}}$$

. . . . . .

einen gemeinsamen Theiler haben; denn hätten z. B. die erstern drei Zahlen einen solchen d. h. wären sie gleichzeitig theilbar durch p, so würde dies, der Voraussetzung zuwider, auch gelten von den drei Zahlen (3). Jeder der gedachten $\psi(m)$ Congruenzwurzeln n entspricht daher *eine* Combination von Wurzeln der Congruenzen (15) von der eben bezeichneten Art.

Bilden andererseits $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ irgend eine Combination solcher Wurzeln der Congruenzen (15), so kann bekanntlich eine Wurzel n der Congruenz (2) gefunden werden, welche die Bedingungen erfüllt:

$$n \equiv \nu \pmod{p^{\varpi}}, \quad n \equiv \nu' \pmod{p'^{\varpi'}}, \ldots.$$

Da aber p^{ϖ}, 2ν, $\frac{\nu^2 - D}{p^{\varpi}}$ nicht gleichzeitig durch p aufgehen sollen, so werden es auch nicht gleichzeitig p^{ϖ}, $2n$, $\frac{n^2 - D}{p^{\varpi}}$; denn entweder ist dann 2ν und folglich auch $2n$ durch p nicht theilbar; oder 2ν ist theilbar, dann aber $\frac{\nu^2 - D}{p^{\varpi}}$ nicht theilbar durch p, aus der Congruenz $n \equiv \nu \pmod{p^{\varpi}}$ d. i. aus der Gleichung $n = \nu + p^{\varpi} y$ folgt dann aber

$$\frac{n^2 - D}{p^\varpi} = \frac{\nu^2 - D}{p^\varpi} + 2\nu y + p^\varpi y^2$$

d. i.

$$\frac{n^2 - D}{p^\varpi} \equiv \frac{\nu^2 - D}{p^\varpi} \pmod{p}$$

und daher ist dann auch $\frac{n^2 - D}{p^\varpi}$ nicht theilbar durch p; hieraus folgt weiter, dass dann auch die drei Zahlen (3) nicht gleichzeitig durch p aufgehen. Da man gleicherweise sich überzeugt, dass sie auch weder durch p', noch durch p'' u. s. w. aufgehen, so findet man, dass jeder der angegebenen Combinationen von Wurzeln der Congruenzen (15), deren es

$$\psi(p^\varpi) \cdot \psi(p'^{\varpi'}) \cdots$$

giebt, *eine* der $\psi(m)$ mit n bezeichneten Wurzeln der Congruenz (2) entspricht. Und dies Resultat, verbunden mit dem zuerst erhaltenen, beweist die Richtigkeit der Formel (14).

Ist nun p zunächst eine nicht in $2D$ aufgehende also ungerade Primzahl, so hat bekanntlich*) die Congruenz

(15a) $$z^2 \equiv D \pmod{p^\varpi}$$

keine Wurzel, wenn $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, zwei Wurzeln, wenn $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$ ist, so dass man allgemein für solche Primzahlen setzen darf

(16) $$\alpha(p^\varpi) = 1 + \left(\frac{D}{p}\right).$$

Man hat zudem in diesem Falle

(17) $$\psi(p^\varpi) = \alpha(p^\varpi),$$

da jede Wurzel der vorigen Congruenz relativ prim zu p, für keine ihrer Wurzeln also die drei Zahlen

$$p^\varpi, \quad 2z, \quad \frac{z^2 - D}{p^\varpi}$$

gleichzeitig durch p theilbar sind.

Ganz anders verhält es sich, wenn p eine in $2D$ aufgehende Primzahl bedeutet. Ist alsdann ν eine Wurzel der Congruenz (15a), also

*) S. Elemente der Zahlentheorie S. 110.

$$\nu^2 \equiv D \pmod{p^\varpi},$$

so ist auch

$$(2\nu)^2 \equiv 4D \pmod{p^\varpi}$$

und demnach geht p auch in 2ν auf. Ist daher ν eine der $\psi(p^\varpi)$ Wurzeln, für welche die Zahlen

$$p^\varpi, \quad 2\nu, \quad \frac{\nu^2 - D}{p^\varpi} \tag{18}$$

ohne gemeinsamen Theiler sind, so darf $\frac{\nu^2 - D}{p^\varpi}$ nicht mehr durch p theilbar, ν also keine Wurzel der Congruenz

$$z^2 \equiv D \pmod{p^{\varpi+1}} \tag{15b}$$

sein. Ist dagegen ν eine Wurzel der Congruenz (15a), für welche die Zahlen (18) einen gemeinsamen Theiler haben d. h. gleichzeitig durch p aufgehen, so ist ν auch eine Wurzel der Congruenz (15b) und zugleich mit ihr die $p-1$ anderen Werthe:

$$\nu + p^\varpi y \quad \text{für} \quad y = 1, 2, 3, \ldots p-1,$$

für deren jeden man findet:

$$(\nu + p^\varpi y)^2 - D = \nu^2 - D + 2\nu y p^\varpi + y^2 p^{2\varpi}$$

d. i. $\equiv 0 \pmod{p^{\varpi+1}}$. Jeder Wurzel der Congruenz (15a), für welche die Zahlen (18) einen gemeinsamen Theiler haben, entsprechen daher p, und offenbar auch nur p verschiedene Wurzeln der Congruenz (15b). Da aber auch umgekehrt eine Wurzel ν dieser letztern Congruenz eine solche Wurzel von (15a) sein muss, für welche jene drei Zahlen einen gemeinsamen Theiler haben, so vertheilen sich alle Wurzeln der Congruenz (15b) in Gruppen von je p Wurzeln, entsprechend den bezeichneten Wurzeln der Congruenz (15a), sodass die Anzahl der letztern gleich $\frac{1}{p} \cdot \alpha(p^{\varpi+1})$ sein muss.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich zunächst, dass die Gesammtheit aller Wurzeln der Congruenz (15a) gleich $\psi(p^\varpi) + \frac{1}{p} \cdot \alpha(p^{\varpi+1})$, oder

$$\psi(p^\varpi) = \alpha(p^\varpi) - \frac{1}{p} \cdot \alpha(p^{\varpi+1}) \tag{17a}$$

sein muss.

Wir beweisen hier noch den bemerkenswerthen Umstand, dass die Anzahl $\alpha(p^\varpi)$, sobald ϖ eine gewisse Grenze überschreitet, für jedes ϖ ein und denselben Werth behält.

Sind p^a und p^b die höchsten Potenzen von p, welche in D und in ν enthalten sind, und setzen wir

$$D = p^a \cdot D', \qquad \nu = p^b \cdot \nu',$$

so folgt aus (15a) für $z = \nu$

$$p^{2b}\nu'^2 - p^a D' \quad \text{theilbar durch} \quad p^\varpi.$$

Ist daher $\varpi > a$, so müsste $2b \geq a$ und

$$p^{2b-a} \cdot \nu'^2 - D' \quad \text{theilbar durch} \quad p^{\varpi - a}$$

sein. Dies wäre unmöglich, wenn $2b > a$ wäre, und erfordert also $2b = a$ und folglich a gerade. Somit ist im Falle eines ungeraden a

$$(19^1) \qquad \alpha(p^\varpi) = 0 \quad \text{für} \quad \varpi > a.$$

Ist dagegen a gerade, so muss $\nu'^2 \equiv D' \pmod{p^{\varpi-a}}$ sein. Betrachten wir zuerst den Fall eines ungeraden p. Dann findet man wieder

$$(19^2) \quad \alpha(p^\varpi) = 0 \quad \text{für} \quad \varpi > a, \quad \text{wenn} \quad \left(\frac{D'}{p}\right) = -1.$$

Ist aber $\left(\frac{D'}{p}\right) = +1$, so hat die Congruenz zwei $\pmod{p^{\varpi-a}}$ incongruente Lösungen ν', deren jeder $p^{a/2} \pmod{p^\varpi}$ incongruente Lösungen der Congruenz (15a) nach der Formel

$$\nu = p^{a/2}(\nu' + p^{\varpi - a}y)$$
$$\text{für } y = 0, 1, 2, 3, \ldots p^{a/2} - 1$$

entsprechen. Also ist

$$(19^3) \quad \alpha(p^\varpi) = 2p^{a/2} \quad \text{für} \quad \varpi > a, \quad \text{wenn} \quad \left(\frac{D'}{p}\right) = +1 \quad \text{ist.}$$

Bedeutet aber p die Primzahl 2, so hat die Congruenz

$$\nu'^2 \equiv D' \pmod{2^{\varpi-a}},$$

wenn $\varpi > a + 2$ vorausgesetzt wird, nur dann eine Lösung, wenn $D' = 8k + 1$ ist, und 4 Wurzeln ν', welche $\pmod{2^{\varpi-a}}$ incongruent sind, falls diese Bedingung erfüllt ist; jeder von diesen entsprechen dann nach der Formel

$$\nu = 2^{a/2}(\nu' + 2\bar{\omega} - {}^{a}y)$$
$$\text{für } y = 0, 1, 2, 3, \ldots 2^{a/2} - 1$$

2^{a_2} nach dem Modulus $2\bar{\omega}$ incongruente Lösungen der Congruenz

$$\nu^2 \equiv D \pmod{2\bar{\omega}}.$$

Hieraus findet man also schliesslich:

$$(19^1) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha(2\bar{\omega}) = 2^{a/2+2} \\ \alpha(2\bar{\omega}) = 0\end{matrix}\right\} \quad \text{für} \quad \bar{\omega} > a + 2,$$

je nachdem $D' \equiv 1 \pmod 8$ ist oder nicht.

Hiermit ist der Nachweis, den wir führen wollten, geleistet. —

6. Wenden wir uns nun zur Funktion $f(m)$, welche durch die Formel

$$(20) \qquad f(m) = \sum \psi\left(\frac{m}{\mu^2}\right)$$

definirt war, in der die Summation sich auf alle quadratischen Theiler von m, inclusive der Einheit, bezieht.

Ist $m = p^{\bar{\omega}}$, so folgt sogleich

$$(21) \qquad f(p^{\bar{\omega}}) = \psi(p^{\bar{\omega}}) + \psi(p^{\bar{\omega}-2}) + \psi(p^{\bar{\omega}-4}) + \cdots,$$

welche Reihe soweit fortzusetzen ist, als der Exponent nicht negativ wird, und wobei für $\psi(1)$ die Einheit gesetzt werden muss.

Ist dagegen

$$(22) \qquad m = p^{\bar{\omega}} \cdot p'^{\bar{\omega}'} \cdot p''^{\bar{\omega}''} \ldots$$

und bildet man, der vorigen Formel gemäss, das Produkt

$$f(p^{\bar{\omega}}) \cdot f(p'^{\bar{\omega}'}) \cdot f(p''^{\bar{\omega}''}) \cdots,$$

so gewinnt man für dasselbe die folgende Entwicklung:

$$\sum \psi(p^{\bar{\omega}-2\alpha}) \cdot \psi(p'^{\bar{\omega}'-2\alpha'}) \cdots,$$

in welcher $2\alpha, 2\alpha', \ldots$ alle geraden Zahlen zu durchlaufen haben, welche resp. die Grenzen $\bar{\omega}, \bar{\omega}', \ldots$ nicht überschreiten, d. i. aber nach (14)

$$\sum \psi\left(\frac{m}{\mu^2}\right),$$

wenn

$$\mu^2 = p^{2\alpha} p'^{2\alpha'} p''^{2\alpha''} \ldots$$

gesetzt wird, eine Formel, welche die sämmtlichen quadratischen Theiler von m repräsentirt. Hiernach findet sich sogleich:

$$f(m) = f(p^{\varpi}) f(p'^{\varpi'}) f(p''^{\varpi''}) \cdots . \tag{23}$$

Ist nun zuvörderst p eine nicht in $2D$ aufgehende also ungerade Primzahl, so hat jeder Summand auf der rechten Seite der Gleichung (21), bei welchem der Exponent positiv ist, nach (17) den Werth $1 + \left(\frac{D}{p}\right)$, woraus

$$\begin{aligned}
\psi(p) &= 1 + \left(\frac{D}{p}\right) \\
\psi(p^3) &= 1 + \left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{D}{p^2}\right) + \left(\frac{D}{p^3}\right) \\
\psi(p^5) &= 1 + \left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{D}{p^4}\right) + \left(\frac{D}{p^5}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

also im Falle eines ungeraden ϖ

$$f(p^{\varpi}) = \sum_{i=0}^{\varpi} \left(\frac{D}{p^i}\right)$$

hervorgeht. Im Falle eines geraden ϖ findet sich in gleicher Weise

$$\begin{aligned}
\psi(p^0) &= 1 \\
\psi(p^2) &= 1 + \left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{D}{p}\right) + \left(\frac{D}{p^2}\right) \\
\psi(p^4) &= 1 + \left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{D}{p^3}\right) + \left(\frac{D}{p^4}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

also wieder und daher allgemein

$$f(p^{\varpi}) = \sum_{i=0}^{\varpi} \left(\frac{D}{p^i}\right). \tag{24}$$

Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf (23) für jede zu $2D$ prime Zahl m

$$f(m) = \sum_{n} \left(\frac{D}{n}\right), \tag{25}$$

die Summe über sämmtliche Theiler n von m erstreckt.

Wir wollen hier noch die Reihe betrachten

$$\Phi_0 = \sum_{\varpi=0}^{\infty} \frac{f(p^\varpi)}{p^\varpi}. \tag{26}$$

Wenn $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ ist, so folgt aus der Formel (24) sogleich, dass $f(p^\varpi) = 0$ ist für jedes ungerade ϖ, dagegen $f(p^\varpi) = 1$ für jedes gerade ϖ. In diesem Falle wird demnach

$$\Phi_0 = \sum_{\varpi=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2\varpi}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}. \tag{27^1}$$

Ist dagegen $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, so wird nach (24) $f(p^\varpi) = \varpi + 1$, also

$$\Phi_0 = \sum_{\varpi=0}^{\infty} \frac{\varpi+1}{p^\varpi} \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2}. \tag{27^2}$$

Nunmehr aber sei p eine in $2D$ aufgehende Primzahl. In diesem Falle folgen aus (17a) zunächst diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ \frac{\psi(p)}{p} &= \frac{\alpha(p)}{p} - \frac{\alpha(p^2)}{p^2} \\ \frac{\psi(p^2)}{p^2} &= \frac{\alpha(p^2)}{p^2} - \frac{\alpha(p^3)}{p^3} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

deren Addition mit Rücksicht darauf, dass $\alpha(p) = 1$ gefunden wird, die Gleichung

$$1 + \frac{\psi(p)}{p} + \frac{\psi(p^2)}{p^2} + \frac{\psi(p^3)}{p^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{p}$$

ergiebt*). Wird aber diese convergente Reihe mit der anderen:

*) Dass die Summe der rechten Seiten gleich $1 + \frac{1}{p}$ ist, ergiebt sich daraus, dass die Summe dieser Seiten bis zu einer hinreichend späten Gleichung hin sich von dem angegebenen Werthe nur um ein Glied von der Form $-\frac{\alpha(p^\varpi)}{p^\varpi}$ unterscheidet, d. i. (nach der Schlussbemerkung von Nr. 5) um einen Werth, der mit wachsendem ϖ beliebig klein wird.

$$1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \cdots$$

multiplicirt und dann nach Potenzen von $\frac{1}{p}$ geordnet, so erhält man mit Rücksicht auf (21) als Produkt die Reihe Φ_0. Man findet demnach in diesem dritten Falle

$$\Phi_0 = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}. \tag{27^3}$$

Die drei erhaltenen Formeln lassen sich folgendermassen in eine einzige zusammenfassen:

$$\sum_{\varpi=0}^{\infty} \frac{f(p^\varpi)}{p^\varpi} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right)}, \tag{27}$$

wo $\varepsilon = \left(\frac{D}{p}\right)$, wenn p nicht in $2D$ aufgeht, dagegen $\varepsilon = 0$ zu setzen ist im entgegengesetzten Falle.

Da hiernach in allen Fällen die unendliche Reihe Φ_0 (unbedingt) convergirt, so gilt dies umsomehr von der Reihe

$$\Phi = \sum_{\varpi=0}^{\infty} \frac{f(p^\varpi)}{p^{\varpi s}}, \tag{28}$$

sobald $s > 1$ ist, und zwar ist diese für alle solche s gleichmässig convergent, da ihr Rest von einem beliebigen n^{ten} Gliede ab für jedes solches s kleiner ist als der entsprechende Rest der Reihe Φ_0, also bei hinreichend grossem n beliebig klein ist. Nach dem Abel'schen Principe (3. Absch. Nr. 3) ist daher Φ für alle $s > 1$ eine stetige Funktion von s und demnach

$$\lim_{s=1} \Phi = \Phi_0. \tag{29}$$

7. Wir kehren nunmehr zur fundamentalen Gleichheit (6) wieder zurück und wählen für die Funktion F den Ausdruck

$$F(z) = \frac{1}{z^s},$$

wo $s > 1$ sei. Die Formel (6) nimmt damit die Gestalt an:

$$\tau \cdot \sum \frac{f(m)}{m^s} = \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} + \cdots, \tag{G}$$

wo links über sämmtliche positive ganze Zahlen m, rechts

aber, je nach den beiden Fällen, welche die Formel (6) umfasst, über sämmtliche ganze Zahlen x, y, für welche (a, b, c) positiv wird, oder in der ersten Summe nur über die durch die Ungleichheiten (11) beschränkten ganzen Zahlen x, y und in den übrigen Summen analog zu summiren ist. Wir weisen zunächst nach, dass die unendliche Reihe zur Linken convergirt, womit dann das Gleiche auch für die rechte Seite nachgewiesen ist, da diese dieselben positiven Werthe nur in anderer Anordnung enthält; übrigens werden wir uns von der Convergenz der einzelnen Summen rechts noch später überzeugen*). — Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass offenbar alle positiven ganzen Zahlen m gefunden werden, wenn man in

$$m = \mu \cdot m'$$

für μ alle positiven Zahlen, inclusive der Einheit, setzt, welche aus den in $2D$ aufgehenden, für m' alle diejenigen, inclusive der Einheit, welche aus den in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen zusammengesetzt sind; m' ist daher dann relativ prim sowohl zu $2D$ als auch zu μ und deshalb ist nach (23)

$$f(m) = f(\mu) \cdot f(m')$$

und

$$f(m') = \sum_n \left(\frac{D}{n}\right), \tag{30}$$

wenn diese Summe auf alle Theiler n von m' bezogen wird. Hieraus ersieht man leicht die Gleichheit zwischen der Summe

$$\sum_m \frac{f(m)}{m^s} \tag{31}$$

und dem folgenden Produkte:

$$\prod_p \sum_{\varpi=0}^{\infty} \frac{f(p^\varpi)}{p^{\varpi s}} \cdot \sum_n \frac{1}{n^s} \cdot \sum_n \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}, \tag{32}$$

wo das, den ersten Faktor bildende Produkt auf alle Primfaktoren p von $2D$, die beiden Summationen im zweiten und dritten Faktor aber auf alle positiven zu $2D$ primen Zahlen n sich erstrecken. Denn erstens sind alle, in dieser Formel vorkommenden unendlichen Reihen, früheren Bemerkungen zufolge,

*) S. Sechster Abschnitt Nr. 3.

für $s > 1$ unbedingt convergent. Nach Abschn. 1 Nr. 3 ist es daher auch das entwickelte Produkt

$$\prod_p \sum_{\omega=0}^{\infty} \frac{f(p^\omega)}{p^{\omega s}} = \sum_\mu \frac{f(\mu)}{\mu^s}$$

und

$$\sum_n \frac{1}{n^s} \cdot \sum_n \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} = \sum_n \sum_{n'} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{(nn')^s},$$

wo sowohl n als n' alle zu $2D$ primen positiven Zahlen durchlaufen müssen, was auch als einfache Summe:

$$\sum_{m'} \frac{f(m')}{m'^s}$$

geschrieben werden kann, wenn man die Glieder vereint, in denen $nn' = m'$ ist, und (30) beachtet, und nach derselben Nr. ist daher endlich das ganze Produkt (32) oder

$$\sum_\mu \frac{f(\mu)}{\mu^s} \cdot \sum_{m'} \frac{f(m')}{m'^s} = \sum_m \frac{f(m)}{m^s}.$$

Für $s > 1$ hat demnach die Gleichung (G) eine numerische Bedeutung und ihre linke Seite ist gleich dem Produkte (32), mit τ multiplicirt.

Es wird auch hier, wie bei der arithmetischen Progression wieder wesentlich darauf ankommen, was aus dieser Gleichung wird, wenn s gegen 1 convergirt; wir wollen dazu, indem wir $s = 1 + \varrho$ setzen, die Gleichung (G) von vornherein mit ϱ multipliciren und dann zur Grenze $\varrho = 0$ übergehen. Beachten wir die Formeln (27) und (29), sowie auch die Gleichung (18) des 3. Abschnittes, so kann dann die linke Seite einfacher auch folgendermassen dargestellt werden:

$$\frac{\tau}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \cdot \lim_{\varrho=0} \varrho \sum_n \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

wo nun, ähnlich wie Formel (21) im vorigen Abschnitte,

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \sum_n \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\varphi(2D)}{2D} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

gefunden wird. Und somit gewinnen wir das Resultat:

Der Grenzwerth zur Linken der Gleichung (G) ist der folgende:

$$\tau \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n},$$

mithin ist er endlich, und zufolge (G) dürfen wir schreiben:

$$(G_0) \quad \tau \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim. \varrho \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} + \cdots.$$

8. Der erste Gebrauch, den wir von diesen Gleichungen machen wollen, soll, wie es zuerst Kronecker gethan hat, zu dem Zwecke gemacht werden, nachzuweisen, dass die Pell'sche Gleichung für *jede* positive Determinante unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat.

Wenn nämlich für eine positive Determinante D die Pell'sche Gleichung nur eine endliche Anzahl τ ganzzahliger Lösungen hätte, so würde für sie in der Grundformel (G) oder (G_0) jede der Summationen zur Rechten sich über sämmtliche ganze Zahlen x, y erstrecken, für welche die entsprechende Form (a, b, c) positiv wird. Legen wir aber auch nur in derjenigen dieser Summen, welche der Hauptclasse entspricht und als deren repräsentirende Form die Hauptform $x^2 - Dy^2$ gewählt werden kann, also in der Summe

$$\varrho \cdot \sum \frac{1}{(x^2 - Dy^2)^{1+\varrho}},$$

x, y alle jene Werthe bei, so entsteht, wie wir hier nach Kronecker darstellen wollen, ein Widerspruch gegen die Gleichung (G_0), indem mit unendlich abnehmendem ϱ diese Summe und damit die ganze rechte Seite unendlich wächst, während die linke Seite endlich ist; dies gilt sogar schon, wenn man x, y auch nur die sämmtlichen ganzzahligen Werthe

$$x = 2D\xi + 1, \qquad y = 2\eta$$

beilegt, für welche

$$(33) \qquad (2D\xi + 1)^2 - 4D\eta^2 > 0,$$

ξ, η aber nicht negative ganze Zahlen sind, d. h. also: es

gilt schon von der auf alle die bezeichneten ξ, η erstreckten Doppelsumme

$$\varrho \cdot \sum_{\xi,\eta} \frac{1}{((2D\xi+1)^2 - 4D\eta^2)^{1+\varrho}}. \tag{34}$$

Um dies zu erweisen, bemerke man zunächst, dass bei gegebenem η die kleinste der vorigen Ungleichheit genügende ganze Zahl ξ

$$\xi = E\left(\frac{2\eta\sqrt{D} + 2D - 1}{2D}\right)$$

sein wird, kürzer: $\xi = E(u)$, wenn

$$2Du = 2\eta\sqrt{D} + 2D - 1$$

gesetzt wird. Ferner ist offenbar, wenn ξ, η eins der bezeichneten Systeme ist,

$$\frac{1}{((2D\xi+1)^2 - 4D\eta^2)^{1+\varrho}} > \int_{\xi}^{\xi+1} \frac{d\xi}{((2D\xi+1)^2 - 4D\eta^2)^{1+\varrho}},$$

und demnach die einfache Summe

$$\sum_{\xi} \frac{1}{((2D\xi+1)^2 - 4D\eta^2)^{1+\varrho}} > \int_{E(u)}^{\infty} \frac{d\xi}{((2D\xi+1)^2 - 4D\eta^2)^{1+\varrho}},$$

wenn die Summation bezüglich ξ über alle, bei dem gegebenen η der Ungleichheit (33) genügende ξ erstreckt wird, und umsomehr noch grösser als

$$\int_{u}^{\infty} \frac{d\xi}{((2D\xi+1)^2 - 4D\eta^2)^{1+\varrho}}.$$

Dies Integral aber verwandelt sich, wenn

$$2D\xi + 1 = \xi', \qquad 2Du + 1 = v$$

gesetzt wird, in

$$\frac{1}{2D}\int_{v}^{\infty} \frac{d\xi'}{(\xi'^2 - 4D\eta^2)^{1+\varrho}}.$$

Nun ist

$$\xi'^2 - 4D\eta^2 = (\xi' - v + 2D)(\xi' - v + 2D + 4\eta\sqrt{D});$$

wird also $\xi' - v = \xi''$ gesetzt, so geht das Integral weiter über in die Form

$$\frac{1}{2D}\int_0^\infty \frac{d\xi''}{(\xi''+2D)^{1+\varrho}(\xi''+2D+4\eta\sqrt{D})^{1+\varrho}},$$

welche lehrt, dass es eine mit wachsendem η abnehmende Funktion dieser Grösse ist. Daraus folgt aber, dass die Doppelsumme in (34) grösser ist als das Doppelintegral

$$\frac{1}{2D}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\eta\, d\xi''}{(\xi''+2D)^{1+\varrho}(\xi''+2D+4\eta\sqrt{D})^{1+\varrho}},$$

welches, wenn mit der Integration nach η begonnen wird, übergeht in

$$\frac{1}{8D\sqrt{D}}\cdot\frac{1}{\varrho}\int_0^\infty \frac{d\xi''}{(\xi''+2D)^{2\varrho+1}}$$

d. i. in

$$\frac{(2D)^{-2\varrho}}{16D\sqrt{D}}\cdot\frac{1}{\varrho^2}. \tag{35}$$

Aus diesem Resultate würde aber folgen, dass das Produkt (34) und damit umsomehr die rechte Seite der Grundformel (G_0) mit unendlich abnehmendem ϱ über jede Grenze hinaus wächst, was der Natur ihrer linken Seite zuwiderläuft.

Wir glauben hier die Bemerkung nicht unterdrücken zu sollen, dass man zum Nachweise, dass die Pell'sche Gleichung für $D>0$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat, des Grenzfalles (G_0) der Grundformel (G) nicht bedarf, sondern mit dieser Grundformel selbst zum Ziele gelangt, wenn man sich auf einen bekannten Satz aus der Lehre von den Kettenbrüchen stützt, denselben Satz nämlich, welcher der berühmten Dirichlet'schen Theorie der Pell'schen Gleichung zu Grunde liegt.

Betrachten wir wieder in der Grundformel (G), deren linke Seite für jedes $s>1$ convergent also endlich ist, zur Rechten nur die auf die Hauptclasse bezügliche Summe

$$\sum\frac{1}{(x^2-Dy^2)^s}, \tag{36}$$

welche, falls für die Determinante D die Pell'sche Gleichung nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Lösungen hätte, auf sämmtliche ganze Zahlen x, y auszudehnen wäre, für welche

$$x^2 - Dy^2 > 0$$

ist. Nach jenem Hilfssatze giebt es unendlich viel positive ganze Zahlen x, y, für welche

$$0 < x - y\sqrt{D} < \frac{1}{y}$$

ist, nämlich die Zähler und Nenner derjenigen Näherungsbrüche des Kettenbruchs für $\sqrt{D}$, deren Ordnung gerade ist; für alle diese Systeme ist dann auch

$$0 < x + y\sqrt{D} < \frac{1}{y} + 2y\sqrt{D}$$

und folglich

$$0 < x^2 - Dy^2 < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{D} < 1 + 2\sqrt{D};$$

für alle diese Systeme x, y ist demnach

$$\frac{1}{(x^2 - Dy^2)^s} > \frac{1}{(1 + 2\sqrt{D})^s},$$

und da ihrer unendlich viele sind und sie alle zu den Systemen zählen, auf welche die Summe (36) sich erstreckt, so muss diese Summe sicher unendlich sein. Da auf solche Weise aus der Grundformel (G) ein Widerspruch hervorginge, muss die Pell'sche Gleichung für jede positive Determinante unendlich viele ganzzahlige Lösungen haben. —

9. Nachdem dieser Nachweis geführt worden ist, leuchtet ein, dass für alle negativen Determinanten die Formel (6_0), für alle positiven Determinanten die Formel (6_1) anzuwenden ist, und dass dem entsprechend x, y in der Grundformel (6) sowie in der Gleichung (G_0) für alle ersteren Determinanten alle ganze Zahlen unbeschränkt, für alle letzteren dagegen nur die durch die bekannten Ungleichheiten beschränkten ganzzahligen Werthe anzunehmen haben.

Wir leiten nun zunächst aus (6) noch einige andere Formeln her, die uns in der Folge vonnöthen sein werden.

Indem wir unter dem Zeichen Π irgend eine positive ganze Zahl verstehen, können wir in der Formel (6) die Funktion $F(m)$ so gewählt denken, dass sie für jedes ganzzahlige Argument m, welches einen gemeinsamen Theiler mit Π hat, verschwindet. Dann erhalten wir eine Gleichung von genau derselben Gestalt wie früher:

$$(6') \quad \tau \cdot \sum{}' f(m) \cdot F(m) = \sum{}' F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots,$$

wo, ebenfalls wie früher, die auf die x, y bezügliche erste Summation, falls die Determinante positiv ist, den Bedingungen (11) und die übrigen Summationen analogen Bedingungen unterworfen sind, wo aber der Umfang aller Summationen jetzt ein beschränkterer ist, insofern das Argument der Funktion F als relative Primzahl zu H vorauszusetzen ist.

Wird insbesondere angenommen, dass H alle Primfaktoren, aus denen $2D$ sich zusammensetzt, in sich enthält, so dass jede zu H prime Zahl m es auch ist gegen $2D$, so gilt für jede solche Zahl m die Beziehung

$$f(m) = \sum_n \left(\frac{D}{n}\right),$$

die Summe auf alle Theiler n von m bezogen; man kann in diesem Falle die Gleichung (6') auch folgendermassen schreiben:

$$(6'') \quad \tau \cdot \sum{}' \left(\frac{D}{n}\right) F(nn') = \sum{}' F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots,$$

worin links über alle positiven Zahlen n und n' zu summiren ist, welche relativ prim sind zu H.

Ist noch specieller H das Produkt der verschiedenen Primfaktoren, aus denen $2D$ besteht, so stimmen die relativen Primzahlen gegen H mit denjenigen gegen $2D$ überein. Wird zudem die Funktion $F(m)$ näher dahin bestimmt, dass sie für jede Zahl m, welche relativ prim ist zu $2D$, den Ausdruck

$$F(m) = \frac{1}{m^{1+\varrho}}$$

bedeutet, so erhält man aus (6'') die Dirichlet'sche Fundamentalgleichung:

$$(6''') \quad \tau \cdot \sum{}' \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{(nn')^{1+\varrho}} = \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} + \cdots,$$

worin n, n' alle relativen Primzahlen zu $2D$ zu durchlaufen haben und auch die Werthe der quadratischen Formen relativ prim sein müssen gegen $2D$. Die Convergenz beider Seiten für $\varrho > 0$ geht ohne weiteres aus derjenigen beider Seiten der Gleichung (G) hervor.

Denkt man sich hier beiderseits die Glieder nach der Grösse des Nenners geordnet, indem man diejenigen mit gleichem Nenner zusammenfasst, so kann man die Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$\sum \frac{C_m}{m^{1+\varrho}} = \sum \frac{C'_m}{m^{1+\varrho}}, \tag{37}$$

beide Summationen über alle positiven relativen Primzahlen zu $2D$ erstreckt; und es ist dann

$$C_m = \tau \cdot \sum \left(\frac{D}{n}\right),$$

wo die Summe sich auf alle Theiler n von m bezieht, und C'_m bezeichnet die Anzahl aller Darstellungen von m durch das Formensystem der Determinante D, und zwar, falls diese letztere positiv ist, mittels solcher Zahlen x, y, welche den bekannten Ungleichheiten unterworfen sind. Die Anwendung des Satzes in Nr. 6 des 3. Abschnittes auf die Gleichung (37) ergiebt nun sogleich die Gleichheit der Coefficienten C_m und C'_m, also,

wenn wir zunächst negative Determinanten betrachten, folgenden Satz:

Die Anzahl aller Darstellungen einer zu $2D$ primen positiven Zahl m durch das Formensystem der negativen Determinante D ist immer

$$\tau \cdot \sum \left(\frac{D}{n}\right)$$

d. i. gleich dem τ-fachen Ueberschusse der Anzahl derjenigen Theiler n von m, für welche $\left(\frac{D}{n}\right) = 1$, über die Anzahl der übrigen, für welche $\left(\frac{D}{n}\right) = -1$ ist.

Dieser Satz lässt sich, wie Dirichlet ausgeführt hat*), auch auf rein arithmetischem Wege beweisen; in der That ist er nur die Bestätigung der in Nr. 6 gewonnenen Formel (25), und die dort zur Herleitung der Formel angewandten Betrachtungen stimmen im wesentlichen mit den Dirichlet'schen überein. Heben wir nur die beiden einfachsten und prägnan-

*) S. Crelle's Journal Bd. 21 p. 3.

testen Fälle dieses allgemeinen Satzes noch hervor, welche den Werthen $D = -1$ und $D = -2$ entsprechen.

Für $D = -1$ besteht das Formensystem nur aus der einzigen Form $x^2 + y^2$ und zugleich ist $\tau = 4$. Der allgemeine Satz nimmt daher hier folgende Gestalt an: Die Anzahl der Darstellungen einer positiven ungeraden Zahl m durch die Form $x^2 + y^2$ ist gleich dem vierfachen Ueberschusse der Anzahl derjenigen Theiler von m, welche die Form $4k + 1$ haben, über die Anzahl der übrigen, welche die Form $4k + 3$ haben*).

Auch für $D = -2$ besteht das Formensystem nur aus einer einzigen Form, nämlich der Form $x^2 + 2y^2$; hier ist aber $\tau = 2$. Die Anzahl der Darstellungen einer positiven ungeraden Zahl m durch die Form $x^2 + 2y^2$ ist demnach gleich dem doppelten Ueberschusse der Anzahl derjenigen Theiler von m, welche eine der Formen $8k + 1$ oder $8k + 3$ haben, über die Anzahl der übrigen, welche von einer der Formen $8k + 5$ oder $8k + 7$ sind.

Für positive Determinanten gelten analoge Sätze, doch haben sie weniger einfache Gestalt; man muss nämlich den vorher ausgesprochenen allgemeinen Satz auf solche Darstellungen beschränken, welche den oben näher bezeichneten Ungleichheiten genügen.

Ist z. B. $D = +2$, so giebt es im Formensystem nur eine einzige Form, nämlich die Form $x^2 - 2y^2$. Versteht man nun in den Ungleichheiten (11) unter t, u die Fundamentalauflösung $T = 3$, $U = 2$ der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - 2u^2 = 1,$$

so hat man $\tau = \lambda = 1$ zu setzen und die Ungleichheiten (11) nehmen die Gestalt an

$$y \gtrless 0, \qquad 2x > 3y. \tag{38}$$

Der diesem Falle entsprechende Satz lautet daher folgendermassen:

*) Diesen speciellen Satz hat bereits Jacobi aus der Theorie der elliptischen Funktionen erschlossen und in Crelle's Journal Bd. 12 p. 167 auf arithmetischem Wege bewiesen.

Die Anzahl aller Darstellungen x, y einer positiven ungeraden Zahl m durch die Form $x^2 - 2y^2$, welche den Ungleichheiten (38) genügen, ist gleich dem Ueberschuss der Anzahl derjenigen Theiler von m, welche von einer der Formen $8k \pm 1$ sind, über die Anzahl der übrigen, welche eine der Formen $8k \pm 5$ haben. —

10. Hieran schliesst sich eine andere bemerkenswerthe Anwendung unserer fundamentalen Gleichungen. Wir haben, um (6‴) zu erhalten, die Funktion F in der Weise specialisirt, dass wir $F(m) = \frac{1}{m^{1+\varrho}}$ setzten; verstehen wir unter H zwar dieselbe Zahl wie zuvor, setzen aber

$$F(m) = q^m,$$

so entsteht statt (6‴) die Gleichung

$$(6'''') \qquad \tau \cdot \sum{}' \left(\frac{D}{n}\right) q^{nn'} = \sum{}' q^{ax^2+2bxy+cy^2} + \cdots,$$

von welcher sich wieder nachweisen liesse, dass ihre beiden Seiten unbedingt convergiren, so lange q einen Werth bedeutet, dessen Modulus kleiner ist als 1. Aus ihr fliessen interessante analytische Folgerungen.

Sei zuerst $D = -1$; dann hat man zur Rechten nur eine Summe, wofür man $\sum{}' q^{x^2+y^2}$ wählen darf, diese Summation ausgedehnt über alle x, y, für welche $x^2 + y^2$ ungerade wird; da hierzu eine der Zahlen x, y ungerade, die andere gerade sein muss und da die Summe der Quadrate sich nicht ändert, wenn beide Quadrate vertauscht werden, so darf man

$$\sum{}' q^{x^2+y^2} = 2 \cdot \sum q^{(2\xi+1)^2} \cdot \sum q^{4\eta^2}$$

setzen, wenn nun über alle ganzzahligen ξ, η summirt wird, d. h. man findet

$$\sum{}' q^{x^2+y^2} = 4(q + q^9 + q^{25} + \cdots)(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \cdots).$$

Wird andererseits zur Linken von (6‴), wo n, n' ungerade sind, die Summation nach n' ausgeführt mittels der Formel

$$\sum q^{nn'} = q^n + q^{3n} + q^{5n} + \cdots = \frac{q^n}{1 - q^{2n}}$$

und beachtet, dass

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

τ aber gleich 4 ist, so kommt links

$$4\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

(n ungerade)

und nun durch Gleichsetzung mit dem vorigen Resultate die Gleichung:

$$(q + q^9 + q^{25} + \cdots)(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \cdots)$$
$$= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \cdots,$$

eine Gleichung, welche ihrer Natur nach zur Theorie der elliptischen Funktionen gehört und auch aus ihr gewonnen werden kann.

Aehnliche Resultate finden statt für jede andere Determinante. Dirichlet hat z. B. (in seiner Abh. Crelle's J Bd. 21 p. 8 u. 9) noch ausser dem Falle $D = -2$ den andern Fall erörtert, wenn $D = -p$, p eine Primzahl von der Form $4k + 3$ ist; er zeigt, wie auch in diesem Falle die Summen zur Rechten von (6'''') in eine Anzahl von Partialsummen zerfallen, welche durch die Jacobi'schen Funktionen ausdrückbar sind, und fügt die wichtige Bemerkung hinzu: Da sowohl die Anzahl der Partialsummen als auch die Exponenten in ihnen von den quadratischen Formen der Determinante D abhängen, sei Hoffnung vorhanden, mittels dieser Beziehungen zur Theorie der elliptischen Funktionen zu Resultaten zu gelangen, welche ein neues Licht werfen auf die eigenthümliche Natur der quadratischen Formen von negativer Determinante. Darzustellen, inwieweit diese Hoffnung durch spätere Untersuchungen, insbesondere durch diejenigen von Kronecker u. A. über die Classenanzahl quadratischer Formen, sich erfüllt habe*), muss einem besonderen Werke zugewiesen werden, welches sich die

*) S. dazu Dirichlet's bezügliche Bemerkung in seinem vom 23. 7. 1858 datirten, an Kronecker gerichteten und in den Göttinger Nachrichten v. J. 1885 S. 379 veröffentlichten Briefe.

Aufgabe stellt, die Anwendungen der Theorie der elliptischen Funktionen auf Zahlentheorie zu entwickeln.

Hier bemerken wir nur noch, dass auch für positive Determinanten sich ähnliche analytische Resultate ergeben, die insofern noch beachtenswerther sind, als sie sich *nicht* aus der Theorie der elliptischen Funktionen bestätigen lassen, mithin auf Transscendenten höherer Art hinweisen. Z. B. nimmt für $D = 2$ die linke Seite von (6''') die Form an:

$$\sum \left(\frac{2}{n}\right) q^{nn'}, \quad \text{wo} \quad n, n' \quad \text{ungerade sind,}$$

d. h. sie ist gleich

$$\sum (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

(n ungerade);

und somit giebt jene Gleichung den folgenden Satz:

$$\sum q^{x^2-2y^2} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{q^5}{1-q^{10}} + \frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots,$$

wenn links die Summation auf alle x, y sich bezieht, welche die Ungleichheiten

$$y \gtrless 0, \quad 2x > 3y$$

erfüllen und für welche $x^2 - 2y^2$ d. i. x ungerade ist.

Sechster Abschnitt.

Bestimmung der Classenanzahl durch eine unendliche Reihe.

1. Die Anwendungen, welche wir in den letzten beiden Nrn. des vorigen Abschnitts von unseren Fundamentalgleichungen gemacht haben, lagen abseits von dem eigentlichen Ziele unserer Untersuchung. Indem wir uns nun diesem, der Bestimmung der Classenanzahl, wieder zuwenden, beginnen wir damit, einen allgemeinen Hilfssatz herzuleiten, auf welchen sowohl Gauss als Dirichlet sich haben stützen müssen, und welchem, obwohl er an sich analytischer Natur ist, am besten geometrische Fassung gegeben wird.

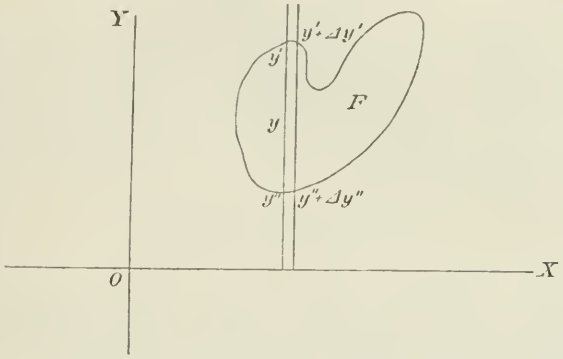
Sei in einer Ebene durch eine geschlossene Linie C ein Flächenstück F begrenzt, das sich nirgends ins Unendliche ausdehnt, und durch ein System gleich weit von einander abstehender Parallelen zu den auf einander senkrechten Coordinatenaxen in quadratische Stücke zerlegt; von den Schnittpunkten des quadratischen Netzes wird eine gewisse Anzahl, die wir mit N bezeichnen wollen, und welche offenbar um so grösser sein wird, je kleiner die Quadrate oder ihre Seite s gewählt werden, theils im Innern von F, theils auf seiner Begrenzung liegen. Der Hilfssatz behauptet nun, dass bei unendlicher Abnahme von s

$$\lim_{s=0} Ns^2 = F \tag{1}$$

sei.

Um dies zu beweisen, bemerken wir, dass das Flächenstück F durch die zur y-Axe gezogenen Parallelen in Streifen von der Breite s zerlegt wird. Wir setzen zunächst voraus, dass jeder dieser Streifen die Begrenzung des Flächenstückes nur zweimal schneide.

Wir dürfen die Coordinatenaxen so gelegt denken, dass das Flächenstück im Winkel der positiven Halbaxen liegt. Wir betrachten dann einen beliebigen der Parallelstreifen; die Stücke der ersten der ihn begrenzenden Parallelen, welche



von der x-Axe bis zum Umfange von F reichen (s. die Figur), seien y' und y'', die der zweiten $y'+\Delta y'$ und $y''+\Delta y''$ und das innerhalb F liegende Stück der ersten sei $y=y'-y''$. Der Inhalt des Parallelstreifens von F ist alsdann

$$ys + s\,(\Theta' \cdot \Delta y' - \Theta'' \cdot \Delta y''),$$

wo Θ', Θ'' zwei positive echte Brüche bedeuten; wird also über alle das Flächenstück treffende Parallelstreifen summirt, so ergiebt sich

$$F = \Sigma ys + s \cdot \Sigma(\Theta' \cdot \Delta y' - \Theta'' \cdot \Delta y'').$$

Hier ist aber unschwer einzusehen, dass die zweite Summe numerisch gewiss nicht grösser ist als die in der Richtung der y-Axe gemessene Ausdehnung von F, welche Y heisse, oder doch als ein gewisses Vielfache derselben, falls die Begrenzung von F im Sinne der y-Axe mehrfach hin- und herschwankt. Man darf folglich setzen

$$F = \Sigma ys + \vartheta' \cdot Ys, \tag{2}$$

wo ϑ' eine endlich bleibende Grösse bezeichnet*).

Andererseits möge n die Anzahl der Netzpunkte sein, welche auf der Strecke y liegen, einschliesslich derjenigen,

*) Vgl. hiermit Gauss' betr. Betrachtung in s. ges. Werken Bd. II p. 277.

welche etwa auf die Begrenzung von F fallen; dann besteht y aus $n-1$ Stücken von der Länge s und möglicherweise aus zwei Stücken, welche kleiner als s sind, sodass man sicher setzen darf

$$y = ns + \Theta s,$$

wo Θ ein positiver oder negativer echter Bruch ist. Multiplicirt man mit s und addirt dann über alle durch F gehende Parallelen zur y-Axe, so wird die Summe aller n die Gesammtmenge von Netzpunkten sein, die wir unter N verstanden, und man findet also

$$\Sigma ys = Ns^2 + s \cdot \Sigma \Theta s.$$

Die Summe auf der rechten Seite ist aber gewiss nicht grösser als die gesammte Breite aller Parallelstreifen, d. i. als die Ausdehnung des Flächenstücks F in Richtung der x-Axe, welche X heisse, und daher darf man schreiben:

$$\Sigma ys = Ns^2 + \vartheta'' \cdot Xs, \tag{3}$$

wo ϑ'' einen echten Bruch bedeutet. Durch Addition dieser Gleichung zur Gleichung (2) ergiebt sich ohne weiteres

$$F = Ns^2 + \Theta \cdot As, \tag{4}$$

wenn wieder Θ einen für jedes s endlich bleibenden Werth, A aber den grösseren der beiden Werthe X, Y d. i. die grösste Ausdehnung von F in Richtung einer der Axen bedeutet. Da diese zufolge unserer Voraussetzung über das Flächenstück F endlich ist, so ist in der That

$$\lim_{s=0} Ns^2 = F.$$

Würde im Gegentheil die Begrenzung des Flächenstücks durch die Parallelstreifen mehr als zweimal geschnitten, so könnte man es in mehrere andere zerlegen, für welche die vorige Annahme zutrifft, und da folglich der Satz für jeden dieser Theile von F stattfinden würde, bleibt er offenbar auch für das ganze Flächenstück richtig.

Bekanntlich wird F gemessen durch das Doppelintegral

$$\int\int dx\, dy,$$

ausgedehnt über alle Punkte x, y, welche innerhalb F sind. Somit darf man der Formel (4) auch die Form geben:

$$\int\int dx\,dy = Ns^2 + \Theta A s, \tag{5}$$

unter welcher wir später von ihr Gebrauch machen werden.

Die Form, in welcher Dirichlet diesen Hilfssatz zuerst ausgesprochen*) und welche auch Gauss ursprünglich gewählt hat**), ergiebt sich aus der vorigen gewissermassen, indem man die Figur unendlich vergrössert. Es ist offenbar derselbe Satz, wenn wir sagen: Denkt man sich die unendliche Ebene durch äquidistante Parallelen zu den Coordinatenaxen in gleiche Quadrate s^2 zerlegt, und eine Curve C, welche, indem sie sich dabei stets ähnlich und zur Anfangslage ähnlich liegend bleibt, fort und fort sich ausdehnt, und nennt man N die dabei gleichzeitig unendlich wachsende Anzahl von Netzpunkten, die in das Innere von C oder auf C selbst fallen, so convergirt das Verhältniss $\frac{Ns^2}{F}$ gegen die Einheit.

2. Sei nun

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

eine (positive) quadratische Form zunächst von negativer Determinante $D = -\Delta$. Die Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

stellt dann bekanntlich eine Ellipse vor, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist und deren Halbaxen durch eine einfache Coordinatentransformation gleich

$$\sqrt{\frac{a+c-R}{2\Delta}}, \quad \sqrt{\frac{a+c+R}{2\Delta}}$$

gefunden werden, wenn R zur Abkürzung gesetzt wird für

$$\sqrt{(a+c)^2 - 4\Delta};$$

der Flächeninhalt F einer Ellipse aber ist gleich dem Produkte ihrer beiden Halbaxen in π. Demnach findet man ohne Mühe

$$F = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}. \tag{6}$$

*) S. seine Abh. recherches sur diverses applications u. s. w.

**) S. Gauss' Werke Bd. 2 pag. 271.

Diejenigen Punkte ferner, welche im Innern oder auf der Begrenzung der elliptischen Fläche F liegen, werden durch die Ungleichheit

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqq 1$$

bestimmt.

Denkt man sich nunmehr unter M eine beliebige positive ganze Zahl und zerlegt die elliptische Fläche durch äquidistante Parallelen zu den Coordinatenaxen, zu welchen diese Coordinatenaxen selbst gehören sollen, in gleiche Quadrate, deren Seite $s = \sqrt{\frac{1}{M}}$ ist, so werden die Coordinaten x, y der Schnittpunkte die Vielfachen von s sein:

$$x = \xi s, \qquad y = \eta s, \tag{7}$$

unter ξ, η ganze Zahlen verstanden; und die Coordinaten derjenigen N Schnittpunkte, welche auf die Ellipse oder ins Innere von F fallen, werden der Ungleichheit

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leqq M$$

genügen, umgekehrt aber auch jedem ganzzahligen Systeme ξ, η, das diese Ungleichheit erfüllt, nach den Formeln (7) einer jener Schnittpunkte entsprechen. N bezeichnet demnach auch die Anzahl derjenigen ganzzahligen Systeme x, y, für welche der Werth der quadratischen Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

nicht grösser ist als M. Bei unendlich wachsendem M wird aber s unendlich klein, und durch Anwendung des Hilfssatzes finden wir dann mit Rücksicht auf die Gleichung $s^2 = \frac{1}{M}$ für diese Anzahl N folgende Beziehung:

$$\lim_{M=\infty} \frac{N}{M} = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}. \tag{8}$$

Ist zweitens $ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine quadratische Form von positiver Determinante D, deren erster Coefficient, wie früher festgesetzt wurde, positiv ist, so bedeutet die Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

eine Hyperbel, deren Mittelpunkt im Coordinatenanfange liegt; die Punkte x, y, welche die Ungleichheit

(9) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqq 1$$

erfüllen, sind die Punkte der unendlichen Ebene, welche zwischen den beiden Hyperbelarmen liegen. Die Gleichung $y = 0$ bedeutet die x-Axe; fügen wir jener Ungleichheit die weitere Bestimmung hinzu:

(9) $$y \geqq 0,$$

so beschränkt sich jene Punktmenge auf diejenigen Punkte derselben, die oberhalb der x-Axe liegen. Ferner bestimmt die Gleichung $x = \gamma y$ d. i. die Gleichung

$$u(ax + by) = ty,$$

in welcher t, u die früher definirte Auflösung der Pell'schen Gleichung bezeichnen, eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade, und die Ungleichheit

(9) $$u(ax + by) \geqq ty$$

alle Punkte x, y auf einer Seite dieser Geraden. Die drei Ungleichheiten (9) oder die entsprechenden Linien zusammengenommen begrenzen ein endliches Flächenstück F der Ebene. Aus der ersten folgt nämlich sogleich

$$(ax + by)^2 \leqq a + Dy^2,$$

und da den beiden andern zufolge $ax + by$ positiv ist,

$$ax + by \leqq \sqrt{a + Dy^2},$$

während zugleich

$$ax + by > \frac{t}{u} y$$

sein soll; beides ist nur möglich, solange

$$\frac{t}{u} y \leqq \sqrt{a + Dy^2}$$

ist, woraus, mit Rücksicht auf die zweite der Ungleichheiten (9) für y die Beschränkung

(10) $$0 \leqq y \leqq u\sqrt{a}$$

hervorgeht. Für jeden dieser Werthe liegt dann x zwischen den endlichen Grenzen

(10) $$\frac{1}{a}\left(\frac{t}{u} - b\right) y \leqq x \leqq \frac{1}{a}\left(\sqrt{a + Dy^2} - by\right).$$

Das Flächenstück F ist also durch die Ungleichheiten (10) definirt und kann auch durch das Integral

$$F = \iint dx\, dy$$

ausgedrückt werden, wenn es zwischen den angegebenen Grenzen für x, y genommen wird. Beginnt man mit der Integration nach x, so kommt zunächst

$$F = \frac{1}{a} \int_0^{u\sqrt{a}} dy \left(\sqrt{a + Dy^2} - \frac{t}{u} y \right)$$

und die einfachen noch übrigen Integrationen geben für F den folgenden Werth:

$$F = \frac{1}{2\sqrt{D}} \cdot \log\left(t + u\sqrt{D}\right). \tag{11}$$

Denkt man sich nun diese Fläche wieder, wie vorher, in Quadrate von der Grösse s^2 zerlegt, so wird die Anzahl der Schnittpunkte (7), welche im Innern oder auf der Begrenzung von F liegen, mit der Anzahl N derjenigen ganzzahligen Systeme ξ, η identisch sein, welche den Ungleichheiten genügen:

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \gtreqless M$$
$$\eta \gtrless 0$$
$$u(a\xi + b\eta) \gtrless t\eta$$

oder, was dasselbe sagt, mit der Anzahl N derjenigen ganzzahligen Systeme x, y, für welche der Werth der quadratischen Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ positiv und nicht grösser als M ist, und welche den in vor. Abschnitt mit (11) bezeichneten Ungleichheiten genügen. Bei unendlich wachsendem M oder abnehmenden s ergiebt der voraufgeschickte Hilfssatz mit Rücksicht auf die Gleichung (11) dieses Resultat:

$$\lim_{M=\infty} \frac{N}{M} = \frac{1}{2\sqrt{D}} \cdot \log\left(t + u\sqrt{D}\right). \tag{12}$$

Die beiden Formeln (8) und (12) lassen sich aber — nach Kronecker — in eine einzige zusammenfassen. Nach (9) vor. Abschn. kann für

$$\log(t + u\sqrt{D}) \quad \text{auch} \quad \lambda \cdot \log(T + U\sqrt{D})$$

gesetzt werden, und unter allen Auflösungen der Pell'schen Gleichung hat die Fundamentalauflösung T, U die Eigenschaft, dass für sie der Ausdruck $t + u\sqrt{D}$ den kleinsten positiven Werth grösser als Eins und deshalb $\frac{1}{\sqrt{D}} \log(t + u\sqrt{D})$ den kleinsten positiven reellen Werth annimmt. Da zudem im Falle einer positiven Determinante das Zeichen $\tau = \lambda$ war, ist die rechte Seite von (12) nichts anderes, als $\frac{\tau}{2}$ Mal der bezeichnete Werth. — Ist dagegen $D = -\Delta$ negativ, so nimmt $\log(t + u\sqrt{D})$, falls $\Delta > 1$ also $\tau = 2$ ist, für die Auflösungen $t = 1$, $u = 0$ resp. $t = -1$, $u = 0$ die Werthe 0 und πi an; der kleinste positive reelle Werth von

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \log(t + u\sqrt{D}) \quad \text{ist also} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

die rechte Seite von (8) also $\frac{\tau}{2}$ Mal dieser Werth. Ist endlich $\Delta = -1$, also $\tau = 4$, so wird für die dann noch vorhandenen Auflösungen $t = 0$, $u = 1$ resp. $t = 0$, $u = -1$

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \log(t + u\sqrt{D})$$

die Werthe

$$\frac{1}{i\sqrt{\Delta}} \log i = \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}, \qquad \frac{1}{i\sqrt{\Delta}} \log(-i) = \frac{3\pi}{2\sqrt{\Delta}}$$

resp. erhalten; der kleinst-mögliche positive reelle Werth des Ausdrucks ist daher $\frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$ und die rechte Seite von (8) also $\frac{\tau}{2}$ Mal dieser Werth. Demnach kann man endlich allgemein sagen:

Bedeutet ϑ den kleinsten positiven reellen Werth, den der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \log(t + u\sqrt{D})$$

für irgendwelche ganzzahligen Auflösungen der Pell'schen Gleichung annehmen kann, so ist für jede, positive oder negative Determinante

$$\lim_{M=\infty} \frac{N}{M} = \frac{\tau\vartheta}{2}. \tag{13}$$

3. Dies Resultat verbinden wir jetzt mit dem allgemeinen Dirichlet'schen Satze (Nr. 8 des 3. Abschnittes). Das Zeichen N bedeutete die Anzahl derjenigen, bei der ersten Summe zur Rechten der Grundgleichung (G_0) zulässigen ganzzahligen Werthsysteme x, y, für welche $ax^2 + 2bxy + cy^2$ den Werth M nicht überschreitet. Denkt man sich diese Summe

$$S = \varrho \cdot \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} \tag{14}$$

nach den wachsenden Werthen des Nenners geordnet, sodass sie die Gestalt

$$\varrho \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^{1+\varrho}}$$

annimmt, worin $k_n \leqq k_{n+1}$ ist, so drückt N auch die Anzahl der ganzzahligen Werthe $k_1, k_2, k_3, \ldots$ aus, welche die Grenze M nicht überschreiten. Ist nun t eine stetig wachsende positive Veränderliche, und T wieder die Anzahl jener Werthe, welche nicht grösser als t sind, so wird $T = N$ sein, solange t von M bis gegen $M + 1$ hin wächst, und, wenn N' der $M + 1$ entsprechende Werth von N ist, auf N' springen, sobald $t = M + 1$ wird, und daher wird bei solchem Wachsen von t der Quotient $\frac{T}{t}$ zunächst zwischen $\frac{N}{M}$ und $\frac{N}{M+1}$ verbleiben, aber auf $\frac{N'}{M+1}$ überspringen in dem Augenblicke, in welchem t den Werth $M + 1$ erreicht. Aber

$$\frac{N}{M+1} = \frac{N}{M} \cdot \frac{M}{M+1}$$

hat ebenso wie $\frac{N}{M}$ und $\frac{N'}{M+1}$ bei wachsendem M den zuvor angegebenen Grenzwerth $\frac{\tau\vartheta}{2}$, also folgt auch

$$\lim_{t=\infty} \frac{T}{t} = \frac{\tau\vartheta}{2}.$$

Da hiernach der Quotient $\frac{T}{t}$ für ein unendlich wachsendes t einen Grenzwerth hat, wissen wir nach dem Dirichlet'schen Satze nicht nur, dass die Summe S für jedes positive ϱ convergirt (s. vor. Abschn. Nr. 7 Anfang),

sondern auch, dass sie bei unendlich abnehmendem ϱ ebendemselben Grenzwerthe zustrebt, d. h. wir finden:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \sum' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}} = \frac{\tau\vartheta}{2}. \tag{15}$$

Wir wollen, bevor wir weitergehen, diese wichtige Formel noch durch ein anderes Verfahren herleiten, welches zwar in seinen Principien das gleiche, wie das soeben befolgte, und dabei weniger unmittelbar ist, das jedoch eine nähere Einsicht gewährt, die wir uns zu Nutze machen wollen, um eine später nöthige Formel zu gewinnen.

Sei Π eine beliebige positive ganze Zahl. Jedes, bei der Summe S zulässige Werthsystem x, y lässt (mod. Π) ein bestimmtes System von Resten, und solcher möglichen Restsysteme (mod. Π) giebt es Π^2. Die Summe S kann demgemäss in Π^2 Partialsummen zerlegt werden, indem man jedesmal diejenigen ihrer Glieder zusammenfasst, bei welchen x, y dieselbe Restcombination (mod. Π) aufweisen. Wir betrachten eine beliebige dieser Partialsummen, z. B. diejenige S_1, bei welcher x, y die Restcombination α, γ geben d. h. von der Form

$$x = \Pi v + \alpha, \qquad y = \Pi w + \gamma \tag{16}$$

sind, unter v, w ganze Zahlen verstanden. Letztere sind unbeschränkt, wenn $D < 0$ ist; für eine positive Determinante D dagegen haben die x, y von der Form (16) noch den Ungleichheiten

$$y \geqq 0, \qquad u(ax+by) > ty$$

zu genügen. Betrachten wir vorläufig nur diejenigen Zahlen (16), für welche der Werth der quadratischen Form (a, b, c) nicht grösser als die positive ganze Zahl M ist, so haben diese die Bedingung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 < M \tag{17}$$

zu erfüllen. Setzt man nun

$$\xi = xs, \qquad \eta = ys,$$

wobei wieder unter s die positive Quadratwurzel aus $\frac{1}{M}$ verstanden werden soll, und betrachtet ξ, η als rechtwinklige

Coordinaten eines Punktes, so erhält man für letztere nachstehende Bedingungen:

1) $$\xi = \Pi s \cdot v + \alpha s, \qquad \eta = \Pi s \cdot w + \gamma s$$

d. h. ξ, η sind Schnittpunkte eines Netzes von Parallelen zu den Coordinatenaxen, welche die Ebene in Quadrate von der Grösse $\Pi^2 s^2$ zerlegen;

2) $$\begin{gathered} a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \lessgtr 1 \\ \eta \lessgtr 0, \qquad u(a\xi + b\eta) > t\eta, \end{gathered}$$

Ungleichheiten, von denen die beiden letzteren nur im Falle $D > 0$ in Betracht kommen, d. h. diese Schnittpunkte liegen innerhalb des Flächenstückes, welches in Nr. 2 mit F bezeichnet worden ist. Heisst N_1 die Anzahl all' dieser Schnittpunkte, d. i. aber die Anzahl aller ganzzahligen x, y von der Form (16), für welche $ax^2 + 2bxy + cy^2$ nicht grösser als M ist und welche im Falle $D > 0$ den Ungleichheiten

$$y \lessgtr 0, \qquad u(ax + by) > ty$$

genügen, so convergirt bei unendlicher Abnahme von s oder bei unendlichem Wachsen von M das Produkt

$$N_1 \cdot \Pi^2 s^2 = \frac{N_1}{M} \cdot \Pi^2$$

gegen den Inhalt des Flächenstücks F, welchen wir dort gleich $\frac{\tau\vartheta}{2}$ gefunden haben, und folglich convergirt $\frac{N_1}{M}$ gegen die Grenze

$$\frac{1}{\Pi^2} \cdot \frac{\tau\vartheta}{2}.$$

In Anwendung des allgemeinen Dirichlet'schen Satzes gewinnt man auf solche Weise folgendes Resultat:

Heisst S_1 derjenige Bestandtheil der Summe S, bei welchem die ganzzahligen x, y ausser den übrigen erforderlichen Bedingungen die Bedingung erfüllen, von der Form (16) zu sein, in welcher α, γ irgend eins der möglichen Restsysteme (mod. Π) bedeuten, so findet sich

(15_1) $$\lim_{\varrho=0} S_1 = \frac{1}{\Pi^2} \cdot \frac{\tau\vartheta}{2}.$$

Es ist wohl zu bemerken, dass dieser Grenzwerth von dem besonderen Restsysteme α, γ, von welchem wir ausgingen, durchaus unabhängig ist. Er ist demnach für die sämmtlichen H^2 Partialsummen, in welche wir die Summe S zerlegt hatten, derselbe. Und somit bestätigt sich zunächst für $\lim_{\varrho=0} S$ der früher gefundene Werth $\frac{\tau\vartheta}{2}$.

4. Aber wir wollen nun diejenigen Restcombinationen α, γ oder vielmehr nur ihre Anzahl festzustellen suchen, für welche $ax^2 + 2bxy + cy^2$ relativ prim wird gegen H. Diese bisher beliebige ganze Zahl setzen wir jedoch fortan als die folgende voraus:

$$H = 2pp' \ldots rr' \ldots , \tag{18}$$

wo $p, p', \ldots$ verschiedene ungerade in $2D$ aufgehende, $r, r', \ldots$ beliebige andere, unter einander verschiedene ungerade Primzahlen bedeuten. Wir dürfen mit ihr diejenige Zahl identificiren, welche pag. 91 mit demselben Buchstaben bezeichnet worden ist, d. h. wir dürfen a bei dieser Betrachtung relativ prim voraussetzen gegen H. Die Frage kommt dann, da

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \equiv a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \pmod{H}$$

ist, auf die andere hinaus: für welche Restcombinationen α, γ wird der Ausdruck

$$(a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2 \tag{19}$$

prim gegen H?

Nun lässt jeder Rest α sowohl wie jeder Rest γ (mod. H)

einen der Reste $0, 1 \pmod 2$

„ „ „ $0, 1, 2, \ldots p-1 \pmod p$

. . . . . .

„ „ „ $0, 1, 2, \ldots r-1 \pmod r$

. . . . . .

und man erhält umgekehrt durch alle Combinationen der letztern Restsysteme sämmtliche Reste α sowohl wie γ (mod. H). Ausserdem wird der Ausdruck (19) dann, aber auch nur dann relativ prim sein zu H, wenn er durch keine der Primzahlen $2, p, p', \ldots r, r', \ldots$ theilbar ist.

Soll er durch 2 nicht theilbar, also ungerade sein, so wird, wenn D gerade ist, γ jeden der Reste 0, 1 (mod. 2) annehmen dürfen, dann aber jedesmal $a\alpha + b\gamma$ ungerade sein müssen, also α nur einen der Reste 0, 1 (mod. 2) lassen dürfen; es giebt in diesem Falle zwei zulässige Restcombinationen α, γ (mod. 2). Ist D ungerade, so wird einem geraden γ ein ungerades α, einem ungeraden γ ein gerades resp. ungerades α zugeordnet werden müssen, je nachdem b gerade oder ungerade ist; also auch jetzt giebt es zwei zulässige Restcombinationen (mod. 2).

Soll der Ausdruck (19) durch eine Primzahl p nicht theilbar sein, welche in D aufgeht, so darf $a\alpha + b\gamma$ nicht durch p theilbar sein; das giebt für jeden der p Werthe, welche γ haben kann, $p-1$ zulässige Reste α oder im Ganzen $p(p-1)$ zulässige Restcombinationen α, γ (mod. p).

Soll endlich der Ausdruck (19) durch eine ungerade Primzahl r nicht theilbar sein, welche nicht in D aufgeht, so wird, wenn γ theilbar ist durch r, wieder $a\alpha + b\gamma$ nicht durch r theilbar sein dürfen, was $r-1$ zulässige Restcombinationen ergiebt. Lässt aber γ einen der Reste $1, 2, \ldots r-1$, so kann (19) nur dann durch r aufgehen, wenn $\left(\frac{D}{r}\right) = 1$ ist. Im Falle $\left(\frac{D}{r}\right) = -1$ darf also α jeden Rest (mod. r) bedeuten, und man erhält daher noch $r(r-1)$, im Ganzen demnach $(r+1)(r-1)$ zulässige Restcombinationen (mod. r). Wenn dagegen $\left(\frac{D}{r}\right) = +1$ ist, so müssen für jedes durch r nicht theilbare γ diejenigen beiden Reste α ausgeschlossen werden, für welche $a\alpha + b\gamma$ mit einer der Wurzeln der Congruenz $z^2 \equiv D\gamma^2$ (mod. r) übereinstimmen würde; hier erhält man also ausser den früheren $r-1$ nur noch $(r-2)(r-1)$, im Ganzen also $(r-1)(r-1)$ zulässige Restcombinationen (mod. r).

Nennt man allgemein q die ungeraden Primfaktoren von Π, so dass man schreiben kann

$$\Pi = 2 \cdot \Pi(q), \tag{20}$$

so darf man, die letzten beiden Fälle zusammenfassend, sagen: in Bezug auf jeden der Moduln q giebt es

$$(q-1)(q-\varepsilon)$$

zulässige Restcombinationen α, γ, wenn unter ε der Werth 0 oder $\left(\frac{D}{q}\right)$ verstanden wird, je nachdem q in D aufgeht oder nicht.

Aus dieser Betrachtung geht nun aber hervor, dass die Anzahl der Restsysteme α, γ (mod. Π), für welche

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

wenn x, y die Form (16) haben, relativ prim gegen Π wird, gleich

$$2 \cdot \prod_q (q-1)(q-\varepsilon)$$

ist, das Produkt auf alle in Π aufgehende ungerade Primfaktoren bezogen. —

Von den so gewonnenen Resultaten machen wir nun eine später nützliche Anwendung. Betrachten wir statt der Summe S die Summe

$$S' = \varrho \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}},$$

indem wir, wie in Nr. 9 vor. Abschn., die Summation auf diejenigen zulässigen Werthsysteme x, y beschränken, für welche die Form (a, b, c) relativ prim wird zu Π. Sie ist offenbar die Summe der

$$2 \cdot \prod_q (q-1)(q-\varepsilon)$$

Partialsummen S_1, denen die im letzten Satze angegebenen Restsysteme α, γ (mod. Π) entsprechen, und demnach findet man mit Rücksicht auf die Gleichung (15_1) und auf die Formel (20) ohne weiteres

$$(15') \lim_{\varrho=0} \varrho \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} = \frac{\tau\vartheta}{4} \prod_q \left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{q}\right).$$

Ist insbesondere Π das Produkt der verschiedenen Primfaktoren, aus welchen $2D$ besteht, so ergiebt sich, wenn Δ den Absolutwerth von D bezeichnet,

$$(15'') \quad \lim_{\varrho=0} \varrho \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} = \frac{\tau\vartheta}{2} \cdot \frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta},$$

wenn links die Summation auf alle (im Falle $D > 0$ den Ungleichheiten

$$u(ax + by) > ty, \qquad y > 0$$

genügenden) ganzzahligen x, y sich erstreckt, für welche $ax^2 + 2bxy + cy^2$ relativ prim wird gegen $2D$.

5. Sehr wichtig ist der Umstand, welchen die Formel (15) erkennen lässt, dass der Grenzwerth der Summe S von der speciellen Form (a, b, c) oder von der Classe, zu welcher sie gehört, völlig unabhängig ist; er ist demnach der gleiche für jede der Summen, welche sich auf der rechten Seite der Grundformel (G_0) befinden. Hieraus ziehen wir mit Kronecker sogleich den Schluss: dass die Classenanzahl H der quadratischen Formen für jede Determinante D nur eine endliche ist. Denn sonst würde der Werth der rechten Seite dieser Grundformel unendlich gross sein, während derjenige der linken Seite, wie bereits bemerkt worden, endlich ist.

Kronecker macht hierzu eine höchst beachtenswerthe Bemerkung. Die Formel

$$\lim.\ \varrho \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}, \tag{21}$$

durch welche der Grenzwerth der linken Seite der Grundformel erhalten wird, und der Umstand, dass dieser Werth ein endlicher ist, ergab sich, wie aus Nr. 6 des dritten Abschnittes hervorgeht, wesentlich nur auf Grund des in der Formel (17) daselbst ausgesprochenen Satzes, der selbst wieder ein gerader Ausfluss des Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der quadratischen Reste ist. Da wir nun sowohl den Kronecker'schen Nachweis, dass die Pell'sche Gleichung für positive Determinanten unendlich viele Lösungen hat, als auch den Beweis für die Endlichkeit der Classenanzahl durchaus nur aus der Endlichkeit der Summe (21) erschliessen konnten, so zeigen die Dirichlet'schen Methoden, „dass dieser Fundamentalsatz aus der Theorie der quadratischen Reste merkwürdigerweise auch als die eigentliche Quelle für jene beiden elementaren Haupteigenschaften der quadratischen Formen angesehen werden kann“.

Zugleich aber ermöglichen uns die gewonnenen Resultate auch, für die Classenanzahl H einen Ausdruck aufzustellen, der sie als Funktion der Determinante bestimmt. Setzen wir nämlich die gefundenen Grenzwerthe für die beiden Seiten der Grundformel (G_0) einander gleich, so erhalten wir

$$\tau \cdot \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{\tau \vartheta}{2} \cdot H$$

und hieraus die Classenanzahl

$$H = \frac{2}{\vartheta} \cdot \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}. \tag{22}$$

Diese Formel setzt uns in den Stand, die Lücke zu ergänzen, welche bei der Untersuchung der arithmetischen Progression (s. Ende von Nr. 4 des 4. Abschn.) noch geblieben ist. Es handelte sich dort um den Nachweis, dass die Summe

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

von Null verschieden ist. Dies geht aber aus der vorstehenden Formel unmittelbar hervor, denn ϑ ist von Null verschieden, und, da für jede Determinante mindestens eine Formenclasse, nämlich die Hauptclasse mit der Form $x^2 - Dy^2$ vorhanden ist, so hat auch H stets einen von Null verschiedenen Werth.

6. Bevor wir nun zur weiteren Bestimmung des Werthes der unendlichen Reihe (21) übergehen, wollen wir näher die arithmetische Bedeutung der Grundformel (G_0) zu erkennen suchen.

Die Zahl N bedeutete die Anzahl aller derjenigen ganzzahligen Werthsysteme x, y, welche — im Falle einer positiven Determinante den bekannten Beschränkungen unterworfen — der quadratischen Form (a, b, c) einen der Werthe $1, 2, 3, \ldots M$ ertheilen d. h. diese Zahlen durch die Form (a, b, c) darstellen. Nennt man daher für einen Augenblick $f'(1), f'(2), \ldots f'(M)$ die Anzahl möglicher Darstellungen der Zahlen $1, 2, \ldots M$ resp. durch die Form (a, b, c) mittels solcher Systeme x, y, so ist

$$N = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(M)$$

und

$$\lim_{M=\infty} \frac{N}{M} = \lim_{M=\infty} \frac{f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(M)}{M},$$

also bezeichnet dieser Grenzwerth die *mittlere* Anzahl der Darstellungen einer (positiven) ganzen Zahl durch die Form (a, b, c) mittels der Systeme x, y von der angegebenen Art. Dieser Grenzwerth von $\frac{N}{M}$ wurde allein auf Grund des geometrischen Hilfssatzes durch die Formel (13) ausgedrückt gefunden und ist folglich für jede Form des Formensystems von gleichem Werthe; die mittlere Anzahl aller bezeichneten Darstellungen einer Zahl durch das Formensystem wird demnach, als Summe der mittleren Mengen von Darstellungen durch seine einzelnen Formen, allein auf Grund des geometrischen Hilfssatzes gleich

$$\frac{\tau\vartheta}{2} \cdot H$$

gefunden. Da wir aber mittels des Dirichlet'schen Satzes die Gleichheit des Grenzwerthes $\lim_{M=\infty} \frac{N}{M}$ mit dem Grenzwerthe der Summe S für $\varrho = 0$ erkannt haben, so bedeutet der zur Rechten der Grundformel (G_0) stehende gesammte Grenzwerth die mittlere Anzahl aller Darstellungen einer positiven ganzen Zahl durch das Formensystem der Determinante D mittels solcher ganzen Zahlen x, y, welche, im Falle einer positiven Determinante, für die einzelnen Summen den früher bezeichneten Ungleichheiten genügen. Die Bedeutung unserer Grundformel (G_0) ist also die: für dieselbe mittlere Anzahl einen zweiten Ausdruck zu liefern, durch dessen Vergleichung mit dem erstern sich dann die Classenanzahl ergiebt. Jetzt wollen wir der Dirichlet'schen Methode diejenige an die Seite setzen, durch welche Gauss, soweit die von ihm hinterlassenen Notizen erkennen lassen, zur Auffindung des zweiten Ausdrucks für die genannte mittlere Anzahl gelangt sein dürfte.

Es bezeichne $f(m)$ dieselbe zahlentheoretische Funktion

wie bisher; ist p eine Primzahl und p^{ϖ} die höchste Potenz von p, welche in einer Zahl m aufgeht, so soll $f\left(\frac{m}{p^{\varpi}}\right)$ mit $f(m; p)$ bezeichnet werden, ein Werth, welcher also mit $f(m)$ identisch ist, sobald m nicht durch p theilbar ist; desgleichen, wenn p' eine zweite Primzahl bedeutet und $p'^{\varpi'}$ die höchste Potenz von p', die in m aufgeht, so werde $f\left(\frac{m}{p^{\varpi}p'^{\varpi'}}\right)$ mit $f(m; p, p')$ bezeichnet, u. s. w. Denkt man sich sodann alle Primzahlen bis zu einer bestimmten Primzahl p hin,

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ p_0,\ p,$$

so sei

$$\begin{cases} \theta(m) = f(m;\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots\ p_0) \\ \theta'(m) = f(m;\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots\ p_0,\ p), \end{cases} \tag{23}$$

d. h., wenn p^{ϖ} die höchste Potenz von p ist, welche in m aufgeht,

$$\theta'(m) = \theta\left(\frac{m}{p^{\varpi}}\right). \tag{24}$$

Diesen Definitionen zufolge nimmt die Funktion $\theta(m)$ an der Eigenschaft der Funktion $f(m)$ Theil, nach welcher, wenn $m = np^{\varpi}$ und n nicht weiter durch p theilbar ist,

$$f(m) = f(n) \cdot f(p^{\varpi})$$

ist, eine Gleichung, welche aus Formel (23) vor. Abschnittes hervorgeht. Es ist also

$$\theta(m) = \theta(np^{\varpi}) = \theta(n) \cdot \theta(p^{\varpi}) = \theta(n) \cdot f(p^{\varpi}) \tag{25}$$

oder auch

$$\theta(m) = \theta'(m) \cdot f(p^{\varpi}). \tag{26}$$

Dies vorausgeschickt, betrachten wir sämmtliche ganze Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ m.$$

Diese zerfallen in zwei Kategorien:

erstens diejenigen Zahlen $\mu < m$, welche nicht durch p theilbar sind, und zweitens die Zahlen

$$1 \cdot p,\ \ 2 \cdot p,\ \ 3 \cdot p,\ \ \ldots\ \ m_1 \cdot p,$$

wo $m_1 = E\left(\frac{m}{p}\right)$ sein soll. Diese letztern Zahlen zerfallen wieder

erstens in solche Zahlen $\mu' = \mu_1 \cdot p$, bei welchen $\mu_1 \leqq m_1$ und nicht durch p theilbar ist, und zweitens in die Zahlen

$$1 \cdot p^2, \quad 2 \cdot p^2, \quad 3 \cdot p^2, \quad \ldots \quad m_2 \cdot p^2,$$

wo $m_2 = E\left(\frac{m}{p^2}\right)$ sein soll. Die zuletzt genannten Zahlen zerfallen aufs neue

erstens in solche Zahlen $\mu'' = \mu_2 \cdot p^2$, bei welchen $\mu_2 \leqq m_2$ und nicht durch p theilbar ist, und zweitens in die Zahlen

$$1 \cdot p^3, \quad 2 \cdot p^3, \quad 3 \cdot p^3, \quad \ldots \quad m_3 \cdot p^3,$$

wo $m_3 = E\left(\frac{m}{p^3}\right)$ ist, u. s. w. Schliesslich, wenn p^i die höchste Potenz von p bezeichnet, welche noch kleiner ist als m, sodass $m_i = E\left(\frac{m}{p^i}\right)$ noch von Null verschieden, aber $E\left(\frac{m}{p^{i+1}}\right) = 0$ ist, erhält man noch eine letzte Kategorie von Zahlen $\mu^{(i)} = \mu_i p^i$, bei welchen $\mu_i \leqq m_i$ und nicht durch p theilbar ist.

Offenbar bilden die Zahlen μ, μ', μ'', $\ldots$ $\mu^{(i)}$ zusammen genommen die Gesammtheit der Zahlen 1, 2, 3, $\ldots$ m.

Bezeichnet jetzt

$$\vartheta(m) = \sum \theta(\mu)$$

die auf alle Zahlen μ bezogene Summe, so wird gleicherweise

$$\vartheta(m_1) = \sum \theta(\mu_1)$$

$$\vartheta(m_2) = \sum \theta(\mu_2)$$

u. s. w. sein. Da jedoch $\mu' = \mu_1 p$, so ist nach (25)

$$\theta(\mu') = \theta(\mu_1) \cdot f(p),$$

desgleichen wegen $\mu'' = \mu_2 p^2$

$$\theta(\mu'') = \theta(\mu_2) \cdot f(p^2)$$

u. s. w., sodass die vorstehenden Gleichungen auch folgendermassen geschrieben werden können:

$$\vartheta(m) = \sum \theta(\mu)$$

$$\vartheta(m_1) \cdot f(p) = \sum \theta(\mu')$$

$$\vartheta(m_2) \cdot f(p^2) = \sum \theta(\mu'')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man demnach

$$(27) \qquad \Theta(m) = \theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(m),$$

so findet sich sogleich die Beziehung

$$(28) \quad \Theta(m) = \vartheta(m) + \vartheta(m_1) \cdot f(p) + \vartheta(m_2) \cdot f(p^2) + \cdots.$$

Andererseits ist nach Formel (24)

$$\begin{aligned} \theta(\mu) &= \theta'(\mu) \\ \theta(\mu_1) &= \theta'(\mu_1 p) = \theta'(\mu') \\ \theta(\mu_2) &= \theta'(\mu_2 p^2) = \theta'(\mu'') \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

sodass die Addition der obigen Gleichungen in ihrer ursprünglichen Gestalt die neue Beziehung ergiebt

$$(29) \qquad \Theta'(m) = \vartheta(m) + \vartheta(m_1) + \vartheta(m_2) + \cdots,$$

wenn gesetzt wird

$$(30) \quad \Theta'(m) = \theta'(1) + \theta'(2) + \theta'(3) + \cdots + \theta'(m).$$

Wir werden nun die Gleichungen (28) und (29) durch m dividiren und darauf m unendlich wachsen lassen; den Definitionen (27) und (30) gemäss erhalten wir so die mittleren Werthe der Funktionen $\theta(m)$ und $\theta'(m)$, welche $\mathfrak{M}\theta(m)$ und $\mathfrak{M}\theta'(m)$ resp. heissen mögen. Hierbei wollen wir bedenken, dass

$$m = m_1 p + r_1$$

ist, wenn r_1 eine Zahl $< p$ ist, desgleichen

$$m = m_2 p^2 + r_2,$$

wo $r_2 < p^2$ ist, u. s. f. Daher wird

$$\frac{\Theta(m)}{m} = \frac{\vartheta(m)}{m} + \frac{\vartheta(m_1)}{m_1 + \frac{r_1}{p}} \cdot \frac{f(p)}{p} + \frac{\vartheta(m_2)}{m_2 + \frac{r_2}{p^2}} \cdot \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots$$

gesetzt werden können, und, wenn nun m unendlich wächst, so wachsen zugleich auch m_1, m_2, m_3, ... über jede Grenze hinaus und die echten Brüche $\frac{r_1}{p}$, $\frac{r_2}{p^2}$, ... dürfen diesen Zahlen gegenüber vernachlässigt werden. Demnach convergiren die Brüche zur Rechten, welche die ersten Faktoren ausmachen, sämmtlich gegen denselben Grenzwerth $\mathfrak{M}$, wie $\frac{\vartheta(m)}{m}$. Man findet somit

$$\mathfrak{M}\theta(m) = \mathfrak{M} \cdot \left[1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\right],$$

und auf ganz demselben Wege

$$\mathfrak{M}\theta'(m) = \mathfrak{M} \cdot \left[1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right].$$

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen mit einander und mit Rücksicht auf die Formel (27) vor. Abschn. gewinnt man folgendes Resultat:

$$\mathfrak{M}\theta(m) = \mathfrak{M}\theta'(m) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{p}}. \tag{31}$$

Stellt man diese Gleichung für alle Primzahlen $2, 3, 5, 7, \ldots$ bis zur Primzahl p hin auf, indem man sich der Bedeutung der Zeichen $\theta(m)$, $\theta'(m)$ erinnert, und multiplicirt sie dann in einander, so kommt allgemein:

$$\mathfrak{M}f(m) = \mathfrak{M}f(m;\ 2, 3, \ldots p) \cdot \prod_{2}^{p} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{p}}. \tag{32}$$

Nun ist einleuchtend, dass, weil alle ganzen Zahlen bis zur Primzahl p hin nur aus Potenzen von $2, 3, 5, \ldots p$ zusammengesetzt sind, für alle diese Zahlen

$$f(m;\ 2, 3, \ldots p) = f(1) = 1$$

sein muss; je grösser also die Primzahl p gedacht wird, für um so mehr Zahlen am Anfang der natürlichen Zahlenreihe wird die Funktion $f(m;\ 2, 3, \ldots p)$ den gleichen Werth 1 haben; und, wenn man sämmtliche Primzahlen umfasst, so wird

$$f(m;\ 2, 3, 5, 7, \ldots)$$

für jede Zahl m gleich 1, und folglich auch der mittlere Werth dieser Funktion:

$$\mathfrak{M}f(m;\ 2, 3, 5, 7, \ldots) = 1 \tag{33}$$

sein. Geht man demnach in der Formel (32) zur Grenze über, indem man die Menge der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots p$ unendlich wachsen lässt, so kann man aus ihr schliessen:

$$\mathfrak{M}f(m) = \prod_{2}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{p}}, \tag{34}$$

d. h. gleich dem über alle Primzahlen in der natürlichen Reihe genommenen Produkte, welches nichts anderes ist, als die gleichfalls in der natürlichen Reihenfolge genommene Summe

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Der Ausdruck (34), noch mit τ multiplicirt, ist aber ein zweiter Ausdruck für die mittlere Anzahl aller Darstellungen einer Zahl m durch das Formensystem der Determinante D, und seine Vergleichung mit dem Ausdrucke $\frac{\tau\vartheta}{2}H$ giebt sogleich die Formel (22) für die Classenanzahl H wieder. —

Mit Recht hebt jedoch Dedekind in seinen Bemerkungen zu Gauss' handschriftlichen Notizen (Gauss' W. Bd. II p. 296) hervor, dass der Grenzübergang, den wir in der Gleichung (32) gemacht haben, nicht ohne Bedenken ist. Denn das Zeichen

$$\mathfrak{M}f(m;\ 2,\ 3,\ \ldots\ p)$$

bedeutet den Grenzwerth

$$\lim_{m=\infty}\frac{\Sigma f(m;\ 2,\ 3,\ \ldots\ p)}{m},$$

und wenn wir daher nun in (32) die Anzahl der Primzahlen unendlich wachsen lassen, so gelangen wir rechts zu dem Grenzwerthe

$$\lim_{p=\infty,\ m=\infty}\lim\frac{\Sigma f(m;\ 2,\ 3,\ \ldots\ p)}{m},$$

während

$$f(m;\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots) = \lim_{p=\infty} f(m;\ 2,\ 3,\ \ldots\ p)$$

und demnach

$$\mathfrak{M}f(m;\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots) = \lim_{m=\infty,\ p=\infty}\lim\frac{\Sigma f(m;\ 2,\ 3,\ \ldots\ p)}{m}$$

ist; ohne weiteres ist aber nicht einleuchtend, dass dieser Grenzwerth dem vorigen mit umgekehrter Ordnung der beiden Grenzübergänge gleich ist. Aus diesem Grunde fügt Dedekind seinen Ergänzungen der Gaussischen Notizen noch eine weitere Betrachtung über den Weg hinzu, auf welchem anscheinend Gauss diese Schwierigkeit vermieden habe; doch wollen wir hier darüber hinweggehen und verweisen den Leser auf Dedekind's eigene Darstellung a. a. O. —

7. Unsere weitere Aufgabe besteht nun darin, den Werth der Summe, welche in der Formel (22) auftritt, näher zu bestimmen und so den Werth der Classenanzahl H, oder, wie wir genauer sie jetzt bezeichnen wollen, $H(D)$ unter endlicher Form anzugeben. Durch eine einfache Bemerkung können wir uns die Lösung dieser Aufgabe wesentlich erleichtern. Betrachten wir nämlich neben den Formen der Determinante D diejenigen der Determinante $D' = D \cdot S^2$, so würde ihre Classenanzahl jener allgemeinen Formel gemäss

$$H(DS^2) = \frac{2}{\vartheta'} \cdot \sum_1^\infty \left(\frac{D'}{n}\right) \frac{1}{n} \tag{35}$$

sein, wenn mit ϑ' der zu ϑ analoge Werth, nämlich der kleinste positive reelle Werth bezeichnet wird, welchen der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{D'}} \cdot \log\left(t' + u'\sqrt{D'}\right)$$

für alle ganzzahligen Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$t'^2 - D'u'^2 = 1$$

annehmen kann, und wo statt der Summe auch der Grenzwerth

$$\lim_{\varrho=0} \sum_1^\infty \left(\frac{D'}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

gesetzt werden darf. Sind nun $r, r', r'', \ldots$ diejenigen Primzahlen, welche in S aber nicht in $2D$ aufgehen, $p, p', p'', \ldots$ die Primfaktoren von $2D$, so sind $p, p', p'', \ldots$ zusammengenommen mit $r, r', r'', \ldots$ die sämmtlichen in $2D'$ aufgehenden Primzahlen. Nach (22) des 1. Abschnittes ergiebt sich aber

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D'}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \prod \frac{1}{1 - \left(\frac{D'}{q}\right) \frac{1}{q^{1+\varrho}}},$$

wenn das Produkt auf alle nicht in $2D'$ aufgehenden, also auf alle, von den p und von den r verschiedenen Primzahlen bezogen wird; ebenso ist

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \prod \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{q}\right) \frac{1}{q^{1+\varrho}}},$$

wenn das Produkt auf alle, von den p verschiedenen Primzahlen d. i. auf die vorigen Primzahlen und die Primzahlen r bezogen wird; da zudem $\left(\frac{D'}{q}\right) = \left(\frac{D}{q}\right)$ gesetzt werden kann, so ist hiernach

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_1^\infty \left(\frac{D'}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}} \cdot \prod_r \frac{1}{1-\left(\frac{D}{r}\right)\frac{1}{r^{1+\varrho}}}$$

oder umgekehrt

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D'}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}} \cdot \prod_r \left(1-\left(\frac{D}{r}\right)\frac{1}{r^{1+\varrho}}\right).$$

Durch den Uebergang zur Grenze $\varrho = 0$ folgt hieraus sogleich

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D'}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} \cdot \prod_r \left(1-\left(\frac{D}{r}\right)\frac{1}{r}\right)$$

und nun durch Vergleichung der Formeln (22) und (35) die Beziehung

$$H(DS^2) = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \cdot H(D) \cdot \prod_r \left(1-\left(\frac{D}{r}\right)\frac{1}{r}\right). \tag{36}$$

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle einer negativen und einer positiven Determinante.

Ist D negativ, $D = -\Delta$, so ist, wenn $\Delta > 1$ ist,

$$\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}};$$

desgleichen wird dann

$$\vartheta' = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta S^2}} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$$

sein. Man findet also

$$H(-\Delta S^2) = H(-\Delta) \cdot S \cdot \prod_r \left(1-\left(\frac{-\Delta}{r}\right)\frac{1}{r}\right). \tag{36^1}$$

Im Falle $\Delta = 1$ dagegen ist

$$\vartheta = \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{\pi}{2},$$

während ϑ' seinen Werth beibehält; da zudem für die Determinante $D = -1$ nur eine Classe, nämlich die Hauptclasse

mit der Hauptform $x^2 + y^2$ vorhanden, also $H(-\Delta) = 1$ ist, findet sich in diesem Falle einfach

$$(36^2) \qquad H(-S^2) = \frac{1}{2} S \cdot \prod_r \left(1 - (-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{1}{r}\right).$$

Ist dagegen D positiv, so ist

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{D}} \log(T + U\sqrt{D}),$$

wenn T, U die Fundamentalauflösung der Gleichung

$$(37) \qquad t^2 - Du^2 = 1$$

bezeichnet; entsprechend wird

$$\vartheta' = \frac{1}{\sqrt{D'}} \cdot \log(T' + U'\sqrt{D'})$$

sein, wenn T', U' die Fundamentalauflösung der Gleichung

$$(38) \qquad t^2 - DS^2 \cdot u^2 = 1$$

bedeutet. Zwischen beiden Auflösungen aber besteht eine einfache Beziehung. Denn offenbar bilden $t = T'$, $u = U'S$ eine Lösung der Gleichung (37) und demnach ist bekanntlich für einen bestimmten positiven ganzzahligen Exponenten N

$$T' + U'S \cdot \sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^N,$$

und zwar ist diese Potenz die niedrigste Potenz von $T + U\sqrt{D}$, in deren Entwicklung der Coefficient von $\sqrt{D}$ durch S aufgeht; denn wäre $\mu < N$ und in

$$t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^\mu$$

$u = u'S$ theilbar durch S, so wäre offenbar t, u' eine Auflösung der Gleichung (38), aber, da $u' < U'$, wäre dann T', U' nicht die Fundamentalauflösung dieser Gleichung. Hiernach darf man sagen:

Ist N der Exponent der niedrigsten Potenz von $T + U\sqrt{D}$, in deren Entwicklung der Coefficient von $\sqrt{D}$ durch S theilbar ist, so ist

$$T' + U'\sqrt{D'} = (T + U\sqrt{D})^N$$

und daher

$$\vartheta' = \frac{N}{S\sqrt{D}} \cdot \log(T + U\sqrt{D}),$$

sodass mit Rücksicht auf (36) sich folgende Gleichung ergiebt:

$$(36^3) \qquad H(DS^2) = H(D) \cdot \frac{S}{N} \cdot \prod_r \left(1 - \left(\frac{D}{r}\right)\frac{1}{r}\right).$$

8. Dirichlet hat gezeigt*), wie der hier auftretende Exponent N mittels der Zerlegung von S in seine Primfaktoren ermittelt werden kann. Sei diese letztere:

$$S = q^{\alpha} \cdot q'^{\alpha'} \cdot q''^{\alpha''} \cdots,$$

sodass unter den Primfaktoren $q, q', q'', \ldots$ auch die mit r bezeichneten sich befinden. Ist

$$(T + U\sqrt{D})^N$$

diejenige kleinste Potenz von $T + U\sqrt{D}$, in deren Entwicklung der Coefficient von $\sqrt{D}$ durch S theilbar ist, so ist dieser Coefficient auch durch jede der Primzahlen $q, q', q'', \ldots$ theilbar. Sei nun

$$t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^{\nu}$$

die niedrigste Potenz, für welche u durch q, t dann also nicht durch q theilbar ist; zunächst ist dann einleuchtend, dass auch in jeder Potenz, deren Exponent μ ein Vielfaches von ν ist, der Coefficient von $\sqrt{D}$ durch q aufgehen muss, denn, ist $\mu = \nu \cdot e$, so ist in der Potenz

$$(t + u\sqrt{D})^e$$

dieser Coefficient der folgende:

$$(39) \qquad u\left[et^{e-1} + \frac{e(e-1)(e-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^{e-3} u^2 D + \cdots\right];$$

ist dagegen μ kein Vielfaches von ν, sondern

$$\mu = c\nu + \lambda, \qquad \lambda < \nu,$$

so kann der Coefficient von $\sqrt{D}$ in der μ^{ten} Potenz nicht durch q theilbar sein, denn

$$(T + U\sqrt{D})^{\mu} = (T + U\sqrt{D})^{c\nu} \cdot (T + U\sqrt{D})^{\lambda}$$

kann gleich

$$(t_1 + u_1\sqrt{D}) \cdot (t' + u'\sqrt{D})$$

*) S. Crelle's Journal Bd. 53 p. 127.

gesetzt werden, worin u_1 durch q theilbar, also t_1 nicht theilbar durch q, und auch u' nicht theilbar durch q ist; daraus folgt aber als Coefficient von $\sqrt{D}$:

$$t_1 u' + u_1 t'$$

d. i. eine nicht durch q theilbare Zahl.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass N jedenfalls ein Vielfaches von ν sein muss. Ist aber $N = \nu e$ und bezeichnen q^δ, q^ε die höchsten Potenzen von q, welche resp. in u und in e aufgehen, so folgt aus dem Ausdrucke (39), dass der Coefficient von $\sqrt{D}$ in der entwickelten Potenz

$$(T + U\sqrt{D})^N,$$

da t nicht theilbar ist durch q, genau durch die Potenz $q^{\delta+\varepsilon}$ theilbar ist*). Da er nach der Annahme durch S also durch q^α theilbar sein soll, so muss, falls nicht schon $\delta > \alpha$ ist, e durch $q^{\alpha-\delta}$ theilbar sein; ist $\delta \geqq \alpha$, so braucht e nicht mehr durch q theilbar zu sein; bedeutet ε je nach diesen beiden Fällen $\alpha - \delta$ oder 0, so ist für die Theilbarkeit des Coefficienten durch q^α nothwendig und hinreichend, dass N ein Vielfaches von νq^ε sei.

Bezüglich der anderen in S aufgehenden Primfaktoren gelten die gleichen Betrachtungen; werden daher die auf sie bezüglichen analogen Zahlen durch accentuirte Buchstaben bezeichnet, so findet sich für N die Bestimmung: dass N das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$\nu q^\varepsilon, \quad \nu' q'^{\varepsilon'}, \quad \nu'' q''^{\varepsilon''}, \ldots$$

sein muss.

Hieraus hat Dirichlet einen sehr interessanten Schluss gezogen. Die Zahlen $\nu, \delta, \nu', \delta', \ldots$ sind unabhängig von den

---

*) In der That, setzt man $e = e' q^\varepsilon$, wo e' nicht durch q theilbar ist, so kommt die Erhebung des Ausdrucks $t + u\sqrt{D}$ zur Potenz e auf die successive Erhebung zur Potenz e' und ε-malige Erhebung zur Potenz q hinaus. Der Ausdruck (39) lehrt aber, dass bei der Erhebung von $t + u\sqrt{D}$ zu einer Potenz, deren Exponent nicht durch q aufgeht, der Coefficient von $\sqrt{D}$ in der Entwicklung keinen neuen Faktor q gewinnen kann, dass er aber bei jedesmaliger Erhebung zur q^{ten} Potenz den Faktor q genau einmal gewinnt.

Werthen der Exponenten $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$; für hinreichend grosse Werthe dieser Exponenten aber sind die vorstehenden Zahlen mit den folgenden:

$$\nu q^{\alpha-\delta}, \quad \nu' q'^{\alpha'-\delta'}, \quad \nu'' q''^{\alpha''-\delta''}, \quad \ldots$$

identisch, deren kleinstes gemeinsames Vielfache N von der Form sein wird

$$M \cdot q^{\alpha-\delta+\beta} q'^{\alpha'-\delta'+\beta'} q''^{\alpha''-\delta''+\beta''} \ldots,$$

unter $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ nicht negative, von den Werthen der Exponenten $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ unabhängige Zahlen verstanden, während M weder von diesen, noch von den Primfaktoren $q, q', q'', \ldots$ überhaupt abhängig ist. Demnach wird der Quotient

$$\frac{S}{N} = \frac{1}{M} \cdot q^{\delta-\beta} q'^{\delta'-\beta'} \ldots$$

gleichfalls von den $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ unabhängig sein. Da nun in der Formel (36[3]) das zur Rechten befindliche Produkt zwar von den zu den Primzahlen $q, q', q'', \ldots$ gehörigen Primzahlen $r, r', r'', \ldots$, aber nicht davon abhängt, wie oft sie in S aufgehen, d. h. auch unabhängig ist von den $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, so zeigt sich der eigenthümliche Umstand, dass aus jeder positiven Determinante D, indem man für $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ beliebige hinreichend grosse Werthe wählt, unendlich viel andere, der Formel

$$D' = D \cdot S^2$$

angehörige Determinanten abgeleitet werden können, welchen allen die gleiche Classenanzahl entspricht.

Später werden wir auf dieses Ergebniss zurückkommen, um daraus eine neue wichtige Folgerung herzuleiten. Für den Augenblick schliessen wir diese Betrachtung, indem wir bemerken, dass es, den Formeln (36) gemäss, genügen wird, bei der weiteren Berechnung der Classenanzahl denjenigen Fall zu verfolgen, in welchem die Determinante durch keine Quadratzahl ausser Eins mehr theilbar ist, eine Annahme, unter welcher die Rechnung sich wesentlich vereinfacht.

Siebenter Abschnitt.

Die Gaussischen Summen.

1. Um die Classenanzahl als Funktion der Determinante ausgedrückt zu erhalten, haben wir noch die unendliche Reihe, welche in der Formel (22) vor. Abschn. auftritt, zu summiren, d. i. unter endlicher Form darzustellen. Hierzu bedürfen wir gewisser Summen, welche zuerst von Gauss betrachtet und bestimmt worden sind und welche daher als Gaussische Summen bezeichnet zu werden pflegen. Gauss stiess auf sie in seiner Lehre von der Kreistheilung. Ist nämlich p eine ungerade Primzahl, μ irgend eine durch p nicht theilbare Zahl, so ergiebt die Formel

$$e^{\frac{2s\mu\pi i}{p}} = \cos\frac{2s\mu\pi}{p} + i\sin\frac{2s\mu\pi}{p}$$

die sämmtlichen von 1 verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$x^p = 1,$$

wenn darin s die Werthe 1, 2, 3, $\ldots p-1$ durchläuft. Wir unterscheiden diejenigen Werthe a von s, welche quadratische Reste (mod. p) sind, von denjenigen Werthen b von s, welche quadratische Nichtreste (mod. p) sind. Setzen wir dann

$$S_p = \sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right) e^{\frac{2s\mu\pi i}{p}}, \tag{1}$$

so ist

$$S_p = \sum_a e^{\frac{2a\mu\pi i}{p}} - \sum_b e^{\frac{2b\mu\pi i}{p}}, \tag{2}$$

während zugleich

$$-1 = \sum_a e^{\frac{2a\mu\pi i}{p}} + \sum_b e^{\frac{2b\mu\pi i}{p}} \tag{3}$$

oder

$$0 = 1 + \sum_a e^{\frac{2a\mu\pi i}{p}} + \sum_b e^{\frac{2b\mu\pi i}{p}} \tag{4}$$

ist, da rechts die Summe aller Wurzeln der obigen Gleichung steht, welche Null ist. Die letztere Gleichung gestattet, die Summe S_p auch so zu schreiben:

$$S_p = 1 + 2\sum_a e^{\frac{2a\mu\pi i}{p}}$$

oder noch einfacher folgendermassen:

$$S_p = \sum_{s=0}^{p-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{p}}. \tag{5}$$

Aus (2) und (3) können die beiden Summen

$$\sum_a e^{\frac{2a\mu\pi i}{p}}, \quad \sum_b e^{\frac{2b\mu\pi i}{p}}$$

berechnet werden, sobald S_p bekannt ist. Nun bedarf man ihres Werthes in der Gaussischen Kreistheilungslehre, es stellt sich aber der eigenthümliche Umstand heraus, dass zwar der absolute Werth oder, was dasselbe sagt, das Quadrat von S_p sehr leicht sich ermitteln lässt, die genaue Feststellung des Vorzeichens, das jenem Werthe beizulegen ist, aber sehr erheblichen Schwierigkeiten begegnet; und unsere folgenden Betrachtungen werden in der That zeigen, dass diese Feststellung einem sehr viel höher gelegenen Gebiete der Analysis entspringt. Erst nach vielen und mannigfaltigen vergeblichen Versuchen gelang es Gauss, in seiner Abhandlung summatio quarandum serierum singularium das Ziel zu erreichen und den genauen Werth nicht allein der Summe S_p, sondern der allgemeineren Summe

$$S_n = \sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{n}}, \tag{6}$$

in welcher n irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, zu bestimmen. Die Methode, welche er hierzu verwendete, besteht in der Umformung der Summe in ein Produkt, dessen genauer Werth leichter angebbar ist, und er erreicht diese Umformung mittels einfacher Eigenschaften zweier eigenthümlicher Reihen, die beide zu diesem Zwecke verwendbar sind, nämlich der Reihen:

$$(7) \qquad f(x,m) = 1 - \frac{1-x^m}{1-x} + \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

und

$$(8) \qquad F(x,m) = 1 + x^{1/2}\frac{1-x^m}{1-x} + x\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^{3/2}(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \cdots,$$

welche, so oft m eine positive ganze Zahl ist, offenbar nur endliche Reihen sind.

Später hat Lebesgue zu gleichem Zwecke die beiden schon in Nr. 11 des zweiten Abschnittes eingeführten Ausdrücke $f(z)$ und $F(z)$ benutzt. Da die Funktion $f(z)$ mit dem Ausdrucke $f(x,m)$ identisch wird, wenn man in ihr x^{-1} statt x und x^m statt z setzt, so zeigt sich auf solche Weise, dass die eigentliche Quelle der Gaussischen Methode in der Lehre von den elliptischen Funktionen zu sehen ist, der jene Lebesgue'schen Funktionen zugehören, und die nachfolgenden Betrachtungen werden dies vollauf bestätigen.

Für den Fall $n = p$ hat übrigens Cauchy einen einfacheren Weg angegeben, um die Summe S_p in ein Produkt zu verwandeln und so ihren genauen Werth zu ermitteln*), und Kronecker hat, den Grundgedanken dieser Methode festhaltend, in sehr eleganter Weise dieselbe Gaussische Formel bewiesen**). Doch sind diese Methoden nicht in gleicher Weise anwendbar, wenn n von einer Primzahl verschieden ist.

---

*) Méthode simple et nouvelle pour la détermination des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes, Liouville's Journal J. 1840, t. 5, p. 154.

**) S. Liouville's Journal 1856, sér. II, t. I, p. 392.

2. Wir legen unseren weiteren Betrachtungen die Summe

$$\varphi(m, n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} \tag{9}$$

zu Grunde, welche für den Fall einer geraden Zahl $m = 2\mu$ mit S_n identisch wird; unter n verstehen wir stets eine positive ganze Zahl, während m irgend welche ganze Zahl bedeutet*). Entwickeln wir zunächst die einfachsten Eigenschaften dieser Summe.

1) Ihr Werth ist ohne weiteres genau angebbar, sobald m und n zugleich ungerade Zahlen sind. Denn in diesem Falle darf man schreiben:

$$\varphi(m, n) = 1 + \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} + e^{(n-s)^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} \right);$$

da aber

$$e^{(n-s)^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} = -e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}}$$

sich ergiebt, findet man sogleich

$$\varphi(m, n) = 1 \quad (m, n \text{ ungerade}). \tag{10}$$

Wir werden demnach in allem Folgenden wenigstens eine der beiden Zahlen m, n als gerade voraussetzen dürfen.

2) Für $n = 1$ ergiebt sich, gleichviel, ob m gerade oder ungerade ist,

$$\varphi(m, 1) = 1. \tag{11}$$

3) Für $n = 2$ findet sich, welchen Werth m auch hat,

$$\varphi(m, 2) = 1 + i^m. \tag{12}$$

4) Offenbar ist stets

$$\varphi(m', n) = \varphi(m, n), \text{ wenn } m' \equiv m \pmod{2n} \tag{13}$$

ist; also ist

*) Kronecker bezeichnet in seiner Abhandlung: Ueber den vierten Gaussischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste, in den Monatsber. d. Berliner Akademie v. 29. Juli und 28. October 1880 die Gaussischen Summen mit $G\left(\frac{-mi}{n}\right)$, doch scheint es uns richtiger, sie mit Dirichlet als eine Funktion zweier Elemente: m und n zu bezeichnen.

(14) $\varphi(2\mu', n) = \varphi(2\mu, n)$, wenn $\mu' \equiv \mu \pmod{n}$

ist.

5) Sei k eine zu n prime Zahl, so wird zugleich mit s auch ks alle Reste (mod. n) durchlaufen, demnach wird

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{n}} = \sum_{s=0}^{n-1} e^{(ks)^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{n}}$$

sein, eine Gleichung, welche anders geschrieben die Formel ergiebt:

(15) $$\varphi(2k^2\mu, n) = \varphi(2\mu, n)$$

(wenn k, n relativ prim).

6) Bildet man das Produkt der beiden Summen

$$\varphi(2\mu n', n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i n'}{n}}$$

$$\varphi(2\mu n, n') = \sum_{s'=0}^{n'-1} e^{s'^2 \cdot \frac{2\mu\pi i n}{n'}},$$

so findet man zunächst

$$\varphi(2\mu n', n) \cdot \varphi(2\mu n, n') = \sum_{s,s'} e^{(n'^2 s^2 + n^2 s'^2) \cdot \frac{2\mu\pi i}{nn'}}$$

d. i. gleich einer Doppelsumme, in welcher s die Werthe $0, 1, 2 \cdots n-1$ und s' die Werthe $0, 1, 2, \cdots n'-1$ zu durchlaufen hat. Den Exponenten von e darf man jedoch folgendermassen schreiben:

$$(n's + ns')^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{nn'},$$

da dieser vom früheren sich nur um ein ganzes Vielfache von $2\pi i$ unterscheidet. Sind aber n, n' relative Primzahlen, so durchläuft $n's + ns$ ein vollständiges Restsystem (mod. nn'), wenn s und s' alle ihre Werthe durchlaufen, und da für $n's + ns'$ im Exponenten von e sein kleinster Rest (mod. nn') gesetzt werden darf, findet sich die Doppelsumme gleich $\varphi(2\mu, nn')$ d. h. folgende Formel:

(16) $$\varphi(2\mu n', n) \cdot \varphi(2\mu n, n') = \varphi(2\mu, nn'),$$

wenn n, n' relative Primzahlen sind.

7) Da, wenn h eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\varphi(hm, hn) = \sum_{s=0}^{hn-1} e^{s^2 \cdot \frac{hm\pi i}{hn}} = \sum_{s=0}^{hn-1} e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}}$$

auch gleich

$$\sum_{0}^{n-1} \left(e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} + e^{(n+s)^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} + \cdots + e^{((h-1)n+s)^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} \right)$$

gesetzt werden kann und, wenn wenigstens eine der Zahlen m, n gerade ist, die sämmtlichen Exponentialgrössen unter dem Summenzeichen gleich der ersten von ihnen sind, so findet sich

$$\varphi(hm, hn) = h \cdot \varphi(m, n), \tag{17}$$

so oft wenigstens eine der Zahlen m, n gerade ist.

3. Die hier zusammengestellten Eigenschaften der Funktion $\varphi(m, n)$ genügen, zu zeigen, wie die Bestimmung ihres allgemeinen Werthes auf den Fall zurückgeführt werden kann, in welchem n eine Primzahl ist.

Wir dürfen uns hierzu auf die Voraussetzung beschränken, dass m gerade: $m = 2\mu$ ist; denn wäre m ungerade, so wäre $\varphi(m, n)$ entweder nach (10) gleich 1, wenn auch n ungerade ist, oder man hätte andernfalls nach (17)

$$\varphi(m, n) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(2m, 2n)$$

d. i., man käme auf den Fall eines geraden ersten Argumentes der Funktion zurück. Betrachten wir demnach nur die Funktion $\varphi(2\mu, n)$.

Nun kann man stets $n = 2^\alpha \cdot \nu$ setzen, wo ν ungerade, also prim zu 2^α ist. Demnach ist zufolge (16)

$$\varphi(2\mu, 2^\alpha \nu) = \varphi(2^{\alpha+1} \cdot \mu, \nu) \cdot \varphi(2\mu\nu, 2^\alpha). \tag{18}$$

Nach dieser Formel kommt die Bestimmung von $\varphi(2\mu, n)$ auf die Fälle zurück, in denen n entweder ungerade oder eine Potenz von 2 ist.

Handelt es sich zunächst um $\varphi(2\mu, 2^\alpha)$, so dürfen wir μ ungerade voraussetzen; denn so oft μ gerade, etwa $\mu = 2^\lambda \mu'$ ist, wo nun μ' ungerade, so würde nach (17), wenn $\lambda > \alpha$ ist,

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = 2^\alpha \cdot \varphi(2^{\lambda-\alpha} \cdot 2\mu',\ 1) = 2^\alpha,$$

und, wenn $\lambda < \alpha$ ist,

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = 2^\lambda \cdot \varphi(2\mu',\ 2^{\alpha-\lambda})$$

sein und wir würden auf den vorausgesetzten Fall zurückkommen. Wird hiernach also von vornherein μ als ungerade vorausgesetzt, so lässt sich $\varphi(2\mu, 2^\alpha)$ folgendermassen schreiben:

$$\sum_{s=0}^{2^{\alpha-1}-1}\left(e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{2^\alpha}} + e^{\left(s+2^{\alpha-1}\right)^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{2^\alpha}}\right),$$

also, so lange $\alpha > 2$ ist:

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = 2 \cdot \sum_{0}^{2^{\alpha-1}-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{2^\alpha}}. \tag{19}$$

Andererseits durchläuft der Ausdruck $s = 2^{\alpha-2} \cdot z + s'$ alle Werthe $0, 1, 2, \cdots 2^\alpha - 1$, wenn man s' alle Werthe $0, 1, 2, \cdots 2^{\alpha-2} - 1$, und z alle Werthe $0, 1, 2, 3$ annehmen lässt; demnach darf man

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = \sum_{0}^{2^\alpha-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{2^\alpha}}$$

auch als Doppelsumme so schreiben:

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = \sum_{s',\ z} e^{\left(2^{\alpha-2}z+s'\right)^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{2^\alpha}}$$

und führt diesen Ausdruck leicht in den folgenden über:

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = \sum_{s'}\left(e^{s'^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{2\alpha}} \sum_{z} e^{\mu s' z \pi i}\right)$$

solange $\alpha \gtreqless 4$ ist. Die auf z bezügliche Summe ist aber, da μ ungerade vorausgesetzt ist, gleich Null für jedes ungerade s', dagegen gleich 4 für jeden geraden Werth $s' = 2s''$, sodass man einfacher erhält

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = 4 \cdot \sum_{s''=0}^{2^{\alpha-3}-1} e^{s''^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{2^{\alpha-2}}}.$$

Ist nun $\alpha \gtreqless 4$, so ist $\alpha - 2 \gtreqless 2$, mit Rücksicht auf (19) lässt sich demnach das Resultat so ausdrücken:

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = 2\cdot\varphi(2\mu,\ 2^{\alpha-2}), \tag{20}$$

wenn μ ungerade und $\alpha > 4$ ist.

Wird demnach $\alpha = 2\beta + \gamma$ gesetzt, wo γ einen der Werthe 0 oder 1 hat, so gewinnt man aus vorstehender Reductionsformel leicht folgende andere:

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = 2^{\beta-1}\cdot\varphi(2\mu,\ 2^{\gamma+2}).$$

Für $\gamma = 0$ d. i. für ein gerades α führt diese Formel auf die Funktion

$$\varphi(2\mu,\ 4) = \sum_0^3 e^{s^2\cdot\frac{2\mu\pi i}{4}} = 2(1+i^\mu)$$

zurück und man findet

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = 2^{\alpha/2}\cdot(1+i^\mu) \quad (\alpha \text{ gerade}). \tag{21a}$$

Für $\gamma = 1$ d. i. für ein ungerades α führt die Formel auf die Funktion

$$\varphi(2\mu,\ 8) = \sum_0^7 e^{s^2\cdot\frac{2\mu\pi i}{8}} = 4\cdot e^{\frac{\mu\pi i}{4}}$$

zurück und man findet

$$\varphi(2\mu,\ 2^\alpha) = 2^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot e^{\frac{\mu\pi i}{4}} \quad (\alpha \text{ ungerade}). \tag{21b}$$

Suchen wir nunmehr $\varphi(2\mu, n)$ für den Fall, dass n ungerade ist; wir dürfen dabei voraussetzen, dass μ, n relativ prim sind; denn wäre h ihr grösster gemeinsamer Theiler und

$$\mu = h\mu',\ n = hn',$$

wo nun μ', n' relative Primzahlen bedeuten, so wäre nach (17)

$$\varphi(2\mu,\ n) = h\cdot\varphi(2\mu',\ n')$$

und letztere Funktion zu bestimmen. — Denken wir uns n in seine Primfaktoren zerlegt:

$$n = p^\alpha\cdot p'^{\alpha'}\cdot p''^{\alpha''}\cdots,$$

und setzen alsdann

$$\frac{n}{p^\alpha} = P,\ \frac{n}{p'^{\alpha'}} = P',\ \frac{n}{p''^{\alpha''}} = P'',\ \ldots$$

so ergiebt eine einfache Verallgemeinerung der Gleichung (16) die nachstehende:

$$\varphi(2\mu,\ n) = \prod\prod \varphi(2\mu P,\ p^\alpha), \tag{22}$$

in welcher die Multiplikation zur Rechten sich auf alle Primzahlpotenzen erstreckt, aus denen n besteht. Um $\varphi(2\mu,\ n)$ zu ermitteln, genügt es daher, die Gaussischen Summen für den Fall zu bestimmen, wo n eine Primzahlpotenz p^α ist.

Nun ist

$$\varphi(2\mu,\ p^\alpha) = \sum_0^{p^\alpha - 1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{p^\alpha}}.$$

Setzen wir

$$s = p^{\alpha-1} \cdot z + s',$$

so durchläuft s alle seine Werthe, wenn man s' die Werthe $0, 1, 2, \cdots p^{\alpha-1} - 1$ und z die Werthe $0, 1, 2, \cdots p - 1$ annehmen lässt. Auf solche Weise verwandelt sich die Summe zunächst in die Doppelsumme

$$\sum_{s',\ z} e^{\left(p^{\alpha-1}z + s'\right)^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{p^\alpha}},$$

die aber, so lange $\alpha > 1$ ist, der folgenden gleich ist:

$$\sum_{s'} \left(e^{s'^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{p^\alpha}} \sum_z e^{\frac{4\mu s' z \pi i}{p}} \right);$$

hier verschwindet aber für jeden nicht durch p theilbaren Werth s' die auf z bezügliche Summe, während sie gleich p wird, wenn s' durch p theilbar: $s' = ps''$ ist. In Folge dessen kann man schreiben:

$$\varphi(2\mu,\ p^\alpha) = p \cdot \sum_{s''=0}^{p^{\alpha-2}-1} e^{s''^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{p^{\alpha-2}}}$$

d. i.

$$\varphi(2\mu,\ p^\alpha) = p \cdot \varphi(2\mu,\ p^{\alpha-2}). \tag{23}$$

Setzt man daher $\alpha = 2\beta + \gamma$, wo $\gamma = 0$ oder $\gamma = 1$ ist, so führt die vorstehende Reductionsformel zur folgenden Gleichung:

$$\varphi(2\mu,\ p^\alpha) = p^\beta \cdot \varphi(2\mu,\ p^\gamma)$$

d. i. zur Gleichung

(24a) $$\varphi(2\mu, p^\alpha) = p^{\alpha/2} \quad (\alpha \text{ gerade})$$

und zur Gleichung

(24b) $$\varphi(2\mu, p^\alpha) = p^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \varphi(2\mu, p) \quad (\alpha \text{ ungerade}).$$

Hiermit ist der gewollte Nachweis geliefert, und alles kommt schliesslich darauf hinaus, den Werth von

$$\varphi(2\mu, p) = \sum_0^{p-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{p}}$$

d. i. von S_p zu bestimmen.

Wie schon bemerkt wurde, ist das Quadrat von S_p leicht zu finden. Da nämlich, wenn auch λ eine wie μ durch p nicht theilbare Zahl bezeichnet, λs gleichzeitig mit s alle Reste (mod. p) durchläuft, so kann man

$$S_p = \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{\lambda s}{p}\right) e^{\lambda s \cdot \frac{2\mu\pi i}{p}} = \left(\frac{\lambda}{p}\right) \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) e^{s \frac{2\lambda\mu\pi i}{p}}$$

d. i.

(25) $$\varphi(2\lambda\mu, p) = \left(\frac{\lambda}{p}\right) \cdot \varphi(2\mu, p)$$

setzen. Für $\lambda = -1$ folgt hieraus

$$\varphi(-2\mu, p) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \varphi(2\mu, p)$$

und folglich

$$\varphi(2\mu, p)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \varphi(2\mu, p) \cdot \varphi(-2\mu, p)$$

d. i.

$$\varphi(2\mu, p)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \sum_{s, s'} e^{(s^2 - s'^2) \frac{2\mu\pi i}{p}}.$$

Setzt man nun

$$r \equiv s + s', \quad t \equiv s - s' \pmod{p},$$

so entspricht jeder Restcombination s, s' (mod. p) eine bestimmte Restcombination r, t, und umgekehrt jeder solchen eine bestimmte Restcombination s, s' mittels der auflösbaren Congruenzen

$$2s \equiv r + t, \quad 2s' \equiv r - t \pmod{p}.$$

Folglich kann man der obigen Formel auch die Gestalt geben:

$$\varphi(2\mu, p)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \sum_{r,t} e^{rt \cdot \frac{2\mu\pi i}{p}};$$

die nach t genommene Summe hat aber den Werth 0, so oft r von 0 verschieden ist, und für $r = 0$ ist sie gleich p; folglich kommt

$$\varphi(2\mu, p)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot p. \tag{26}$$

Hieraus folgt nun gemäss den Formeln (24a) und (24b)

$$\varphi(2\mu, p^\alpha)^2 = p^\alpha \quad \text{oder} \quad \varphi(2\mu, p^\alpha)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p^\alpha,$$

je nachdem α gerade oder ungerade ist, und folglich allgemein

$$\varphi(2\mu, p^\alpha)^2 = \left(\frac{-1}{p^\alpha}\right) \cdot p^\alpha,$$

und nunmehr zufolge (22) für jede ungerade Zahl n, zu welcher μ prim ist,

$$\varphi(2\mu, n)^2 = \left(\frac{-1}{n}\right) \cdot n. \tag{27}$$

Somit ist für jede ungerade Zahl n der absolute Werth der Gaussischen Summe $\varphi(2\mu, n)$ ermittelt und es handelt sich jetzt weiter darum, zu entscheiden, ob in der Formel

$$\varphi(2\mu, n) = \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{n}\right) n}$$

das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist.

4. Wir schlagen zu diesem Zwecke zuerst den Weg ein, welchen Dirichlet angegeben hat*). Er stützt sich dabei auf eine an sich interessante Formel, welche der Lehre von den Fourier'schen Reihen entstammt**).

Sei $f(x)$ eine Funktion, welche für jedes x zwischen den Grenzen 0 und $2h\pi$ einschliesslich endlich und stetig ist und nicht unendlich viele Maxima oder Minima besitzt. Das Integral

$$J_s = \int_0^{2h\pi} f(x) \cos sx \, dx, \tag{28}$$

*) Dirichlet sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies, Crelle's Journal Bd. 17.

**) S. Kronecker's Abhandlung „Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel", Sitzungsber. der Berl. Akad. 1885 p. 841.

in welchem s eine ganze Zahl bedeutet, kann folgendermassen zerlegt werden:

$$J_s = \sum_{r=0}^{h-1} \left(\int_{2r\pi}^{(2r+1)\pi} f(x) \cos sx\, dx + \int_{(2r+1)\pi}^{(2r+2)\pi} f(x) \cos sx\, dx \right);$$

wird hier das erste Integral durch die Substitution von $2r\pi + x$ an Stelle von x, das zweite durch die Substitution von $(2r+2)\pi - x$ an Stelle von x umgeformt, so erhält man

$$J_s = \sum_{r=0}^{h-1} \int_0^{\pi} \left[f(2r\pi + x) + f\left((2r+2)\pi - x\right) \right] \cos sx\, dx$$

oder

$$J_s = \int_0^{\pi} F(x) \cos sx\, dx, \tag{29}$$

wenn gesetzt wird

$$\begin{aligned} F(x) = {} & f(x) + f(2\pi - x) + f(2\pi + x) + f(4\pi - x) + \cdots \\ & + f(2(h-1)\pi + x) + f(2h\pi - x). \end{aligned} \tag{30}$$

Nach der Theorie der Fourier'schen Reihen darf man aber setzen

$$F(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \cos sx,$$

wo allgemein der Coefficient

$$c_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos sx\, dx$$

ist, und hieraus folgt für $x = 0$:

$$F(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_s \int_0^{\pi} F(x) \cos sx\, dx.$$

Somit ergiebt sich die Formel:

$$\begin{aligned} & f(0) + 2f(2\pi) + 2f(4\pi) + \cdots + 2f(2(h-1)\pi) + f(2h\pi) \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_s \int_0^{2h\pi} f(x) \cos sx\, dx, \end{aligned} \tag{31}$$

welche die Dirichlet'sche Hilfsformel ist.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die Summe

$$\varphi(2\mu, n) = \sum_{0}^{n-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\mu\pi i}{n}}$$

zunächst für den Fall, dass n eine durch 4 theilbare Zahl, $n = 4\nu$ ist, wo ν positiv gedacht wird; mit λ bezeichnen wir den absoluten Werth von μ, sodass $\mu = \varepsilon\lambda$ und $\varepsilon = \pm 1$ ist, je nachdem μ positiv oder negativ ist. Man hat also

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \sum_{0}^{4\nu-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\varepsilon\lambda\pi i}{4\nu}},$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = 1 + e^{(2\nu)^2 \cdot \frac{2\varepsilon\lambda\pi i}{4\nu}} + 2 \cdot \sum_{1}^{2\nu-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\varepsilon\lambda\pi i}{4\nu}}. \tag{32}$$

Setzt man nun

$$f(x) = e^{x^2 \cdot \frac{\varepsilon\lambda i}{8\nu\pi}},$$

so nimmt der Ausdruck zur Rechten die Gestalt an:

$$f(0) + f(4\nu\pi) + 2\sum_{s=1}^{2\nu-1} f(2s\pi)$$

und folglich ergiebt sich mit Rücksicht auf die Dirichletsche Hilfsformel

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_s \int_{0}^{4\nu\pi} e^{x^2 \cdot \frac{\varepsilon\lambda i}{8\nu\pi}} \cos sx \, dx.$$

Durch die Substitution $x = 2\nu z$ geht die vorstehende Gleichung in die folgende über:

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \frac{2\nu}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_s \int_{0}^{2\pi} e^{z^2 \cdot \frac{\varepsilon\lambda i\nu}{2\pi}} \cdot \cos 2s\nu z \cdot dz,$$

der man auch diese geeignetere Gestalt geben kann:

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \frac{2\nu}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_s \int_{0}^{2\pi} e^{z^2 \cdot \frac{\varepsilon\lambda\nu i}{2\pi} + 2s\nu z i} \cdot dz$$

oder auch diese:

$$(33)\quad \varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \frac{2\nu}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_s\, e^{-\frac{2\nu\varepsilon}{\lambda}s^2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{\frac{\varepsilon\lambda\nu i}{2\pi}\left(z+\frac{2\varepsilon s\pi}{\lambda}\right)^2}\cdot dz$$

Wir nehmen nun zuerst $\lambda = 1$ an. Dann ist

$$\varphi(2\varepsilon, 4\nu) = \frac{2\nu}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_s\int_0^{2\pi} e^{\frac{\varepsilon\nu i}{2\pi}(z+2\varepsilon s\pi)^2}\cdot dz,$$

was, wie man sogleich übersieht, einfacher:

$$\varphi(2\varepsilon, 4\nu) = \frac{2\nu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\varepsilon\nu z^2 i}{2\pi}}\, dz$$

oder, wenn man die Substitution

$$x = +\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\cdot z$$

anwendet, die Quadratwurzel mit positivem Werthe genommen, auch so geschrieben werden kann:

$$\varphi(2\varepsilon, 4\nu) = +2\sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon x^2 i}\, dx\,.$$

Den Werth des von ν unabhängigen Integrals findet man sogleich, wenn man für ν einen besonderen Werth, etwa $\nu = 1$ einsetzt; denn da alsdann

$$\varphi(2\varepsilon, 4) = 2(1 + i^\varepsilon) = 2(1 + \varepsilon i)$$

ist, findet sich

$$(34)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon x^2 i}\, dx = +\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(1 + \varepsilon i)$$

und nunmehr folgende Gleichung:

$$(35)\qquad \varphi(2\varepsilon, 4\nu) = +\sqrt{4\nu}\cdot(1 + \varepsilon i).$$

Kehren wir aber zur allgemeineren Formel (33) wieder zurück. Setzt man $s = \lambda y + r$, so wird s alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, wenn auch y es thut, r aber alle ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots \lambda - 1$ annimmt. Die einfache Summe zur Rechten geht dann über in eine Doppelsumme von der Gestalt:

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \frac{2\nu}{\pi} \cdot \sum_{y,r} e^{-\frac{2\nu\varepsilon}{\lambda} r^2 \pi i} \int_0^{2\pi} e^{\frac{\varepsilon\lambda\nu i}{2\pi}\left(z + \frac{2\varepsilon r\pi}{\lambda} + 2\varepsilon y\pi\right)^2} \cdot dz,$$

wo nun, ähnlich wie zuvor, die auf y bezügliche Summation von Integralen in ein von $-\infty$ bis $+\infty$ reichendes Integral umgeformt und daher geschrieben werden darf

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \frac{2\nu}{\pi} \sum_{r} e^{-\frac{2\varepsilon r}{\lambda} r^2 \pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\varepsilon\lambda\nu i}{2\pi}\left(z + \frac{2\varepsilon r\pi}{\lambda}\right)^2} \cdot dz.$$

Das Integral aber erweist sich bei der Substitution $z' = z + \frac{2\varepsilon r\pi}{\lambda}$ als unabhängig von r, und folglich ergiebt sich

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \frac{2\nu}{\pi} \sum_{r=0}^{\lambda-1} e^{-r^2 \cdot \frac{2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\varepsilon\lambda\nu z^2 i}{2\pi}} dz.$$

Wird hier endlich

$$x = + \sqrt{\frac{\lambda\nu}{2\pi}} \cdot z$$

gesetzt und die Bedeutung der Summe, sowie die Formel (34) beachtet, so findet sich folgende, die Gleichung (35) als besonders einfachen Fall in sich enthaltende, sehr bemerkenswerthe Reciprocitätsbeziehung:

$$(36) \qquad \varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = + \sqrt{\frac{4\nu}{\lambda}} \cdot (1 + \varepsilon i) \cdot \varphi(-2\nu\varepsilon, \lambda),$$

in welcher die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist und welche auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(37) \qquad \varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu) = \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right) \cdot \varphi(-2\varepsilon\nu, \lambda),$$

wenn unter dem Zeichen

$$\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right)$$

derjenige Werth der Quadratwurzel aus der complexen Zahl $\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}$ verstanden wird, dessen reeller Theil positiv ist. Wählt man nach Kronecker für die Summe $\varphi(m, n)$ das Zeichen $G\left(\frac{-mi}{n}\right)$, so nimmt diese fundamentale Gleichung folgende Gestalt an:

$$(38) \qquad (\sqrt{\varrho}) \cdot \frac{G(\varrho)}{G\left(\frac{1}{\varrho}\right)} = 1,$$

in welcher ϱ statt $\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}$ steht und $\frac{-\lambda\varepsilon i}{2\nu}$ unter $\frac{1}{\varrho}$ zu verstehen ist, eine Form der Gleichung (37), der man den Vorzug grosser Eleganz nicht bestreiten kann.

5. Nachdem wir diese Reciprocitätsbeziehung, zunächst auf dem Dirichlet'schen Wege, abgeleitet haben, wollen wir einige wichtige Folgerungen aus ihr ziehen.

Aus der Gleichung (37) entspringt sogleich, wenn $\varepsilon = -1$ gewählt wird, diese specielle:

$$\varphi(2\nu, \lambda) \cdot \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} = \varphi(-\lambda, 2\nu),$$

wo links die positive Quadratwurzel gemeint ist. Wenn also ν als ungerade d. i. prim zu 2 vorausgesetzt wird, so folgt nach (16)

$$\varphi(-\lambda, 2\nu) = \varphi(-2\lambda, \nu) \cdot \varphi(-\lambda\nu, 2) = \varphi(-2\lambda, \nu) \cdot (1 + i^{-\lambda\nu})$$

und die voraufgehende Gleichung nimmt die Form an:

$$(39) \quad \varphi(2\nu, \lambda) \cdot \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} = \varphi(-2\lambda, \nu) \cdot (1 + i^{-\lambda\nu}).$$

Für $\nu = 1$ erschliesst man aus ihr

$$\varphi(2, \lambda) \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} = (1 + i^{-\lambda}).$$

Ist zuerst $\lambda \equiv 1 \pmod 4$, so folgt $\varphi(2, \lambda) = +\sqrt{\lambda}$; ist dagegen $\lambda \equiv 3 \pmod 4$, so ergiebt sich $\varphi(2, \lambda) = +\sqrt{\lambda} \cdot i$. Und demnach ist allgemein, wenn λ ungerade ist:

$$(40) \qquad \varphi(2, \lambda) = +\sqrt{\lambda} \cdot i^{\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2}.$$

Werden λ, ν nicht nur als ungerade, sondern auch als Primzahlen: $\lambda = p$, $\nu = q$ vorausgesetzt, so lässt sich (39) mit Rücksicht auf (25) auch folgendermassen schreiben:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \varphi(2, p) \cdot \sqrt{\frac{2q}{p}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} = \left(\frac{-p}{q}\right) \cdot \varphi(2, q) \cdot (1 + i^{-pq})$$

und diese Gleichung mittels (40) sich vereinfachen, sodass man erhält:

$$(41)\quad \left(\frac{q}{p}\right)\cdot i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\cdot(1-i)=\left(\frac{-p}{q}\right)\cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\cdot(1+i^{-pq}).$$

Man darf dabei p auch gleich 1 annehmen; dann geht diese Formel in die folgende über:

$$\left(\frac{-1}{q}\right)=i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\cdot\frac{1+i^{-q}}{1-i}$$

und giebt, je nachdem $q\equiv 1$ oder $q\equiv 3 \pmod 4$ ist,

$$\left(\frac{-1}{q}\right)=+1 \quad \text{oder} \quad -1$$

d. h. allgemein

$$(42)\qquad \left(\frac{-1}{q}\right)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}.$$

Hiernach kann dann die Gleichung (41) durch diese andere ersetzt werden:

$$(41a)\quad \left(\frac{q}{p}\right)\cdot i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\cdot(1-i)=\left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}}\cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\cdot(1+i^{-pq}).$$

Sind p, q entweder beide $\equiv 1$ oder beide $\equiv 3 \pmod 4$, so ist:

$$\frac{1+i^{-pq}}{1-i}=1 \quad \text{und} \quad i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}=i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$$

also

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)\cdot(-1)^{\frac{q-1}{2}},$$

d. h. im ersten Falle $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$, im zweiten Falle $\left(\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{q}{p}\right)$. Ist dagegen $p\equiv 3$, $q\equiv 1 \pmod 4$*), so ist

$$\frac{1+i^{-pq}}{1-i}=i \quad \text{und} \quad i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}=i\cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

also ergiebt sich $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)$. Man darf diese Resultate in die eine Formel zusammenfassen:

*) Welche der beiden Primzahlen p, q man von der Form $4h+1$, welche von der Form $4h+3$ voraussetzt, ist beliebig, da die Gleichung (41a), wie man sich leicht überzeugt, bestehen bleibt, wenn p, q mit einander vertauscht werden.

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \tag{43}$$

und hat auf solche Weise mittels der Gaussischen Summen einen Beweis des Reciprocitätsgesetzes gewonnen. Dies ist dem Prinzipe nach der vierte der Gaussischen Beweise desselben, wie er sich findet im Art. 33 seiner Abhandlung summatio quarundam serierum singularium.

Die Formel (42) ist der eine der bekannten beiden Ergänzungssätze des quadratischen Reciprocitätsgesetzes. Auch der andere von ihnen ist aus derselben Quelle zu erschliessen. Setzen wir in (36) $\lambda = \varepsilon = 1$, $\nu = 2q$, so kommt

$$\varphi(2, 8q) = +\sqrt{8q} \cdot (1 + i).$$

Nach (16) aber kann man setzen

$$\varphi(2, 8q) = \varphi(2 \,.\, 8, q) \cdot \varphi(2q, 8)$$

oder mit Rücksicht auf (15) und (21b):

$$\varphi(2, 8q) = \varphi(2 \,.\, 2, q) \cdot 4e^{\frac{q\pi i}{4}}.$$

Berücksichtigt man endlich die Gleichung (25) und vergleicht dann beide für $\varphi(2, 8q)$ erhaltene Ausdrücke mit einander, so findet sich

$$\left(\frac{2}{q}\right) \varphi(2, q) \cdot 4e^{\frac{q\pi i}{4}} = +\sqrt{8q} \cdot (1 + i)$$

und nun wegen (40)

$$\left(\frac{2}{q}\right) \cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \cdot e^{\frac{q\pi i}{4}} = \frac{1+i}{+\sqrt{2}}.$$

Unterscheidet man die vier Fälle $q \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$, so zeigt sich sogleich, dass ihnen allen schliesslich dieselbe bekannte Formel

$$\left(\frac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}} \tag{44}$$

entspricht.

6. Kehren wir nunmehr zur Formel (22) zurück, indem wir immer μ als relative Primzahl zu n voraussetzen. Nach (24a) und (24b) ist

$$\varphi(2\mu P, p^\alpha) = p^{\alpha_2}, \quad \text{wenn } \alpha \text{ gerade ist,}$$

dagegen

$$\varphi(2\mu P, p^\alpha) = p^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \varphi(2\mu P, p)$$

d. i. wegen (25) gleich

$$p^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \left(\frac{\mu P}{p}\right) \cdot \varphi(2, p),$$

wenn α ungerade ist; da man nach (40) hierfür auch schreiben kann

$$\varphi(2\mu P, p^\alpha) = p^{\frac{\alpha}{2}} \cdot i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \left(\frac{\mu P}{p}\right), \quad \text{wenn } \alpha \text{ ungerade ist,}$$

so lassen sich beide Fälle folgendermassen in eine Formel vereinen. Bezeichnet nämlich δ die positive oder negative Einheit, je nachdem $p^\alpha \equiv \pm 1 \pmod 4$ ist, so ist $(\sqrt{\delta p^\alpha}) = p^{\frac{\alpha}{2}}$, wenn α gerade ist; im Falle eines ungeraden α wird $(\sqrt{\delta p^\alpha}) = p^{\frac{\alpha}{2}}$ oder $= ip^{\frac{\alpha}{2}}$ sein, je nachdem $p \equiv \pm 1 \pmod 4$ ist, d. i. allgemein gleich $i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \cdot p^{\frac{\alpha}{2}}$. Somit hat man für gerade wie für ungerade α

$$\varphi(2\mu P, p^\alpha) = (\sqrt{\delta p^\alpha}) \cdot \left(\frac{\mu P}{p^\alpha}\right)$$

und folglich

$$\varphi(2\mu, n) = \prod (\sqrt{\delta p^\alpha}) \cdot \prod \left(\frac{\mu P}{p^\alpha}\right).$$

Nennt man nun a die Anzahl der Potenzen p^α, $p'^{\alpha'}$, ..., welche $\equiv 3 \pmod 4$ sind, so ist

$$\prod (\sqrt{\delta p^\alpha}) = i^a \cdot n^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist

$$\prod \left(\frac{\mu P}{p^\alpha}\right) = \left(\frac{\mu}{n}\right) \cdot \prod \left(\frac{p'^{\alpha'}}{p^\alpha}\right) \cdot \left(\frac{p^\alpha}{p'^{\alpha'}}\right),$$

wo das letztere Produkt über alle Combinationen zweier der Primzahlpotenzen p^α, $p'^{\alpha'}$, $p''^{\alpha''}$, ... auszudehnen ist; nach dem verallgemeinerten Reciprocitätsgesetze, welches bekanntlich eine einfache Folge des in Formel (43) ausgesprochenen einfachen Gesetzes ist, wird sein Werth gleich

$$(-1)^{\sum \frac{p^\alpha - 1}{2} \cdot \frac{p'^{\alpha'} - 1}{2}}$$

d. i. offenbar gleich $(-1)^{\frac{a(a-1)}{2}}$ sein, da nur diejenigen $\frac{a(a-1)}{2}$ Combinationen, in welchen beide Potenzen p^α, $p'^{\alpha'}$ congruent 3 (mod. 4) sind, einen ungeraden Bestandtheil zum Exponenten von (-1) liefern. Somit findet sich das Resultat:

$$\varphi(2\mu, n) = i^a \cdot n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{n}\right) \cdot (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}}.$$

Ist nun a gerade d. i. $n \equiv 1 \pmod 4$, so ist

$$i^a \cdot (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} = (-1)^{\frac{a^2}{2}} = 1,$$

also

$$\varphi(2\mu, n) = + \sqrt{n} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right);$$

wenn aber a ungerade d. i. $n \equiv 3 \pmod 4$ ist, so ist

$$i^a \cdot (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} = i \cdot (-1)^{\frac{a(a-1)}{2} + \frac{a-1}{2}} = i \cdot (-1)^{\frac{a-1}{2} \cdot (a+1)} = i,$$

also ist

$$\varphi(2\mu, n) = + \sqrt{n} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right) \cdot i$$

und folglich ist allgemein

$$\varphi(2\mu, n) = + \sqrt{n} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right) \cdot i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}, \tag{45}$$

wo die Quadratwurzel mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist, eine Formel, welche die Gleichung (40) als speciellsten Fall in sich enthält.

Durch diese Formel ist die Aufgabe, den genauen Werth von $\varphi(2\mu, n)$ einschliesslich des Vorzeichens zu bestimmen, jetzt auch für ein ungerades n gelöst.

Verfolgen wir insbesondere den Fall, wo $n = pp'p'' \ldots$ d. h. aus lauter verschiedenen ungeraden Primfaktoren zusammengesetzt ist. Dann ist nach (22)

$$\varphi(2\mu, n) = \varphi(2\mu P, p) \cdot \varphi(2\mu P', p') \ldots$$

d. i. nach Einsetzung der Summenausdrücke für die Faktoren zur Rechten:

$$(22a)\quad \varphi(2\mu, n) = \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) e^{\frac{2\mu P s \pi i}{p}} \cdot \sum_{s'=1}^{p'-1} \left(\frac{s'}{p'}\right) e^{\frac{2\mu P' s' \pi i}{p'}} \cdot \cdot,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\varphi(2\mu, n) = \sum_{s} \left(\frac{Ps}{p}\right) e^{\frac{2s\mu\pi i}{p}} \cdot \sum_{s'} \left(\frac{P's'}{p'}\right) e^{\frac{2s'\mu\pi i}{p'}} \cdots$$

oder, in Gestalt einer vielfachen Summe,

$$\varphi(2\mu, n) = \sum \left(\frac{Ps}{p}\right)\left(\frac{P's'}{p'}\right) \cdots e^{\frac{2\mu\pi i}{n}(Ps + P's' + \cdots)}$$

oder auch so:

$$\varphi(2\mu, n) = \sum \left(\frac{Ps + P's' + \cdots}{n}\right) \cdot e^{\frac{2\mu\pi i}{n}(Ps + P's' + \cdots)}.$$

Durchlaufen $s, s', \ldots$ ihre vorgeschriebenen Werthe, so durchläuft, wie leicht zu sehen, $Ps + P's' + \cdots$ ein reducirtes Restsystem (mod. n); man darf die Summe aber auch auf diejenigen Reste (mod. n) ausdehnen, welche nicht prim sind zu n, wenn man, wie früher, übereinkommt, dem Jacobi'schen Symbole $\left(\frac{\sigma}{n}\right)$ den Werth 0 beizulegen, so oft σ einen gemeinsamen Theiler mit n hat. Demnach kann man die vorige Gleichung folgendermassen schreiben:

$$(46)\qquad \varphi(2\mu, n) = \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left(\frac{\sigma}{n}\right) e^{\frac{2\sigma\mu\pi i}{n}}.$$

Mit Rücksicht auf die allgemeine Formel (45) gewinnt man auf solche Weise die Beziehung:

$$(47)\qquad \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left(\frac{\sigma}{n}\right) \cdot e^{\frac{2\sigma\mu\pi i}{n}} = +\sqrt{n} \cdot i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right).$$

Diese Gleichung ist es, von der wir später zur Berechnung der Classenanzahl werden Gebrauch zu machen haben. Die Umformung der rechten Seite der Formel (22a) in die Summe (47) bleibt offenbar auch in dem Falle bestehen, wo μ und n einen gemeinsamen Theiler haben. Da aber, wenn z. B. μ durch p theilbar ist, der Faktor

$$\sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right)e^{\frac{2\mu Ps\pi i}{p}} = \sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right) = 0$$

wird, verschwindet dann das Produkt. Die Formel (47) bleibt demnach auch für diesen Fall in Giltigkeit, wenn man die erwähnte Uebereinkunft in Betreff des Jacobischen Symbols festhält.

7. Im Vorhergehenden haben wir den genauen Werth der Summe $\varphi(2\mu, n)$ mit Hilfe des in der Formel (16) ausgesprochenen Satzes aus der allgemeinen Reciprocitätsbeziehung (37) gewonnen, indem wir zuvörderst aus ihr das quadratische Reciprocitätsgesetz herleiteten und dann von diesem Gebrauch machten. Diesen Werth der Summe $\varphi(2\mu, n)$ kann man aber auch direkt allein auf Grund der fundamentalen Gleichung (37) oder (38) in Verbindung mit der Formel (14) mittels eines einfachen Algorithmus berechnen.

Die Formel (38) besteht für jeden rationalen rein imaginären Werth von ϱ in seiner einfachsten Benennung, wenn diese einen geraden Zähler oder Nenner hat, vorausgesetzt, dass sowohl ϱ als $\frac{1}{\varrho}$ mit positivem Nenner gedacht werden. Sind also n, n_1 zwei relative Primzahlen, von denen eine gerade ist, und n positiv, so ist nach (38)

$$G\left(\frac{n_1 i}{n}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{n_1 i}{n}}\right) = G\left(\frac{-n\varepsilon_1 i}{n_1\varepsilon_1}\right), \tag{48}$$

wo die Einheit ε_1 so gewählt ist, dass $n_1\varepsilon_1$ positiv wird. Nun kann man stets

$$n = -2h_1\cdot n_1 - n_2 \tag{49}$$

setzen, wo n_2 absolut kleiner als n_1 ist und h_1 das entgegengesetzte Vorzeichen hat, wie der Quotient $\frac{n_1}{n}$; ausserdem ist eine der Zahlen n_1, n_2 gerade. Der Definition zufolge ist

$$G\left(\frac{-n\varepsilon_1 i}{n_1\varepsilon_1}\right) = \varphi(n\varepsilon_1, n_1\varepsilon_1)$$

und also wegen (13)

$$G\left(\frac{-n\varepsilon_1 i}{n_1\varepsilon_1}\right) = \varphi(-\varepsilon_1 n_2, n_1\varepsilon_1) = G\left(\frac{n_2\varepsilon_1 i}{n_1\varepsilon_1}\right),$$

sodass die Gleichung (48) die Gestalt annimmt:

$$G\left(\frac{n_1 i}{n}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{n_1 i}{n}}\right)=G\left(\frac{n_2\varepsilon_1 i}{n_1\varepsilon_1}\right). \tag{50}$$

Setzt man nun ähnlich wie in (49)

$$\begin{aligned} n_1 &= -2h_2\cdot n_2 - n_3\\ n_2 &= -2h_3\cdot n_3 - n_4 \end{aligned} \tag{49}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und wählt die Einheiten $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ so, dass $n_2\varepsilon_2, n_3\varepsilon_3, \ldots$ positiv sind, so wird in gleicher Weise

$$\begin{aligned} G\left(\frac{n_2\varepsilon_1 i}{n_1\varepsilon_1}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{n_2 i}{n_1}}\right) &= G\left(\frac{n_3\varepsilon_2 i}{n_2\varepsilon_2}\right)\\ G\left(\frac{n_3\varepsilon_2 i}{n_2\varepsilon_2}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{n_3 i}{n_2}}\right) &= G\left(\frac{n_4\varepsilon_3 i}{n_3\varepsilon_3}\right) \end{aligned} \tag{50}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Gleichungen (49) enden aber, weil n, n_1 als relativ prim vorausgesetzt sind, mit einer Gleichung

$$n_{k-2} = -2h_{k-1}\cdot n_{k-1} - n_k,$$

in welcher $n_k = \pm 1$ ist, und ihr entspricht als letzte der Gleichungen (50) die folgende:

$$G\left(\frac{n_{k-1}\varepsilon_{k-2} i}{n_{k-2}\varepsilon_{k-2}}\right)\left(\sqrt{\frac{n_{k-1} i}{n_{k-2}}}\right)=G\left(\frac{n_k\varepsilon_{k-1} i}{n_{k-1}\varepsilon_{k-1}}\right). \tag{50}$$

Da nach (38) aber noch geschrieben werden kann:

$$G\left(\frac{n_k\varepsilon_{k-1} i}{n_{k-1}\varepsilon_{k-1}}\right)\left(\sqrt{\frac{n_k i}{n_{k-1}}}\right)=G\left(\frac{-n_{k-1}\varepsilon_k i}{n_k\varepsilon_k}\right) \tag{50}$$

d. i. wegen $n_k\varepsilon_k = 1$ gleich $\varphi(n_{k-1}\varepsilon_k, 1) = 1$, so ergiebt sich durch Multiplikation aller Gleichungen (50) die folgende:

$$G\left(\frac{n_1 i}{n}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{n_1 i}{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{n_2 i}{n_1}}\right)\cdots\left(\sqrt{\frac{n_k i}{n_{k-1}}}\right)=1. \tag{51}$$

Ist nun $\left(\frac{n_h}{n_{h-1}}\right)$ der Absolutwerth von $\frac{n_h}{n_{h-1}}$ und $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem dieser Quotient positiv oder negativ ist, so ist

$$\left(\sqrt{\frac{n_h i}{n_{h-1}}}\right)=+\sqrt{\left(\frac{n_h}{n_{h-1}}\right)}\cdot e^{\frac{\varepsilon\pi i}{4}}.$$

Hiernach nimmt, wie ohne weiteres einleuchtet, die Formel (51) nachstehende einfache Gestalt an:

$$G\left(\frac{n_1 i}{n}\right) = +\sqrt{n}\cdot e^{\frac{\Delta\pi i}{4}},$$

wenn Δ den Unterschied bezeichnet zwischen der Anzahl der positiven und der Anzahl der negativen, in den Gleichungen (49) auftretenden Zahlen $h_1, h_2, h_3, \ldots h_{n-1}$. Bildet man diese Gleichungen für $n_1 = -2u$, so erhält man entsprechend:

$$\varphi(2u, n) = +\sqrt{n}\cdot e^{\frac{\Delta\pi i}{4}}. \tag{52}$$

Durch Vergleichung endlich dieser Formel mit der obigen Gleichung (45) findet sich die folgende:

$$\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{e^{\frac{\Delta\pi i}{4}}}{i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}}, \tag{53}$$

welche verstattet, den Werth des Symbols $\left(\frac{u}{n}\right)$ vermittelst des in den Gleichungen (49) ausgesprochenen Algorithmus zu berechnen. Man verdankt diese, an die bekannte Eisenstein'sche Regel erinnernde Regel Kronecker*).

8. Die fundamentale Gleichung (37) oder (38), die wir bisher mittels des Dirichlet'schen Hilfssatzes erhalten haben, soll nunmehr aus einer anderen Quelle hergeleitet werden, die man als ihren eigentlichen Ursprung anzusehen hat. Nachdem Dirichlet im Jahre 1837 seine Methode veröffentlicht hatte, hat Cauchy in der bereits angeführten Arbeit vom Jahre 1840 den Nachweis geführt, dass die Bestimmung der Gaussischen Summen aus einer Formel hervorgeht, die er bereits im Jahre 1817 im Bulletin de la société philomatique bekannt gemacht hatte. Nach dieser Formel ist

$$\begin{aligned} &a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \cdots\right) \\ &= b^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \cdots\right), \end{aligned} \tag{54}$$

wenn

$$ab = \pi$$

ist. Jacobi hat aber darauf aufmerksam gemacht**), dass

*) S. in der schon angeführten Abhandlung p. 698.

**) S. Lebesgue note sur une formule de Cauchy, im Journal de Liouville t. V p. 186.

diese Formel der Theorie der elliptischen Funktionen angehört, nämlich nur den einfachsten Fall der linearen Transformation der Thetafunktionen ausspreche. In der That, wenn k den Modulus der elliptischen Funktionen, k' sein Complement, K und K' die zugehörigen vollständigen elliptischen Integrale bedeuten und $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ ist, so besteht die Beziehung:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + \cdots = 1 + 2e^{-\pi x} + 2e^{-4\pi x} + \cdots,$$

wenn x für $\frac{K'}{K}$ gesetzt wird; verwandelt man aber k in k', so geht K in K' und demnach x in $\frac{1}{x}$ über, und aus der vorigen Gleichung entsteht die transformirte:

$$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = 1 + 2e^{-\frac{\pi}{x}} + 2e^{-\frac{4\pi}{x}} + \cdots,$$

welche, durch die ursprüngliche dividirt, die folgende ergiebt:

$$\sqrt{x} \cdot \frac{1 + 2e^{-\pi x} + 2e^{-4\pi x} + \cdots}{1 + 2e^{-\frac{\pi}{x}} + 2e^{-\frac{4\pi}{x}} + \cdots} = 1. \tag{55}$$

Diese stimmt aber vollkommen mit (54) überein, wenn man a^2 statt πx und daher b^2 statt $\frac{\pi}{x}$ setzt. — So geht denn die Werthbestimmung der Gaussischen Summen oder die fundamentale Gleichung (38) aus der Formel (55) für die lineare Transformation der Thetafunktionen hervor und ist, wie Cauchy's Methode erweist, nur ein Grenzfall der letztern. Aber es ist sehr merkwürdig, dass, wie Kronecker (in der oben erwähnten Abhandlung) gezeigt hat, auch umgekehrt die Transformationsformel (55) aus der Reciprocitätsbeziehung (38) gefolgert werden kann, sodass diese beiden Formeln als einander äquivalent bezeichnet werden müssen, was zwischen zwei von einander weit getrennt scheinenden Gebieten der Analysis einen innigen Zusammenhang offenbart. Wir wollen die voraufgehenden Untersuchungen beschliessen, indem wir, im wesentlichen im Anschlusse an Kronecker, diese principiell so interessante Thatsache zur Darstellung bringen.

Zuvörderst leiten wir nach Kronecker's Vorgange die Transformationsformel (55) erst her, indem wir dazu den bekannten Fundamentalsatz der Lehre von der complexen Integration zum Ausgangspunkte nehmen, welchen man ebenfalls Cauchy verdankt. Nach diesem Satze ist, so oft $f(z)$ eine eindeutige Funktion der complexen Veränderlichen z bedeutet, welche im Innern eines vollständig (von einer oder mehreren Randcurven) begrenzten Flächenstückes überall endlich und stetig ist, das über die Begrenzung des Flächenstücks erstreckte Integral

$$\int f(z)\,dz = 0 \text{ *).} \tag{56}$$

Aus diesem Hauptsatze fliesst dann unmittelbar der andere, nach welchem für jeden Werth ζ innerhalb des abgegrenzten Gebietes

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} \tag{57}$$

ist, wenn das Integral (in positiver Richtung) über die Begrenzung erstreckt wird; denn umgiebt man den Punkt ζ als Mittelpunkt mit einer unendlich kleinen Kreislinie, so ist das über die Begrenzung erstreckte Integral gleich dem über die Kreislinie erstreckten, da beide Linien zusammen genommen ein Flächenstück begrenzen, in welchem $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ endlich und stetig bleibt, das über letztere Linie erstreckte Integral aber hat den Werth $2\pi i \cdot f(\zeta)$. Insbesondere ergiebt sich aus (57) also bei Integration über die obige Begrenzung

---

*) Die Grundlage dieses Satzes ist bekanntlich der andere Satz: Wenn für eine Funktion $F(x, y)$ in jenem Flächenstücke die ersten und zweiten Ableitungen durchweg endlich und stetig sind, so ist das über die Begrenzung erstreckte Integral

$$\int dF(x, y) = 0\,.$$

Für diesen Grundsatz hat Kronecker in der genannten Abhandlung einen Beweis gegeben und in einer späteren „über den Cauchy'schen Satz" im Sitzungsber. der Berl. Acad. 1885, 30. Juli, einen zweiten Beweis folgen lassen, der vor jenem den Vorzug hat, besonders einfach zu sein, während der erstere mir den eigentlichen Kernpunkt des Satzes deutlicher ins Licht zu stellen scheint.

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{C\,dz}{z-\zeta};$$

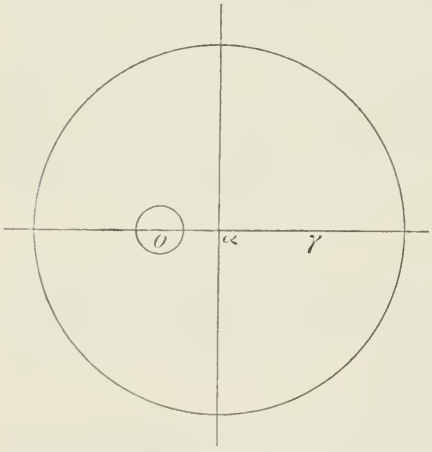
ist demnach die Funktion $f(z)$ auf der Begrenzungslinie constant, $f(z) = C$, so zeigt sich ohne weiteres, dass sie auch im Innern *denselben* Werth besitzt.

9. Der angegebene fundamentale Satz von Cauchy ist bekanntlich eines der ergiebigsten Hilfsmittel zur Ermittlung der Werthe von bestimmten Integralen, und ist für diesen Zweck schon von Cauchy selbst sehr ausgiebig benutzt worden*). Bevor wir hier von ihm Gebrauch machen für den Zweck, den wir eigentlich im Auge haben, wollen wir mittels desselben den Werth eines bestimmten Integrales herleiten, welches eins der merkwürdigsten ist und dessen wir später nothwendig bedürfen.

Es handelt sich um das Integral

$$J(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{vz}\, d\log z,$$

wenn darin $z = \alpha + iy$ und α ein constanter positiver Werth ist. Um den Punkt α der reellen Axe denken wir mit unendlich grossem, um den Nullpunkt O mit unendlich kleinem Radius einen Kreis geschlagen; da die Funktion $\frac{e^{vz}}{z}$ nur im Nullpunkte unendlich ist, so ist sie sowohl in dem Halbkreise, in welchem der letztere liegt, nach Ausscheidung des Kreises um O, als auch im andern Halbkreise um α überall endlich und stetig, und aus Cauchy's fundamentalem Satze fliessen daher sogleich die beiden Gleichungen:



*) Z. B. in seinem Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, Paris 1825.

$$J(v) + \int^{(1)} e^{vz} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \tag{58}$$

wo $z = \alpha + \gamma e^{\psi i}$ zu setzen und ψ von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ veränderlich ist, während γ unendlich gross werden muss, und

$$J(v) - \int^{(2)} e^{vz} \frac{dz}{z} = 0, \tag{59}$$

wo im letztern Integrale ψ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ veränderlich ist. In den beiden auf die Kreislinien bezüglichen Integralen ist der Modulus der zu integrirenden Funktion gleich

$$\frac{e^{v\alpha + v\gamma\cos\psi} \cdot \gamma}{\sqrt{(\gamma-\alpha)^2 + 4\alpha\gamma\cos^2\frac{\psi}{2}}} = e^{\gamma v\cos\psi} \cdot \frac{e^{v\alpha}}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + 4\frac{\alpha}{\gamma}\cos^2\frac{\psi}{2}}}.$$

Ist demnach $v > 0$, so wird die Funktion des ersten Integrales und damit auch dieses Integral selbst bei unendlich wachsendem γ unendlich klein, da darin $\cos\psi < 0$ ist; für $v < 0$ geschieht dies mit dem zweiten Integrale, da in diesem $\cos\psi > 0$ ist.

Im ersten Falle liefert also die Gleichung (58)

$$J(v) = 2\pi i \qquad (v > 0),$$

im zweiten Falle die Gleichung (59):

$$J(v) = 0 \qquad (v < 0).$$

Der Fall $v = 0$ erledigt sich direkt durch die Formel

$$J(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z} \quad \text{für} \quad z = \alpha + iy$$

d. i. gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\,dy}{\alpha + iy} = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha - iy)\,dy}{\alpha^2 + y^2}$$

oder einfacher gleich

$$i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\,dy}{\alpha^2 + y^2} = \pi i.$$

Man darf demnach schreiben:

$$(60) \qquad J(v) = \begin{cases} 2\pi i \\ \pi i \\ 0 \end{cases} \quad \text{je nachdem} \quad v \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

10. Indem wir uns nun unserm Gegenstande wieder zuwenden, verstehen wir unter u eine Grösse, deren Modulus grösser als 1, und unter $f(z)$ die Funktion

$$f(z) = \sum u^{(\log z)^2},$$

wo die Summation auf alle unendlich vielen Werthe von $\log z$ bezüglich ist. Ist $z = re^{\varphi i}$, so werden diese unendlich vielen Werthe durch die Formel gegeben:

$$\log z = \log r + (2m\pi + \varphi)i,$$

wenn m alle ganzzahligen Werthe erhält. Da hiernach

$$f(z) = u^{(\log r)^2} \cdot \sum u^{-(2m\pi+\varphi)^2} \cdot u^{2(2m\pi+\varphi)i \cdot \log r}$$

ist, so convergirt wegen mod. $u > 1$ die Reihe und stellt eine, für jedes endliche z eindeutige und endliche Funktion von z vor, ausgenommen für z oder $r = 0$, wo sie unendlich wird. Ist also R ein positiver Werth > 1, so bleibt die Funktion $f(z)$ überall in dem ringförmigen Flächenstücke mit dem Nullpunkt als Centrum und den beiden Radien R und $\frac{1}{R}$ endlich, und nach (57) ist für jedes ζ innerhalb dieses Ringes

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\, dz}{z - \zeta},$$

wenn die Integration über die äussere Kreislinie in positivem, und über die innere in negativem Sinne ausgedehnt wird. Der erstere Theil des Integrales ist nach steigenden, der zweite nach fallenden Potenzen von ζ entwickelbar, und so findet man

$$(61) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \zeta^n \int f(z)\, z^{-n}\, d \log z,$$

wo die Integrationen für positive Werthe von n über die äussere, für negative Werthe von n über die innere Kreislinie, beide in positivem Sinne, zu erstrecken sind, statt dessen aber, gemäss dem Hauptsatze von Cauchy, auch über irgend eine andere, den Nullpunkt umschliessende Curve erstreckt werden dürfen. Setzt man nun

$$\frac{-n}{2\log u} = \log \sigma ,$$

so bestätigt man ohne Mühe die Beziehung

$$z^{-n} f(z) = e^{-\frac{n^2}{4\log u}} \cdot f(\sigma z),$$

sodass also

$$\int f(z)\, z^{-n}\, d\log z = e^{-\frac{n^2}{4\log u}} \cdot \int f(\sigma z)\; d\log z$$

oder auch

$$\int f(z)\, z^{-n}\, d\log z = e^{-\frac{n^2}{4\log u}} \cdot \int f(\sigma z)\, d\log(\sigma z)$$

gesetzt werden kann. Durchläuft aber z eine den Nullpunkt umschliessende Curve C, so durchläuft $z' = \sigma z$ eine, ihr ähnliche, denselben Punkt umschliessende Curve C', und die über C, C' resp. erstreckten Integrale

$$\int f(z)\, d\log z \quad \text{und} \quad \int f(z')\, d\log z'$$

sind nach dem Hauptsatze von Cauchy einander gleich. Hiernach kann der Coefficient von ξ^n in der Formel (61) folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot v^{-n^2\pi} \cdot \int f(z)\, d\log z ,$$

wo v mit u durch die Gleichung

$$4\pi \cdot \log u \cdot \log v = 1 \tag{62}$$

verbunden ist.

Wählen wir den Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt als die Curve C d. h. setzen wir $z = e^{2w\pi i}$ und lassen w von 0 bis 1 variiren, so wird

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, u^{-4\pi^2(k+w)^2}$$

und

$$\int f(z)\, d\log z = 2\pi i \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \int_0^1 u^{-4\pi^2(k+w)^2}\, dw$$

d. i. gleich

$$2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} u^{-4\pi^2 w^2}\, dw .$$

Nun wollen wir mit $\varphi + \psi i$ denjenigen Werth der Quadratwurzel $\sqrt{4\pi \log u}$ bezeichnen, dessen reeller Theil positiv ist. Setzt man dann

$$z = w(\varphi + \psi i),$$

so wird, wenn w von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, z die gerade Linie $\psi x = \varphi y$ durchlaufen; das vorige Integral aber geht über in das folgende:

$$\frac{2\pi i}{\varphi + \psi i} \int e^{-\pi z^2} dz,$$

über die eben bezeichnete gerade Linie erstreckt. Der Winkel α, welchen die letztere mit der x-Axe einschliesst, wird durch die Formel

$$\text{tang } \alpha = \frac{\psi}{\varphi}$$

bestimmt; da nun

$$4\pi \log u = (\varphi + \psi i)^2 = \varphi^2 - \psi^2 + 2\varphi\psi i$$

und nach der über u gemachten Voraussetzung der reelle Theil von $\log u$ positiv ist, so muss $\varphi^2 > \psi^2$, folglich tang α numerisch kleiner als 1 und α numerisch kleiner als $\frac{\pi}{4}$ sein. Denkt man sich aber das Flächenstück, welches von der unendlichen Geraden $\psi x = \varphi y$, von der unendlichen x-Axe und den, mit unendlich grossem Radius geschlagenen Kreisbögen begrenzt ist, so ist das über seine Begrenzung genommene Integral

$$\int e^{-\pi z^2} dz$$

gleich Null; auf den Kreisbögen aber ist $z = Re^{\varrho i}$, wo R unendlich gross und ϱ zwischen $\pm \frac{\pi}{4}$ ist, und der betreffende Theil des Integrales, nämlich

$$i \int e^{-\pi R^2(\cos 2\varrho + i \sin 2\varrho)} \cdot Re^{\varrho i} d\varrho,$$

verschwindet mit $R = \infty$, da $\cos 2\varrho > 0$ ist. Daraus folgt dann das über die Gerade $\psi x = \varphi y$ erstreckte Integral gleich dem über die x-Axe erstreckten Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.$$

Beachtet man endlich, dass nach der bei Formel (37) eingeführten Bezeichnung

$$\varphi + \psi i = (\sqrt{4\pi \log u})$$

ist, so geht, wenn wir alles zusammenfassen, aus der Gleichung (61) die nachstehende hervor:

$$(\sqrt{4\pi \log u}) \cdot \sum u^{(\log z)^2} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k v^{-k^2\pi} z^n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx .$$

Der Werth des Integrales findet sich, indem man für u, v, z bestimmte Werthe, etwa $z = 1$, $v = e$, also nach (62) $(\sqrt{4\pi \log u}) = 1$ setzt; dann geht

$$\sum u^{(\log z)^2} \quad \text{in} \quad \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k e^{-k^2\pi}$$

über und man findet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1 . \tag{63}$$

Setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung ein und macht dann $z = 1$, setzt $u^{-4\pi} = x$, $v^{-1} = y$, sodass die analytischen Moduln von x und y kleiner als 1 sind, so erhält man nachstehende Gleichung:

$$\frac{\left(\sqrt{\log \frac{1}{x}}\right) \cdot \sum x^{k^2\pi}}{\sum y^{k^2\pi}} = 1 , \tag{64}$$

wo die Summationen auf sämmtliche ganzzahlige Werthe von k sich beziehen und

$$\log x \log y = 1 \tag{65}$$

ist. Dies ist aber die Jacobi'sche Formel für die lineare Transformation der Thetafunktionen, denn sie wird sofort mit ihr identisch, wenn man x, y setzt statt $\log \frac{1}{x}$ und $\log \frac{1}{y}$ resp., wo dann die neuen Veränderlichen x, y durch die Gleichung $xy = 1$ mit einander verbunden sind d. h. $y = \frac{1}{x}$ ist. Sie ist demnach auch der Formel von Cauchy gleichbedeutend.

11. Um nun hieraus die Fundamentalgleichung (37) zu gewinnen, setzen wir

$$\log x = -w^2 - \frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}, \tag{66}$$

indem wir unter ε eine Einheit, unter w, λ, ν drei positive Werthe verstehen, deren beide letzten ganzzahlig sind, während der erstere unendlich abnehmen soll. Man findet dann zunächst

$$\sum_k x^{k^2\pi} = \sum_k e^{-k^2w^2\pi - \frac{2k^2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}}.$$

Nun wird k alle ganzzahligen Werthe durchlaufen, wenn man $k = \lambda h + r$ setzt und dann r alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots \lambda - 1$ und h alle ganzen Zahlen annehmen lässt. So geht, da

$$e^{-\frac{2k^2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}} = e^{-\frac{2r^2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}}$$

wird, die obige Summe in folgende Doppelsumme über:

$$\sum_{r=0}^{\lambda-1}\left(e^{-\frac{2r^2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h\, e^{-(h\lambda w + rw)^2\pi}\right).$$

Wenn nun w unendlich abnimmt, so wird

$$\lim_{w=0} \lambda w \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h\, e^{-(h\cdot\lambda w + rw)^2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2\pi}\, dx = 1$$

und folglich findet sich

$$\lim_{w=0} \lambda w \sum\nolimits_k x^{k^2\pi} = \sum_{r=0}^{\lambda-1} e^{-\frac{2r^2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}} = \varphi(-2\varepsilon\nu, \lambda). \tag{67}$$

Bei der Annahme (66) folgt aber aus (65)

$$\log y = \frac{1}{\log x} = -\frac{w^2 - \frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}{w^4 + \frac{4\nu^2}{\lambda^2}}.$$

Da w unendlich klein werden soll, werden wir es bereits so klein denken dürfen, dass wir mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung

$$\log y = -\frac{w^2\lambda^2}{4\nu^2} + \frac{2\varepsilon\lambda i}{4\nu}$$

setzen können; wird dann zur Abkürzung

$$\omega = \frac{\lambda w}{2\nu}$$

gesetzt, so erhält man, genau wie die Gleichung (67), nur durch Vertauschung der Buchstaben die folgende:

$$\lim_{\omega=0} 4\nu\omega \sum\nolimits_k y^{k^2\pi} = \varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu)$$

d. i.

$$\lim_{w=0} \lambda w \sum\nolimits_k y^{k^2\pi} = \frac{1}{2}\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu).$$

Da aber endlich

$$\left(\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right) = \left(\sqrt{w^2 + \frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right)$$

für $w = 0$ in $\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right)$ übergeht und nach (17)

$$\frac{1}{2}\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)$$

ist, liefert die Gleichung (64) bei dem Uebergange zur Grenze $w = 0$ folgendes Resultat:

$$\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right) \cdot \frac{\varphi(-2\varepsilon\nu, \lambda)}{\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)} = 1$$

d. i. aber die Fundamentalgleichung (37) oder (38).

12. Noch interessanter fast ist aber die Umkehrung, nämlich die Thatsache, dass aus dieser Fundamentalgleichung wieder die Transformationsgleichung (64) hervorgeht. Wir brauchen aber nicht einmal diese Fundamentalgleichung selbst als feststehend vorauszusetzen, haben nämlich für unseren Zweck nicht nöthig, den genauen Werth des Ausdruckes

$$\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right) \cdot \frac{\varphi(-2\varepsilon\nu, \lambda)}{\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)}$$

einschliesslich seines Vorzeichens als bekannt anzunehmen, welches sich doch nur durch eine der vorhergenannten Methoden feststellen liesse, sondern es genügt, diesen Quotienten seinem absoluten Werthe nach zu kennen, wie er sich aus den elementaren Eigenschaften der Funktion $\varphi(m, n)$ ergiebt. Wir dürfen hierbei 2ν und λ als relative Primzahlen voraussetzen. In der That finden wir dann aus der auf solche Weise gewonnenen Formel (27)

$$\varphi(-2\varepsilon\nu, \lambda)^2 = \left(\frac{-1}{\lambda}\right)\lambda.$$

Ferner ist nach (17)

$$\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu).$$

Angenommen nun, ν sei gleich $2^\alpha \nu'$, wo ν' ungerade ist, so hat man nach (16)

$$\varphi(2\varepsilon\lambda, 4\nu) = \varphi(2^{\alpha+3}\varepsilon\lambda, \nu') \cdot \varphi(2\varepsilon\lambda\nu', 2^{\alpha+2}).$$

Nach den Formeln (21a) und (21b) ist

für ein gerades α

$$\varphi(2\varepsilon\lambda\nu', 2^{\alpha+2}) = 2^{\frac{\alpha}{2}+1} \cdot (1 + i^{\varepsilon\lambda\nu'})$$

und

$$\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)^2 = \frac{1}{4}\varphi(2^{\alpha+3}\varepsilon\lambda, \nu')^2 \cdot 2^{\alpha+2} \cdot 2\, i^{\varepsilon\lambda\nu'}$$

d. i. vereinfacht

$$\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)^2 = \left(\frac{-1}{\nu'}\right) \cdot 2^\alpha \nu' \cdot 2\, i^{\varepsilon\lambda\nu'} = \left(\frac{-1}{\nu'}\right) \cdot 2\nu\, i^{\varepsilon\lambda\nu'}.$$

Für ein ungerades α ist

$$\varphi(2\varepsilon\lambda\nu', 2^{\alpha+2}) = 2^{\frac{\alpha+3}{2}} \cdot e^{\frac{\varepsilon\lambda\nu'\pi i}{4}}$$

also

$$\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)^2 = \frac{1}{4}\varphi(2^{\alpha+3}\varepsilon\lambda, \nu')^2 \cdot 2^{\alpha+3} \cdot e^{\frac{\varepsilon\lambda\nu'\pi i}{2}}$$

d. i. vereinfacht

$$\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)^2 = \left(\frac{-1}{\nu'}\right) \cdot 2^{\alpha+1}\nu' \cdot i^{\varepsilon\lambda\nu'} = \left(\frac{-1}{\nu'}\right) 2\nu\, i^{\varepsilon\lambda\nu'}.$$

Demnach ergiebt sich in beiden Fällen

$$\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda} \cdot \frac{\varphi(-2\nu\varepsilon, \lambda)^2}{\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)^2} = 1$$

oder

$$\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right) \cdot \frac{\varphi(-2\nu\varepsilon, \lambda)}{\varphi(\varepsilon\lambda, 2\nu)} = \pm 1. \tag{68}$$

Die bisherige Beschränkung dieser Formel, dass 2ν und λ relative Primzahlen sein sollten, fällt nunmehr mit Rücksicht auf die Formel (17) offenbar wieder fort. Bezeichnen wir nun den Ausdruck

$$\left(\sqrt{\log \frac{1}{x}}\right) \cdot \frac{\Sigma x^{k^2\pi}}{\Sigma y^{k^2\pi}},$$

wenn darin x, y durch die Relation $\log x \cdot \log y = 1$ mit

einander verbunden sind, mit $\Phi(x)$, so ist bereits auf direkte Weise von uns nachgewiesen worden, dass

$$\lim_{w=0} \Phi\left(e^{-w^2-\frac{2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}}\right) \tag{69}$$

dem Ausdrucke (68) gleich, also ebenfalls gleich $+1$ ist. Die Funktion $\Phi(x)$ ist aber im Innern eines um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises mit Ausnahme des Nullpunktes überall endlich und stetig, da, wie als bekannt vorausgesetzt werden mag, der Nenner $\Sigma y^{k^2\pi}$ darin nirgends Null werden kann. Untersuchen wir ihr Verhalten im Nullpunkte. Wird x unendlich klein, so nähert sich $\Sigma x^{k^2\pi}$ auf eindeutige Weise der Einheit, und $\Phi(x)$ derselben Grenze wie der reciproke Werth von

$$\frac{\Sigma y^{k^2\pi}}{\left(\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right)} \quad \text{d. i.} \quad \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, e^{-\pi\frac{k^2}{\log\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right)}.$$

Setzt man

$$u = \frac{k}{\left(\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right)},$$

so bilden die, den sämmtlichen ganzzahligen Werthen von k entsprechenden Werthe von u, wenn x unendlich klein gedacht wird, eine Curve C, welche durch den Nullpunkt hindurchführt, und der vorige Ausdruck geht über in das auf jene Curve erstreckte Integral $\int e^{-\pi u^2} du$. Ist aber

$$u = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

ein Punkt dieser Curve, so folgt aus

$$x = e^{-\frac{k^2\cos 2\alpha}{r^2}} \cdot e^{\frac{ik^2}{r^2}\sin 2\alpha},$$

da für ein festes u gleichzeitig x unendlich klein und k unendlich gross wird, dass der erste Exponentialfaktor unendlich abnehmen muss, was erfordert, dass $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ist; die Integrationscurve für u wird also innerhalb des Winkels zwischen den Geraden $\alpha = +\frac{\pi}{4}$ und $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ verlaufen und

demnach, wie schon gezeigt worden ist, das über jene Curve erstreckte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du$$

dem über die reelle Axe erstreckten Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx$$

gleich sein. Man findet auf solche Weise:

$$\lim_{x=0} \Phi(x) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx} \tag{70}$$

also gleich einem wesentlich positiven endlichen Werthe.

Ist nun x irgend ein Punkt im Innern des bezeichneten Kreises, so folgt nach Cauchy's Hauptsatze

$$\Phi(x)^2 - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(\xi)^2 - 1}{\xi - x} d\xi,$$

wenn die Integration über die Peripherie des Kreises sich erstreckt. Da ξ dieselbe beschreibt, wenn man $\xi = e^{\varphi i}$ setzt und φ das Intervall von 0 bis 2π durchlaufen lässt, und da andererseits der Ausdruck $\frac{-2\varepsilon\nu\pi}{\lambda}$ für ein unendlich grosses λ und wenn man ν, je nach dem Vorzeichen von ε, die Werthe $0, 1, 2, \ldots \lambda - 1$ oder $0, -1, -2, \ldots -\lambda + 1$ annehmen lässt, unendlich viel aufeinanderfolgende Theilpunkte dieses Intervalles darstellt, so kann man bekanntlich den Integralausdruck durch den Grenzwerth der Summe

$$-\varepsilon \cdot \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{\nu} \frac{\Phi\left(e^{-\frac{2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}}\right)^2 - 1}{e^{-\frac{2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}} - x} \cdot e^{-\frac{2\varepsilon\nu\pi i}{\lambda}}$$

ersetzen. Nach (68) und (69) verschwindet das allgemeine Glied dieser Summe, und demnach findet sich überall innerhalb des Kreises

$$\Phi(x)^2 = 1,$$

also $\Phi(x) = \pm 1$. Da jedoch bereits feststeht, dass $\Phi(x)$ für $x = 0$ wesentlich positiv ist, so gilt überhaupt das obere

Vorzeichen, und man erhält auf solche Weise nicht nur, mit Rücksicht auf (70), die schon früher gefundene Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

wieder, sondern, was gezeigt werden sollte, auch die Jacobi'sche Transformationsformel (64):

$$\left(\sqrt{\log \frac{1}{x}}\right) \cdot \frac{\Sigma x^{k^2\pi}}{\Sigma y^{k^2\pi}} = 1,$$

worin $\log x \cdot \log y = 1$ ist.

Durch diese bestimmt sich dann aber auch endlich wieder das Vorzeichen des Ausdrucks (68) als Grenzwerthes von (69), nämlich als das positive Vorzeichen, und auf solchem Wege also der genaue Werth der Gaussischen Summen.

In diesen Betrachtungen besteht das Wesen des merkwürdigen Reciprocitätsverhältnisses zwischen den Gaussischen Summen und der Grundformel der linearen Transformation der Thetafunktionen, wie es von Kronecker aufgefunden worden ist.

13. Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir nunmehr aber auch noch das sehr einfache Verfahren mittheilen, durch welches Kronecker allein mittels des Hauptsatzes von Cauchy zur Werthbestimmung der Gaussischen Summen gelangt ist*).

Unter n verstehen wir eine positive ganze Zahl und unter y_0, y_1 zwei positive Werthe, deren erster kleiner als $\frac{1}{4}$ sein und unendlich abnehmen soll. Wir begrenzen in der Ebene der complexen Veränderlichen $z = x + yi$ das in umstehender Figur näher definirte Flächenstück, bei welchem die Punkte 0 und $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ durch zwei Halbkreise mit dem Radius y_0 aus dem Rechtecke ausgeschlossen werden, während die Punkte $(1, 0)$, $(2, 0)$, ... durch Kreislinien von demselben Radius umgrenzt sind. Die Funktion

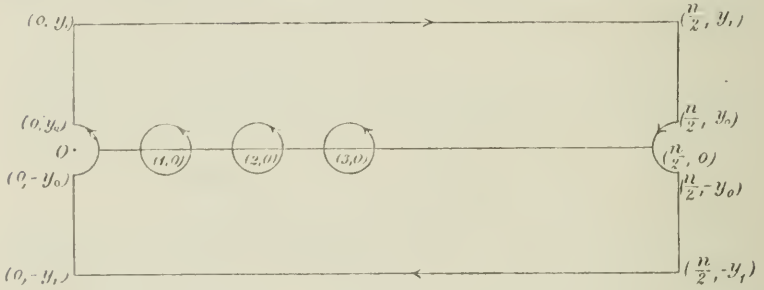
*) Journ. für die r. u. a. Math. Bd. 105 p. 267 „Summirung der Gaussischen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$".

$$\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}z^2}}{1-e^{2\pi i z}}$$

wird in diesem Flächenstücke überall endlich und stetig sein, und folglich ist das über die ganze Begrenzung desselben erstreckte Integral

$$\int \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}z^2}}{1-e^{2\pi i z}}\,dz = 0\,, \tag{71}$$

wobei, wenn die äussere Begrenzung im Sinne der Pfeilspitze durchlaufen wird, die Kreise in positiver Richtung umlaufen werden müssen. Diejenigen Theile dieses Integrales, welche



den vertikalen Seiten des Rechtecks entsprechen, lassen sich, wenn y_0 unendlich abnimmt, wie leicht zu sehen, abgesehen von den Halbkreisen, in die Summe

$$\lim_{y_0=0} i \sum_{\alpha,\varepsilon} (-1)^{\alpha} \varepsilon \int_{\varepsilon y_0}^{\varepsilon y_1} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x_\alpha + y i)^2}}{1-e^{2\pi i (x_\alpha + y i)}} \cdot dy \tag{72}$$

zusammenfassen, in welcher ε die Werthe $+1$, -1 und α die Werthe 0, 1 anzunehmen hat, während $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{n}{2}$ zu setzen ist; desgleichen geben die den beiden horizontalen Seiten entsprechenden Integrationen die Summe

$$\sum_{\varepsilon} \varepsilon \int_0^{\frac{n}{2}} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x+\varepsilon y_1 i)^2}}{1-e^{2\pi i (x+\varepsilon y_1 i)}} \cdot dx\,. \tag{73}$$

Betrachten wir nun das Integral (71), wenn es um einen der Punkte $(k, 0)$ — wo k eine der ganzen Zahlen $< \frac{n}{2}$ bedeutet — erstreckt wird. Setzt man $z = k + y_0 e^{\varphi i}$, so muss hierbei φ von 0 bis 2π wachsen, und bei unendlicher Abnahme von y_0 wird

$$\int \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{1 - e^{2\pi i z}} \cdot dz = \left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{\frac{1 - e^{2\pi i z}}{z - k}} \right)_{z=k}^{\varphi=0} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dz}{z - k}$$

d. i. gleich

$$- e^{\frac{2\pi i}{n} k^2}.$$

Folglich ist derjenige Bestandtheil des Integrales (71), der von den sämmtlichen inneren Kreisen herrührt, gleich

$$- \sum_{0 < k < \frac{n}{2}} e^{\frac{2\pi i}{n} k^2},$$

wofür man bei gleichem Umfange der Summation auch schreiben kann

$$- \frac{1}{2} \sum e^{\frac{2\pi i}{n} k^2} - \frac{1}{2} \sum e^{\frac{2\pi i}{n} (n-k)^2}.$$

In gleicher Weise findet sich der von dem Halbkreise um 0 herrührende Integralbestandtheil, indem man $z = y_0 e^{\varphi i}$ setzt und φ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ wachsen lässt, bei unendlicher Abnahme von y_0 gleich $-\frac{1}{2}$, und der vom Halbkreise um den Mittelpunkt $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ herrührende Bestandtheil, indem man $z = \frac{n}{2} + y_0 e^{\varphi i}$ setzt und φ von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ wachsen lässt, bei unendlicher Abnahme von y_0 gleich $-\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n} \left(\frac{n}{2}\right)^2}$, wenn $\frac{n}{2}$ eine ganze Zahl d. h. n gerade ist, dagegen gleich 0, wenn n ungerade ist. Hiernach liefern die von sämmtlichen Kreislinien herrührenden Bestandtheile des Integrales (71) zusammengenommen, gleichviel ob n gerade oder ungerade ist, die Summe:

$$(74) \qquad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} k^2}.$$

Da aber das Integral (71) gleich der Summe der drei Bestandtheile (72), 73), (74) ist, findet sich zunächst die Summe der beiden Ausdrücke (72) und (73) gleich

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}k^2}. \tag{75}$$

Verstehen wir nunmehr unter $\sqrt{n}$ den positiven Werth der Quadratwurzel und substituiren in (72) statt y eine neue Veränderliche mittels der Gleichung

$$y = \varepsilon u\sqrt{n},$$

so geht die Summe, wie aus den Identitäten

$$\frac{1}{1-e^{a}} + \frac{1}{1-e^{-a}} = 1$$

und

$$\frac{e^{a}}{1-(-1)^n e^{a}} + \frac{e^{-a}}{1-(-1)^n e^{-a}} = (-1)^{n+1}$$

ohne Mühe zu erkennen ist, über in den Ausdruck

$$\lim_{y_0=0} \sqrt{n}\,(i + i^{1-n}) \cdot \int_{\frac{y_0}{\sqrt{n}}}^{\frac{y_1}{\sqrt{n}}} e^{-2u^2\pi i}\,du\,. \tag{76}$$

Der auf $\varepsilon = -1$ bezügliche Theil der Summe (73) werde durch die Substitution von $\frac{n}{2} - x$ an Stelle von x transformirt; dadurch nimmt die Summe die Gestalt an:

$$\sum_{a} i^{na} \int_{0}^{\frac{n}{2}} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x+y_1 i)^2}}{(-1)^{na} - e^{2\pi i(x+y_1 i)}} \cdot dx\,. \tag{77}$$

Demnach ist die Summe (75) gleich der Summe der beiden Ausdrücke (76) und (77), und zwar, wie gross wir y_1 auch denken. Lässt man aber y_1 über alle Grenzen wachsen, so nähert sich der zuletzt genannte Theil der Null; denn der Modulus der Funktion unter dem Integralzeichen ist gleich

$$\frac{e^{-\frac{4\pi}{n}xy_1}}{\sqrt{(1-e^{-2\pi y_1})^2 + 4\theta\cdot e^{-2\pi y_1}}},$$

wo ϑ ein positiver Werth, nämlich $\sin^2 \pi x$ oder $\cos^2 \pi x$ ist, je nachdem $n\alpha$ gerade oder ungerade ist, er ist folglich kleiner als

$$\frac{e^{-\frac{4\pi}{n} x y_1}}{1 - e^{-2\pi y_1}},$$

das Integral also seinem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{1}{1 - e^{-2\pi y_1}} \int_0^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{4\pi}{n} x y_1} dx \quad \text{d. i.} \quad < \frac{n}{4\pi y_1}$$

und demnach unendlich klein, wenn y_1 unendlich gross wird. Aus dieser Betrachtung folgt schliesslich die Formel

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k^2\pi i}{n}} = 2\sqrt{n}\,(i + i^{1-n}) \cdot \int_0^{\infty} e^{-2u^2\pi i}\, du.$$

Zur Bestimmung dieses Integrales genügt es, für n den besonderen Werth $n = 4$ zu wählen, für welchen die linke Seite in $2(1 + i)$ übergeht; dadurch findet sich

$$\int_0^{\infty} e^{-2u^2\pi i}\, du = \frac{1}{2(1+i)}$$

und folglich

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k^2\pi i}{n}} = +\sqrt{n} \cdot \frac{i + i^{1-n}}{1 + i}, \tag{78}$$

eine Formel, welche den Werth der Gaussischen Summe $\varphi(2, n)$ für jeden Werth der positiven ganzen Zahl n genau bestimmt. Den im Vorigen entwickelten Sätzen gemäss lässt sich sodann auch der Werth der allgemeineren Summe $\varphi(2\mu, n)$ für alle ganzzahligen Werthe von μ und n ermitteln*).

*) Vgl. hierzu die erst kürzlich erschienene Arbeit von Landsberg „Zur Theorie der Gaussischen Summen und der Thetafunktionen" im Journ. f. die r. u. a. Mathematik Bd. 111 p. 234. In derselben wird durch eine Methode, welche der Kronecker'schen verwandt ist, nicht nur die Transformationsformel der Thetafunktionen, sondern unabhängig davon auch die Reciprocitätsbeziehung (38) zwischen den Gaussischen Summen hergeleitet, wozu das Kronecker'sche Verfahren, welches nur den Werth der Summe $\varphi(2, n)$ liefert, nicht geeignet zu sein scheint.

Achter Abschnitt.

Berechnung der Classenanzahl.

1. Mittels der im vorigen Abschnitt gewonnenen Hilfsmittel wollen wir nunmehr die Aufgabe lösen, für die Classenanzahl der quadratischen Formen von gegebener Determinante D einen endlichen Ausdruck aufzustellen, indem wir die in der Formel (22) des sechsten Abschnitts noch auftretende unendliche Reihe

$$S = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \tag{1}$$

summiren. Die Determinante D darf aber jetzt nach dem in Nr. 7 dort Gesagten frei von quadratischen Faktoren vorausgesetzt werden und hat demnach die Form

$$D = \pm 2^c \cdot P, \tag{2}$$

wo c einen der Werthe 0, 1 und P eine aus lauter verschiedenen ungeraden Primfaktoren $p, p', p'', \ldots$ zusammengesetzte Zahl bedeutet. Statt die Summation zur Rechten der Gleichung (1) über alle positiven ganzen Zahlen n auszudehnen, genügt es auch, sie nur über die sämmtlichen zu $2D$ d. i. zu $2P$ primen positiven ganzen Zahlen n zu erstrecken; für alle solche Zahlen besteht aber die Formel (5) des 3. Abschnitts:

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{n}{P}\right), \tag{3}$$

und man findet ihr gemäss die Gleichheit

$$\left(\frac{D}{n'}\right) = \left(\frac{D}{n}\right), \tag{4}$$

so oft $n' \equiv n \pmod{8P}$; und für die Formel (1) die neue Gestalt:

$$(1\,a) \qquad S = \sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

die Summation in natürlicher Reihenfolge auf sämmtliche positive ganze Zahlen n ausgedehnt, welche prim sind zu $2P$.

Zweierlei Wege bieten sich nun dar, die hier geforderte Summation auszuführen, und beide wollen wir der Reihe nach einschlagen.

Die erste dieser Methoden besteht in der Umformung des Ausdruckes $\frac{1}{n}$ mittels der bestimmten Integralformel

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\, dx$$

und in einer dann folgenden rationalen Integration. Durch diese Umformung nimmt die Formel für S nämlich die folgende Gestalt an:

$$(1\,b) \qquad S = \sum_n \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \cdot \int_0^1 x^{n-1}\, dx.$$

Denken wir uns nun die Summe zunächst nur über alle diejenigen der bezeichneten Zahlen n erstreckt, welche kleiner sind als $8hP$, so kann man die endliche Summe auch folgendermassen schreiben:

$$\int_0^1 \left(\frac{dx}{x} \sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) x^n\right);$$

n aber nimmt die angegebenen Werthe an, wenn man

$$n = 8P \cdot z + \nu$$

setzt und hierin z die Zahlen 0 bis $h-1$, ν aber die Reihe der $\varphi(8P)$ zu $8P$ primen Zahlen durchlaufen lässt, welche $< 8P$ sind; da wegen (4)

$$\delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) = \delta^{\frac{\nu-1}{2}} \varepsilon^{\frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right)$$

gefunden wird, lässt sich der vorige Ausdruck daher durch den folgenden ersetzen:

$$\int_0^1 \left(\frac{dx}{x} \cdot \frac{1-x^{8hP}}{1-x^{8P}} \cdot \sum_\nu \delta^{\frac{\nu-1}{2}} \varepsilon^{\frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right) x^\nu\right).$$

Zur Abkürzung sei

$$F(x) = \sum_{\nu} \delta^{\frac{\nu-1}{2}} \varepsilon^{\frac{\nu^2-1}{8}} \binom{\nu}{P} x^{\nu}; \tag{5}$$

das vorige Integral besteht dann aus den zwei Theilen

$$\int_0^1 \frac{F(x)\,dx}{x(1-x^{8P})} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{F(x)\,x^{8hP}}{x(1-x^{8P})}\,dx,$$

wo die Funktion

$$\frac{F(x)}{x(1-x^{8P})}$$

bei der Integration durchweg endlich bleibt, denn sie könnte nur an den Grenzen derselben, wo der Nenner verschwindet, unendlich werden, jedoch hat $F(x)$ nicht nur, wie der Ausdruck (5) sofort erkennen lässt, den Faktor x, sondern auch den Faktor $1-x$, weil

$$F(1) = \sum_{\nu} \delta^{\frac{\nu-1}{2}} \varepsilon^{\frac{\nu^2-1}{8}} \binom{\nu}{P}$$

also nach Formel (6) Seite 49 gleich Null ist, und folglich bleibt der Bruch auch an den Grenzen endlich. Hiernach leuchtet ein, dass der zweite Bestandtheil wegen des Faktors x^{8Ph} bei unendlich wachsendem h gegen Null convergirt. Und somit findet sich schliesslich das folgende Resultat: Die unendliche Reihe S ist dem ersten Bestandtheile gleich, in Zeichen:

$$S = \int_0^1 \frac{F(x)\,dx}{x(1-x^{8P})}. \tag{6}$$

Es erübrigt also nur, diese rationale Integration auszuführen, um S zu ermitteln.

Der Nenner der zu integrirenden Funktion verschwindet ausser für $x = 0$ für die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^{8P} = 1$ d. h. für die Werthe

$$x = e^{k \cdot \frac{2\pi i}{8P}} \tag{7}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots 8P-1),$$

und somit findet sich durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{F(x)}{x\,(1-x^{8P})} = -\frac{1}{8P}\sum_{k=0}^{8P-1}\frac{F\left(e^{k\cdot\frac{2\pi i}{8P}}\right)}{x-e^{k\cdot\frac{2\pi i}{8P}}},$$

wo übrigens der Werth $k=0$ auch unterdrückt werden könnte. Also ist

$$S = -\frac{1}{8P}\sum_{k=0}^{8P-1}\left[F\left(e^{k\cdot\frac{2\pi i}{8P}}\right)\int_0^1 \frac{dx}{x-e^{k\cdot\frac{2\pi i}{8P}}}\right]. \tag{8}$$

Untersuchen wir zuerst den Ausdruck

$$F\left(e^{k\cdot\frac{2\pi i}{8P}}\right) = \sum_{\nu} \delta^{\frac{\nu-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right)e^{\nu\cdot\frac{2k\pi i}{8P}}. \tag{9}$$

Jede der in Frage kommenden Zahlen ν wird man durch die Formel

$$\nu = 8P\gamma + P\alpha + 8\mu \tag{10}$$

erhalten, wenn man α die Werthe $1, 3, 5, 7$ und μ die Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots P-1$, welche prim sind zu P, annehmen lässt und die ganze Zahl γ jedesmal passend wählt. Hiernach wird

$$\frac{\nu}{8P} = \gamma + \frac{\alpha}{8} + \frac{\mu}{P}$$

und

$$e^{\nu\cdot\frac{2k\pi i}{8P}} = e^{\alpha k\frac{\pi i}{4}}\cdot e^{\mu k\frac{2\pi}{P}}$$

sein, während mit Rücksicht auf (10)

$$\delta^{\frac{\nu-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right) = \delta^{\frac{P-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{P^2-1}{8}}\left(\frac{2}{P}\right)\cdot\delta^{\frac{\alpha-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{\alpha^2-1}{8}}\left(\frac{\mu}{P}\right)$$

gefunden wird. Wenn demnach in (9) statt über alle ν, über die bezeichneten Werthe von α und μ summirt wird, so kommt ohne weiteres

$$F\left(e^{k\cdot\frac{2\pi i}{8P}}\right) = \delta^{\frac{P-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{P^2-1}{8}}\left(\frac{2}{P}\right)\cdot S_\alpha\cdot S_\mu, \tag{11}$$

worin

$$S_\alpha = \sum_{\alpha}\delta^{\frac{\alpha-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{\alpha^2-1}{8}}\,e^{\alpha k\frac{\pi i}{4}} \tag{12}$$

und

$$S_\mu = \sum_\mu \left(\frac{\mu}{P}\right) e^{\mu \cdot \frac{2k\pi i}{P}} \tag{13}$$

gesetzt ist.

Hier kommt nun zur Geltung, was im vorigen Abschnitte über die Gaussischen Summen gelehrt worden ist. Darnach findet sich für S_μ folgender Werth:

$$S_\mu = \left(\frac{k}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P}; \tag{14}$$

wo die Quadratwurzel mit positivem Vorzeichen zu nehmen und $\left(\frac{k}{P}\right)$, wenn k und P einen gemeinsamen Theiler haben, gleich Null zu setzen ist.

Um S_α zu berechnen, unterscheidet man am besten die vier Fälle, welche die Werthe von δ, ε zulassen.

Für $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$ findet sich

$$S_\alpha = e^{\frac{k\pi i}{4}} \cdot \frac{1 - e^{2k\pi i}}{1 - i^k}$$

d. h. Null, ausgenommen, wenn $k = 4h$ ein Vielfaches von 4 ist, wo dann

$$S_\alpha = 4 \cdot (-1)^h \tag{15^1}$$

wird.

Für $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$ kommt

$$S_\alpha = e^{\frac{k\pi i}{4}} \cdot \frac{1 - e^{2k\pi i}}{1 + i^k}$$

d. h. Null, ausgenommen, wenn $k = 2\gamma$ und γ eine ungerade Zahl ist, in welchem Falle sich findet

$$S_\alpha = 4i \cdot (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \tag{15^2}$$

Für $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$ findet man

$$S_\alpha = e^{\frac{k\pi i}{4}} (1 - i^k)^2 \cdot (1 + i^k)$$

d. h. Null für jedes gerade k; prüft man bei ungeradem k die Fälle $k \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$, so erkennt man leicht, dass allgemein

$$S_\alpha = (-1)^{\frac{k^2-1}{8}} \cdot 2\sqrt{2} \tag{15^3}$$

ist.

Für $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$ endlich ist

$$S_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}(1+i)^2 \cdot (1-i^2)$$

d. h. Null für jedes gerade k; für jedes ungerade k dagegen findet sich allgemein

$$S_2 = (-1)^{\frac{k-1}{2}+\frac{k^2-1}{8}} \cdot 2i\sqrt{2}. \tag{15^4}$$

2. Diese Werthe von S_2 und S_4 müssen nun in (11) und dann der so gefundene Werth für $F\left(e^{k\frac{2\pi}{k}i}\right)$ in die Gleichung (8) eingesetzt werden. Dann ist noch die Hilfsformel

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\varphi i}} = \log 2 \sin\frac{\varphi}{2} + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{16}$$

zu berücksichtigen, in welcher φ zwischen 0 und 2π vorausgesetzt ist.

I. Ist demnach erstens $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, also $D = +P \equiv 1 \pmod 4$ und

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{P}\right),$$

so oft n und $2D$ ohne gemeinsamen Theiler sind, so findet man, da nur die Zahlen $k = 4h$ der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots 8P-1$ d. h. die Zahlen h der Reihe $0, 1, 2, \ldots 2P-1$ nichtverschwindende Glieder der Summe S liefern,

$$S = -\frac{1}{2\sqrt{P}}\left(\frac{2}{P}\right)^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \cdot S_4,$$

wo

$$S_4 = \sum_0^{2P-1} (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right)\left(\log 2 \sin\frac{h\pi}{2P} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2P}\right)i\right) \tag{17}$$

gesetzt ist. Diese Summe kann auf verschiedene Weise weiter behandelt werden. Man kann sie zuvörderst in zwei Theile zerlegen, deren erster die Werthe von $h < P$ umfasst, während der zweite sich auf die Werthe von h bezieht, welche von P bis $2P-1$ hin liegen. Diese letztern erhält man aber aus der Formel $P+h$, indem man h jetzt die Werthe $< P$ durchlaufen lässt, und durch eine einfache Umformung des auf sie bezüglichen allgemeinen Gliedes der Summe gewinnt man die Formel

$$S_h = \sum_0^{P-1}{}_h (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right)\left(\log 2 \sin \frac{h\pi}{2P} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2P}\right) i\right)$$
$$- \sum_0^{P-1}{}_h (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right)\left(\log 2 \cos \frac{h\pi}{2P} - \frac{h\pi}{2P} i\right)$$

d. h.

$$S_h = \sum_0^{P-1}{}_h (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right)\left(\log \operatorname{tang} \frac{h\pi}{2P} + \frac{\pi}{2} i\right). \tag{18}$$

Man kann aber auch so verfahren: unterscheidet man bei der Summation in (17) die geraden Werthe $h = 2g$ von den ungeraden, so ist

$$S_h = \left(\frac{2}{P}\right) \cdot \sum_0^{P-1}{}_g \left(\frac{g}{P}\right)\left(\log 2 \sin \frac{g\pi}{P} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{g\pi}{P}\right) i\right)$$
$$- \sum_h \left(\frac{h}{P}\right)\left(\log 2 \sin \frac{h\pi}{2P} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2P}\right) i\right),$$

wo die letztere Summe auf alle ungeraden Zahlen $h < 2P$ zu erstrecken ist. Da nach (3) pag. 47 die ebenso ausgedehnte Summe $\sum \left(\frac{h}{P}\right) = 0$ ist, desgleichen $\sum_0^{P-1} \left(\frac{g}{P}\right) = 0$, so kann man etwas einfacher schreiben:

$$S_h = \left(\frac{2}{P}\right) \sum_0^{P-1}{}_g \left(\frac{g}{P}\right)\left(\log \sin \frac{g\pi}{P} - \frac{g\pi}{P} i\right)$$
$$- \sum_h \left(\frac{h}{P}\right)\left(\log \sin \frac{h\pi}{2P} - \frac{h\pi}{2P} i\right).$$

Nun zerlege man die letztere Summe in die beiden Theile, deren erster die ungeraden $h < P$ umfasst, während für den zweiten h die ungeraden Zahlen von P bis $2P-1$ annimmt; letztere gewinnt man aus der Formel $P + h'$, wenn man h' die geraden Zahlen $< P$ annehmen lässt. Hiernach findet sich in einfacher Umformung

$$S_h = \left(\frac{2}{P}\right) \cdot \sum_0^{P-1}{}_g \left(\frac{g}{P}\right)\left(\log \sin \frac{g\pi}{P} - \frac{g\pi}{P} i\right)$$
$$- \sum_{\text{ung. } h < P} \left(\frac{h}{P}\right)\left(\log \sin \frac{h\pi}{2P} - \frac{h\pi}{2P} i\right)$$
$$- \sum_{\text{ger. } h' < P} \left(\frac{h'}{P}\right)\left(\log \cos \frac{h'\pi}{2P} - \frac{h'\pi}{2P} i - \frac{\pi}{2} i\right).$$

Wird diese Gleichung aber mit 2 multiplicirt und dann die Gleichung (18) davon subtrahirt, so erhält man leicht

$$S_h = 2 \cdot \left(\frac{2}{P}\right) \cdot \sum_0^{P-1}{}_g \left(\frac{g}{P}\right) \left(\log \sin \frac{g\pi}{P} - \frac{g\pi}{P} i\right)$$
$$- \sum{}_h \left(\frac{h}{P}\right) \left(\log \frac{1}{2} \sin \frac{h\pi}{P} - \frac{h\pi i}{P} - \frac{\pi}{2} i\right)$$
$$- \sum{}_{h'} \left(\frac{h'}{P}\right) \left(\log \frac{1}{2} \sin \frac{h'\pi}{P} - \frac{h'\pi i}{P} - \frac{\pi}{2} i\right),$$

oder, da die Zahlen h, h' zusammengenommen alle Zahlen $g < P$ ausmachen, also nach der oben angeführten Formel des 3. Abschnittes

$$\sum \left(\frac{h}{P}\right) + \sum \left(\frac{h'}{P}\right) = 0$$

ist,

$$(19) \quad S_h = \left(2 \cdot \left(\frac{2}{P}\right) - 1\right) \cdot \sum_0^{P-1}{}_g \left(\frac{g}{P}\right) \left(\log \sin \frac{g\pi}{P} - \frac{g\pi}{P} i\right).$$

Nach Belieben dürfen wir in der Formel für S den einen oder den andern der beiden Ausdrücke (18) oder (19) für S_h einsetzen.

Ist dann $D = +P$, so wird

$$S = -\frac{1}{2\sqrt{P}} \left(\frac{2}{P}\right) \cdot \sum_0^{P-1}{}_h (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right) \left(\log \operatorname{tang} \frac{h\pi}{2P} + \frac{\pi}{2} i\right)$$

oder auch

$$S = -\frac{1}{\sqrt{P}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \sum_0^{P-1}{}_h \left(\frac{h}{P}\right) \left(\log \sin \frac{h\pi}{P} - \frac{h\pi}{P} i\right).$$

Da aber S, seiner Bedeutung (1) gemäss, reell ist, so muss das Imaginäre rechts für sich verschwinden, und man findet demnach endlich

$$(20^1) \quad S = -\frac{1}{2\sqrt{P}} \left(\frac{2}{P}\right) \sum_0^{P-1}{}_h (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right) \log \operatorname{tang} \frac{h\pi}{2P}$$

oder auch

$$(20^2) \quad S = -\frac{1}{\sqrt{P}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \sum_0^{P-1}{}_h \left(\frac{h}{P}\right) \log \sin \frac{h\pi}{P};$$

daneben ergeben sich noch die Formeln

$$(20^3) \qquad \sum_0^{P-1} (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right) = 0 \qquad \sum_0^{P-1} \left(\frac{h}{P}\right) h = 0,$$

die sich leicht bestätigen lassen.

Ist dagegen $D = -P$, so wird

$$S = -\frac{i}{2\sqrt{P}} \left(\frac{2}{P}\right) \cdot \sum_0^{P-1} {}_h (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right) \left(\log \operatorname{tang} \frac{h\pi}{2P} + \frac{\pi}{2} i\right)$$

oder auch

$$S = -\frac{i}{\sqrt{P}} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \sum_0^{P-1} {}_h \left(\frac{h}{P}\right) \left(\log \sin \frac{h\pi}{P} - \frac{h\pi}{P} i\right),$$

und hieraus endlich

$$(20_1) \qquad S = \frac{\pi}{4\sqrt{P}} \cdot \left(\frac{2}{P}\right) \sum_0^{P-1} {}_h (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right)$$

oder auch

$$(20_2) \qquad S = -\frac{\pi}{P\sqrt{P}} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \sum_0^{P-1} {}_h \left(\frac{h}{P}\right) h;$$

während daneben sich die beiden unschwer zu bestätigenden Formeln herausstellen

$$(20_3) \qquad \begin{cases} \sum_0^{P-1} {}_h (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right) \log \operatorname{tang} \frac{h\pi}{2P} = 0 \\ \sum_0^{P-1} {}_h \left(\frac{h}{P}\right) \log \sin \frac{h\pi}{P} = 0 . \end{cases}$$

II. Ist zweitens $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$, also $D = \pm P \equiv 3 \pmod 4$ und für jede zu $2D$ prime Zahl n

$$\left(\frac{D}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right),$$

so findet man, da nur die Zahlen k von der Form $k = 2\gamma$, wo γ ungerade ist, nichtverschwindende Glieder der Summe S liefern,

$$S = \frac{1}{2\sqrt{P}} (-1)^{\frac{P+1}{2}} i \cdot i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \cdot$$
$$\cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \left(\log 2 \sin \frac{\gamma\pi}{4P} + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma\pi}{4P}\right)\right),$$

wo die Summation über alle ungeraden Zahlen $\gamma < 4P$ zu erstrecken ist. Da nach (6) S. 49 die gleicherstreckte Summe

$$\sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) = 0$$

ist, kann man einfacher schreiben

$$S = \frac{1}{2\sqrt{P}} (-1)^{\frac{P+1}{2}} \cdot i \cdot i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \left(\log \sin \frac{\gamma\pi}{4P} - \frac{\gamma\pi}{4P} i\right).$$

Unterscheidet man demnach wieder die beiden Fälle einer positiven und negativen Determinante, so ergiebt sich:

Ist $D = +P$, so wird

$$(21^1) \qquad S = -\frac{1}{2\sqrt{P}} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \log \sin \frac{\gamma\pi}{4P},$$

während

$$(21^2) \qquad \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \gamma = 0$$

ist.

Ist dagegen $D = -P$, so wird

$$(21_1) \qquad S = -\frac{\pi}{8P\sqrt{P}} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \gamma,$$

während

$$(21_2) \qquad \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \log \sin \frac{\gamma\pi}{4P} = 0$$

ist.

III. Sei drittens $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$, also $D = +2P$, $+P \equiv 1 \pmod 4$ und für jede zu $2D$ relativ prime Zahl n

$$\left(\frac{D}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right).$$

In diesem Falle wird, da nur die ungeraden Werthe $k = \gamma$ nichtverschwindende Glieder der Summe S geben,

$$S = \frac{-i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{8P}} \sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \left(\log 2 \sin \frac{\gamma\pi}{8P} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma\pi}{8P}\right) i\right),$$

wo die Summe über alle ungeraden Zahlen $\gamma < 8P$ ausgedehnt werden muss; da aber nach (6) S. 49 die gleichausgedehnte Summe

$$\sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) = 0$$

ist, kann man einfacher schreiben

$$S = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{8P}} \sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \left(\log \sin \frac{\gamma\pi}{8P} - \frac{\gamma\pi i}{8P}\right).$$

Hieraus folgt aber, wenn $D = +2P$ ist,

$$(22^1) \qquad S = -\frac{1}{\sqrt{8P}} \sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \log \sin \frac{\gamma\pi}{8P},$$

während

$$(22^2) \qquad \sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \gamma = 0$$

ist; wenn dagegen $D = -2P$ ist, folgt

$$(22_1) \qquad S = -\frac{\pi}{8P\sqrt{8P}} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \gamma,$$

während

$$(22_2) \qquad \sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \log \sin \frac{\gamma\pi}{8P} = 0$$

ist.

IV. Sei endlich viertens $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$, also $D = \pm 2P$, $\pm P \equiv 3 \pmod 4$ und für jede zu $2D$ prime Zahl n

$$\left(\frac{D}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right).$$

Da auch in diesem Falle nur die den ungeraden Werthen von k entsprechenden Glieder der Summe S bestehen bleiben, findet sich

$$S = \frac{(-1)^{\frac{P+1}{2}} i \cdot i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{8P}} \cdot$$

$$\cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \left(\log 2 \sin \frac{\gamma\pi}{8P} + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma\pi}{8P}\right)\right),$$

wo die Summe über alle ungeraden Zahlen $\gamma < 8P$ auszudehnen ist; und da nach (6) S. 49 die gleichausgedehnte Summe

$$\sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) = 0$$

ist, erhält man einfacher

$$S = \frac{(-1)^{\frac{P+1}{2}} i \cdot i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{8P}} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \left(\log \sin \frac{\gamma\pi}{8P} - \frac{\gamma\pi}{8P} i\right).$$

Hieraus fliesst, wenn $D = +2P$ ist,

$$(23^1) \qquad S = \frac{-1}{\sqrt{8P}} \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \log \sin \frac{\gamma\pi}{8P},$$

während

$$(23^2) \qquad \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \gamma = 0$$

ist; wenn dagegen $D = -P$ ist, folgt

$$(23_1) \qquad S = -\frac{\pi}{8P\sqrt{8P}} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \gamma,$$

während

$$(23_2) \qquad \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \log \sin \frac{\gamma\pi}{8P} = 0$$

ist. —

3. Nachdem wir somit die Summe S in allen Fällen berechnet haben, können wir nunmehr mit Hilfe der Gleichung (22) des 6. Abschnittes auch den Ausdruck der Classenanzahl für jede (durch kein Quadrat ausser Eins theilbare) Determinante D bestimmen. In dieser Gleichung:

$$H(D) = \frac{2}{\vartheta} \cdot \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

hat man, wenn $D > 0$ ist,

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{D}} \log (T + U\sqrt{D}),$$

dagegen, wenn $D < 0$ ist,

$$\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{-D}}.$$

Mit Rücksicht hierauf sowie auf die in voriger Nr. abgeleiteten Formeln lässt sich also folgende Tabelle aufstellen:

I. $D > 0$.

1) Ist $D = P$, $P \equiv 1 \pmod 4$, so ist

$$H(D) = -\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{\log(T+U\sqrt{P})}\cdot\sum_{0}^{P-1}{}_{h}(-1)^{h}\left(\frac{h}{P}\right)\log\operatorname{tang}\frac{h\pi}{2P},$$

was einfacher auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$H(D) = \left(\frac{2}{P}\right)\frac{2}{\log(T+U\sqrt{P})}\cdot\sum_{\gamma}\left(\frac{\gamma}{P}\right)\log\operatorname{tang}\frac{\gamma\pi}{2P},$$

wenn γ alle ungeraden Zahlen $< P$ (man darf sagen: welche prim zu P sind, denn für die andern ist $\left(\frac{\gamma}{P}\right) = 0$) durchläuft; oder, da für solche Zahlen $\left(\frac{\gamma}{P}\right) = \left(\frac{D}{\gamma}\right)$ ist, ist schliesslich, wenn man mit α, β diejenigen unter ihnen bezeichnet, für welche

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{P}\right) = 1, \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{P}\right) = -1$$

ist,

$$(24_0)\qquad H(D) = \left(\frac{2}{P}\right)\frac{2}{\log(T+U\sqrt{P})}\cdot\log\prod\frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha\pi}{2P}}{\operatorname{tang}\frac{\beta\pi}{2P}}.$$

Einen zweiten Ausdruck ergiebt die Formel (20^2), nämlich:

$$(24_1)\qquad H(D) = \frac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})}\cdot\log\prod\frac{\sin\frac{b\pi}{P}}{\sin\frac{a\pi}{P}},$$

worin a, b die sämmtlichen zu P primen Zahlen $< P$ bezeichnen, für welche

$$\left(\frac{a}{P}\right) = +1, \quad \left(\frac{b}{P}\right) = -1$$

ist.

2) Ist $D = P$, $P \equiv 3 \pmod 4$, so ist nach (21^1)

$$H(D) = -\frac{1}{\log(T+U\sqrt{P})}\cdot\sum(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}\left(\frac{\gamma}{P}\right)\log\sin\frac{\gamma\pi}{4P}$$

d. i.

$$(24_2)\qquad H(D) = \frac{1}{\log(T+U\sqrt{P})}\cdot\log\prod\frac{\sin\frac{\beta\pi}{4P}}{\sin\frac{\alpha\pi}{4P}},$$

worin α, β die ungeraden zu P primen Zahlen $< 4P$ bezeichnen, für welche

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right) = +1, \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}}\left(\frac{\beta}{P}\right) = -1$$

ist.

3) Ist $D = 2P$, $P \equiv 1 \pmod 4$, so ist nach (22^1)

$$H(D) = -\frac{1}{\log(T + U\sqrt{2P})} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}}\left(\frac{\gamma}{P}\right) \log \sin \frac{\gamma\pi}{8P}$$

d. i.

$$(24_3) \qquad H(D) = \frac{1}{\log(T + U\sqrt{2P})} \cdot \log \prod \frac{\sin \frac{\beta\pi}{8P}}{\sin \frac{\alpha\pi}{8P}},$$

worin α, β die ungeraden zu P primen Zahlen $< 8P$ bezeichnen, für welche

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{\alpha^2-1}{8}}\left(\frac{\alpha}{P}\right) = +1, \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = (-1)^{\frac{\beta^2-1}{8}}\left(\frac{\beta}{P}\right) = -1$$

ist.

4) Ist $D = 2P$, $P \equiv 3 \pmod 4$, so ist nach (23^1)

$$H(D) = -\frac{1}{\log(T + U\sqrt{2P})} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}}\left(\frac{\gamma}{P}\right) \log \sin \frac{\gamma\pi}{8P}$$

d. i.

$$(24_4) \qquad H(D) = \frac{1}{\log(T + U\sqrt{2P})} \cdot \log \prod \frac{\sin \frac{\beta\pi}{8P}}{\sin \frac{\alpha\pi}{8P}},$$

worin α, β die ungeraden zu P primen Zahlen $< 8P$ bezeichnen, für welche

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\alpha^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{\alpha}{P}\right) = +1,$$

$$\left(\frac{D}{\beta}\right) = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{\beta^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{\beta}{P}\right) = -1$$

ist. —

Man sieht sogleich, dass die drei letzten Fälle sich in eine einzige Formel vereinigen lassen, welche in folgendem Satze auszusprechen ist:

Ist die positive Determinante D nicht $\equiv 1 \pmod 4$, so ist immer

$$(25) \qquad H(D) = \frac{1}{\log(T + U\sqrt{D})} \cdot \log \prod \frac{\sin \frac{\beta\pi}{4D}}{\sin \frac{\alpha\pi}{4D}},$$

wo α, β diejenigen zu $2D$ primen Zahlen $< 4D$ bezeichnen, für welche

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) = +1, \qquad \left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$$

ist.

II. $D < 0$.

Wir bezeichnen mit Δ den absoluten Werth von D.

1) Ist dann zuerst $D = -P$, $P \equiv 3 \pmod 4$, so ergiebt sich aus (20_1)

$$H(D) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{P}\right) \sum_{0}^{P-1} (-1)^h \left(\frac{h}{P}\right),$$

wofür einfacher auch geschrieben werden kann

$$(26) \qquad H(D) = -\left(\frac{2}{P}\right) \sum \left(\frac{\gamma}{P}\right),$$

wenn γ dieselbe Bedeutung hat, wie im ersten der auf eine positive Determinante bezüglichen Fälle. Giebt man auch den Zeichen α, β dieselbe Bedeutung, wie bei (24_0), und sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Anzahl dieser Zahlen α, β, so ist ganz einfach

$$(26_0) \qquad H(D) = \left(\frac{2}{P}\right) \cdot (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}).$$

Wendet man dagegen die Formel (20_2) an, so findet sich

$$H(D) = -\frac{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}{P} \cdot \sum_{0}^{P-1} \left(\frac{h}{P}\right) h$$

d. i., wenn a, b dieselbe Bedeutung bewahren, wie in Formel (24_1), einfacher

$$(26_1) \qquad H(D) = \left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \frac{\Sigma b - \Sigma a}{P}.$$

Die Formel (26_0) verdient vor dieser insofern den Vorzug, als sie sogleich $H(D)$ als eine ganze Zahl erkennen lässt. Uebrigens können wir sie noch einfacher schreiben, wenn wir der Gleichung (26) die Gestalt geben:

$$H(D) = \left(\frac{2}{P}\right) \cdot \sum \left(\frac{g}{P}\right),$$

wo g alle geraden zu P primen Zahlen $< P$ durchlaufen muss. Denn, setzt man dann $g = 2h$, so durchläuft h alle zu P primen Zahlen $< \frac{P}{2}$, und wenn demnach A, B die Anzahl derjenigen mit a, b bezeichneten Zahlen bedeuten, welche $< \frac{P}{2}$ sind, so ist offenbar

$$(26_1) \qquad H(D) = \sum \left(\frac{h}{P}\right) = A - B .$$

Der in diesen Formeln ausgesprochene Satz ist für den Fall, dass P eine Primzahl ist, bereits längere Zeit, bevor Dirichlet allgemein die Classenanzahl bestimmte, von Jacobi entdeckt worden, der durch eine Induction dazu geführt wurde*); er lässt sich für diesen einfachen Fall folgendermassen aussprechen:

Ist die Determinante eine negative Primzahl $-p$, deren Absolutwerth die Form $4k + 3$ hat, so ist die Classenanzahl für die zu ihr gehörigen eigentlich primitiven positiven quadratischen Formen gleich dem Ueberschuss der Anzahl der quadratischen Reste über die Anzahl der quadratischen Nichtreste, welche kleiner sind als $\frac{p}{2}$.

2) Ist zweitens $D = -P$, $P \equiv 1 \pmod 4$, so folgt aus (21_1)

$$H(D) = -\frac{1}{4P} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \gamma$$

d. i. bei Anwendung der bei Formel (24_2) eingeführten Zeichen α, β

$$(26_2) \qquad H(D) = \frac{\Sigma\beta - \Sigma\alpha}{4P} .$$

3) Ist drittens $D = -2P$, $P \equiv 3 \pmod 4$, so giebt (22_1)

$$H(D) = -\frac{1}{8P} \cdot \sum (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right) \gamma$$

*) Jacobi, observatio arithmetica in Crelle's Journ. Bd. 9 p. 189.

d. i. bei Anwendung der bei Formel (24_3) eingeführten Zeichen α, β

$$(26_3) \qquad H(D) = \frac{\Sigma\beta - \Sigma\alpha}{8P}.$$

4) Ist endlich $D = -2P$, $P \equiv 1 \pmod 4$, so ergiebt sich ebenso aus (23_4)

$$H(D) = -\frac{1}{8P}\cdot\sum(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{\gamma^2-1}{8}}\left(\frac{\gamma}{P}\right)\gamma$$

d. i. bei Anwendung der in Formel (24_4) eingeführten Zeichen α, β

$$(26_4) \qquad H(D) = \frac{\Sigma\beta - \Sigma\alpha}{8P}.$$

Man sieht, dass auch hier wieder die drei letzten Fälle sich in eine einzige Formel zusammenfassen und folgender Satz sich aussprechen lässt:

Ist die negative Determinante $D = -\Delta$ nicht $\equiv 1 \pmod 4$, so ist immer

$$(27) \qquad H(D) = \frac{\Sigma\beta - \Sigma\alpha}{4\Delta},$$

wenn α, β diejenigen zu 2Δ primen Zahlen $< 4\Delta$ bezeichnen, für welche

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) = +1, \qquad \left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$$

ist.

Der Grund, warum der Fall $D \equiv 1 \pmod 4$ sich nicht unter die allgemeine, den übrigen Fällen entsprechende Formel fügt, ist darin zu suchen, dass wir unsere Betrachtung nur auf die eigentlich primitiven Formen der Determinante D beschränkt haben, in diesem Falle aber auch uneigentlich primitive Formen vorhanden sind. Lässt man in der Theorie der quadratischen Formen diesen Unterschied fallen oder vielmehr, legt man dieser Theorie nicht die Formen von der Gestalt

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

sondern diejenigen von der Gestalt

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

zu Grunde, so bedarf man, wie Kronecker gezeigt hat*), zur Bestimmung der Classenanzahl nur zweier Formeln, eine für positive, und eine für negative Determinanten.

4. Wir wollen nunmehr den zweiten der erwähnten Wege zur Berechnung der Summe S einschlagen, auf welchem wir noch verschiedene andere Ausdrücke für die Classenanzahl erhalten können, die wir wenigstens für negative Determinanten aufstellen wollen. Die Formel (11) bietet uns, den vier verschiedenen Fällen entsprechend, das nöthige Hilfsmittel dazu dar.

Ist zunächst $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, so kommt sie, wie ohne Mühe erkennbar ist, auf die Gaussische Summenformel d. i. auf die Gleichung

$$\sum_{\mu} \left(\frac{\mu}{P}\right) e^{\frac{2k\pi\mu i}{P}} = i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \left(\frac{k}{P}\right) \sqrt{P}$$

zurück, in welcher $\left(\frac{k}{P}\right)$ die Null bedeutet, so oft k einen Theiler mit P gemeinschaftlich hat.

Ist also $P \equiv 3 \pmod 4$, so findet sich

$$(28_1) \qquad \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{\mu} \left(\frac{\mu}{P}\right) \sin \mu \frac{2k\pi}{P} = \left(\frac{k}{P}\right);$$

ist $P \equiv 1 \pmod 4$, so ist dagegen

$$(28_2) \qquad \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{\mu} \left(\frac{\mu}{P}\right) \cos \mu \frac{2k\pi}{P} = \left(\frac{k}{P}\right),$$

wo die Summationen über alle (man darf sagen: zu P primen) Zahlen $\mu < P$ erstreckt werden müssen.

Ist zweitens $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$, so sei $k = 2\gamma$, γ aber ungerade; dann findet sich

$$F\left(e^{\frac{2\pi\gamma i}{4P}}\right) = \sum_{\nu < 8P} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu}{P}\right) e^{\frac{2\pi\nu\gamma i}{4P}},$$

wofür jedoch einfacher gesetzt werden darf

$$F\left(e^{\frac{2\pi\gamma i}{4P}}\right) = 2 \cdot \sum_{\nu < 4P} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu}{P}\right) e^{\frac{2\pi\nu\gamma i}{4P}}.$$

*) In den Sitzungsber. der Berl. Acad. 1885 „Zur Theorie der elliptischen Funktionen“ p. 768.

Mit Rücksicht auf die Formeln (14) und (15) folgt hieraus, wenn $P \equiv 1 \pmod 4$ ist,

$$(29_1)\quad \frac{1}{\sqrt{4P}} \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu}{P}\right) \sin \frac{2\gamma\nu\pi}{4P} = (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right),$$

dagegen, wenn $P \equiv 3 \pmod 4$ ist,

$$(29_2)\quad \frac{1}{\sqrt{4P}} \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu}{P}\right) \cos \frac{2\gamma\nu\pi}{4P} = (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right),$$

wo $\left(\frac{\gamma}{P}\right) = 0$ zu setzen ist, wenn γ einen gemeinsamen Theiler mit P hat, und die Summationen auf alle ungeraden zu P primen Zahlen $\nu < 4P$ sich erstrecken.

Ist drittens $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$, so sei k eine ungerade Zahl γ, dann führen die Formeln (14) und (15) zu folgender Gleichung:
wenn $P \equiv 3 \pmod 4$ ist,

$$(30_1)\quad \frac{1}{\sqrt{8P}} \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right) \sin \frac{2\nu\gamma\pi}{8P} = (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right),$$

wenn aber $P \equiv 1 \pmod 4$ ist,

$$(30_2)\quad \frac{1}{\sqrt{8P}} \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right) \cos \frac{2\nu\gamma\pi}{8P} = (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} \left(\frac{\gamma}{P}\right),$$

wo $\left(\frac{\gamma}{P}\right) = 0$ zu setzen ist, wenn γ nicht prim ist gegen P, und die Summationen auf alle ungeraden zu P primen Zahlen $\nu < 8P$ sich erstrecken.

Ist viertens $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$, so kommt auf gleiche Weise, wenn $P \equiv 1 \pmod 4$ ist,

$$(31_1)\quad \frac{1}{\sqrt{8P}} \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right) \sin \frac{2\nu\gamma\pi}{8P} = (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}+\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right),$$

wenn dagegen $P \equiv 3 \pmod 4$ ist,

$$(31_2)\quad \frac{1}{\sqrt{8P}} \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right) \cos \frac{2\nu\gamma\pi}{8P} = (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}+\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma}{P}\right),$$

wo der Umfang der Summationen der vorige ist. —

Handelt es sich nun um die Berechnung der Summe

$$S = \sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

ausgedehnt über alle positiven zu $2P$ primen Zahlen n, so kann man die aufgestellten Formeln benutzen, um das allgemeine Glied durch eine endliche trigonometrische Reihe zu ersetzen und damit die ganze Summe in eine unendliche trigonometrische Reihe umzuwandeln, deren Werth aus der Theorie dieser Reihen bestimmt werden kann. Indem wir auf solche Weise nun die möglichen Fälle durchgehen wollen, uns dabei auf negative Determinanten beschränkend, dürfen wir absehen von dem Falle $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, in welchem das Verfahren keinen neuen Ausdruck für die Classenanzahl herbeiführen würde.

Es sei also zuerst $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$, sodass $P \equiv 1 \pmod 4$ vorausgesetzt wird, folglich

$$S = \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}. \tag{32}$$

Ersetzt man in dieser Summe den Faktor von $\frac{1}{n}$ nach (29_1) durch eine trigonometrische Reihe und kehrt dann die Ordnung der Summationen um, so findet man

$$S = \frac{1}{\sqrt{4P}} \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu}{P}\right) \sum_{n} \frac{1}{n} \sin n \frac{2\nu\pi}{4P},$$

wo die Summation in Bezug auf n auf alle ungeraden Zahlen bezogen werden darf, da für diejenigen von ihnen, welche nicht zu P prim sind, der für $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right)$ gesetzte Ausdruck verschwindet. Nun hat die Reihe

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$$

den Werth $+\frac{\pi}{4}$, wenn x zwischen 0 und π,

„ „ $-\frac{\pi}{4}$, „ x „ π „ 2π

liegt. Die auf n bezügliche Summe wird also

$$+\frac{\pi}{4}, \text{ wenn } \nu \text{ zwischen } 0 \text{ und } 2P,$$

$$-\frac{\pi}{4}, \quad \text{„} \quad \nu \quad \text{„} \quad 2P \text{ „ } 4P$$

liegt. Und somit findet sich

$$S = \frac{\pi}{4\sqrt{4P}}\left(\sum{}'(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right) - \sum{}''(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right)\right),$$

wenn die Accente den eben angedeuteten Umfang der Summationen bezeichnen. Bemerkt man jedoch, dass wegen $P \equiv 1 \pmod 4$ für eine Zahl $\nu = 4P - \nu'$

$$(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right) = -(-1)^{\frac{\nu'-1}{2}}\left(\frac{\nu'}{P}\right)$$

gefunden wird, so lässt sich einfacher schreiben

$$(32_1) \qquad S = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}}\sum{}'(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right),$$

wo die Summation auf alle ungeraden zu P primen Zahlen $\nu < 2P$ sich erstreckt.

Man kann aber in (32), statt den gesammten Faktor von $\frac{1}{n}$ durch eine trigonometrische Reihe zu ersetzen, dies nur bezüglich des Symbols $\left(\frac{n}{P}\right)$ mit Hilfe von (28_2) thun. Dann kommt

$$S = \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{\mu}\left(\frac{\mu}{P}\right)\sum_{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\cos n\frac{2\mu\pi}{P},$$

wo die Summation bezüglich n wieder auf alle ungeraden Zahlen erstreckt werden darf. Die Reihe

$$\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots$$

hat aber den Werth

$$+\frac{\pi}{4}, \text{ wenn } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{3\pi}{2} \text{ und } 2\pi,$$

$$-\frac{\pi}{4}, \text{ wenn } x \text{ zwischen } \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{3\pi}{2}$$

liegt. Demnach wird

$$S = \frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left(\sum{}'\left(\frac{\mu}{P}\right) - \sum{}''\left(\frac{\mu}{P}\right) + \sum{}'''\left(\frac{\mu}{P}\right)\right)$$

sein, wenn die drei Summen sich über alle zu P primen Zahlen erstrecken, welche resp. zwischen 0 und $\frac{P}{4}$, $\frac{P}{4}$ und $\frac{3P}{4}$, $\frac{3P}{4}$ und P sich befinden. Da $P \equiv 1 \pmod 4$, ergiebt sich leicht die dritte Summe gleich der ersten, und da zudem

$$\sum\left(\frac{\mu}{P}\right) = \sum'\left(\frac{\mu}{P}\right) + \sum''\left(\frac{\mu}{P}\right) + \sum'''\left(\frac{\mu}{P}\right) = 0$$

ist, darf man einfacher schreiben

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{P}} \cdot \sum'\left(\frac{\mu}{P}\right), \tag{32_2}$$

wenn die Summation nur auf alle zu P primen Zahlen $\mu < \frac{P}{4}$ erstreckt wird.

Sei zweitens $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$, während $P \equiv 3 \pmod 4$ vorausgesetzt wird, folglich

$$S = \sum(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}. \tag{33}$$

Wird hier der gesammte Faktor von $\frac{1}{n}$ nach (30_1) durch eine trigonometrische Reihe ersetzt, so kommt

$$S = \frac{1}{\sqrt{8P}} \sum_{\nu}(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right) \sum_{n}\frac{1}{n}\sin n \cdot \frac{2\nu\pi}{8P},$$

wo wieder über alle ungeraden n summirt werden darf. Somit findet man

$$S = \frac{\pi}{4\sqrt{8P}}\left(\sum'(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right) - \sum''(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right)\right),$$

die erste Summe über alle diejenigen ungeraden zu P primen Zahlen ν erstreckt, welche $< 4P$, die zweite über diejenigen, welche zwischen $4P$ und $8P$ enthalten sind. Da $P \equiv 3 \pmod 4$, so ist für eine Zahl $\nu = 8P - \nu'$

$$(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{\nu'^2-1}{8}}, \qquad \left(\frac{\nu}{P}\right) = -\left(\frac{\nu'}{P}\right)$$

und deshalb einfacher

$$S = \frac{\pi}{2\sqrt{8P}} \cdot \sum'(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right). \tag{33_1}$$

Wird dagegen in (33) nur das Symbol $\left(\frac{n}{P}\right)$ nach (28_1) durch trigonometrische Funktionen ausgedrückt, so kommt

$$S = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{\mu} \left(\frac{\mu}{P}\right) \sum_{n} (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{1}{n} \sin n \frac{2\mu\pi}{P};$$

n darf alle ungeraden Zahlen durchlaufen. Nun ist aber die Reihe

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots$$

nur dann von Null verschieden, wenn x entweder zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ oder zwischen $\frac{5\pi}{4}$ und $\frac{7\pi}{4}$ liegt, und sie hat je nach diesen beiden Fällen den Werth $+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ oder $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Darnach ergiebt sich

$$S = \frac{\pi}{2\sqrt{2P}} \left(\sum{}' \left(\frac{\mu}{P}\right) - \sum{}'' \left(\frac{\mu}{P}\right) \right),$$

die erste Summe auf alle zu P primen Zahlen μ zwischen $\frac{P}{8}$ und $\frac{3P}{8}$, die zweite auf alle solche Zahlen μ zwischen $\frac{5P}{8}$ und $\frac{7P}{8}$ erstreckt, was jedoch wegen $P \equiv 3 \pmod 4$ einfacher auch

$$(33_2) \qquad S = \frac{\pi}{\sqrt{2P}} \sum{}' \left(\frac{\mu}{P}\right)$$

geschrieben werden kann.

Endlich sei $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$, während $P \equiv 1 \pmod 4$ gedacht wird, folglich

$$(34) \qquad S = \sum (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}.$$

Hier bieten sich vier verschiedene Möglichkeiten zur Umformung. Erstens ersetzen wir den gesammten Faktor von $\frac{1}{n}$ nach (31_1) durch einen trigonometrischen Ausdruck; dies giebt

$$S = \frac{1}{\sqrt{8P}} \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2} + \frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right) \sum_{n} \frac{1}{n} \sin n \frac{2\pi\nu}{8P}$$

und führt zu der Formel

$$S = \frac{\pi}{4\sqrt{8P}}\left(\sum{}'(-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right) - \sum{}''(-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right)\right),$$

wo die erste Summe alle ungeraden zu P primen Zahlen $< 4P$, die zweite alle diejenigen zwischen $4P$ und $8P$ umfasst. Da $P \equiv 1 \pmod 4$ ist, wird für eine Zahl $\nu = 8P - \nu'$

$$(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} = -(-1)^{\frac{\nu'-1}{2}}, \quad (-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{\nu'^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{\nu}{P}\right) = \left(\frac{\nu'}{P}\right)$$

und folglich einfacher

$$(34_1) \qquad S = \frac{\pi}{2\sqrt{8P}} \cdot \sum{}'(-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right).$$

Zweitens lässt sich $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)$ nach (30_2) umformen, dadurch wird

$$S = \frac{1}{\sqrt{8P}} \sum_{\nu}(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right) \sum_{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \cos n \frac{2\nu\pi}{8P}$$

also

$$S = \frac{\pi}{4\sqrt{8P}}\left(\sum{}'(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right) - \sum{}''(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right) + \sum{}'''(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right)\right),$$

wo die drei Summen sich über alle ungeraden zu P primen Zahlen ν erstrecken, welche resp. zwischen 0 und $2P$, zwischen $2P$ und $6P$, und zwischen $6P$ und $8P$ enthalten sind; da nach (6) S. 49

$$\sum(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right) = 0$$

ist, ergiebt eine ähnliche Umformung wie bei (32_2) das Resultat:

$$(34_2) \qquad S = \frac{\pi}{\sqrt{8P}} \cdot \sum{}'(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right).$$

Drittens kann man $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)$ nach (29_1) durch eine trigonometrische Summe ersetzen und findet dann

$$S = \frac{1}{\sqrt{4P}} \sum_{\nu}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right) \sum_{n}(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{1}{n} \sin n \frac{2\nu\pi}{4P},$$

woraus, wie bei der zweiten Behandlung des zweiten Falles,

$$S = \frac{\pi}{2\sqrt{8P}}\left(\sum{}' (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right) - \sum{}'' (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right)\right)$$

hervorgeht, die erste Summation auf alle zu P primen ungeraden Zahlen zwischen $\frac{P}{2}$ und $\frac{3P}{2}$, die zweite auf alle diejenigen zwischen $\frac{5P}{2}$ und $\frac{7P}{2}$ erstreckt; da $P \equiv 1 \pmod 4$, wird für eine Zahl $\nu = 4P - \nu'$

$$(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right) = -(-1)^{\frac{\nu'-1}{2}}\left(\frac{\nu'}{P}\right)$$

sein, also einfacher

$$(34_3) \qquad S = \frac{\pi}{\sqrt{8P}} \sum{}' (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right).$$

Endlich kann man aber auch nur das Symbol $\left(\frac{n}{P}\right)$ selbst nach (28_2) durch eine trigonometrische Summe ausdrücken und findet dann

$$S = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{\mu}\left(\frac{\mu}{P}\right) \sum_{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} \frac{1}{n} \cos n\,\frac{2\mu\pi}{P}.$$

Die Reihe

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \cdots$$

geht durch die Substitution $x = \frac{5\pi}{2} - x'$ in die andere über

$$\frac{\sin x'}{1} - \frac{\sin 3x'}{3} - \frac{\sin 5x'}{5} + \frac{\sin 7x'}{7} + \cdots;$$

mit Rücksicht auf das bezüglich der letztern oben Gesagte verschwindet die erstere, ausser wenn x zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{7\pi}{4}$ und 2π liegt, wo sie den Werth $+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ hat, und wenn x zwischen $\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$ liegt, wo sie den Werth $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ hat. Demnach wird

$$S = \frac{\pi}{2\sqrt{2P}}\left(\sum{}'\left(\frac{\mu}{P}\right) - \sum{}''\left(\frac{\mu}{P}\right)\right),$$

wenn die erste Summation sich auf alle zu P primen Zahlen zwischen 0 und $\frac{P}{8}$ oder zwischen $\frac{7P}{8}$ und P, die zweite auf alle diejenigen zwischen $\frac{3P}{8}$ und $\frac{5P}{8}$ erstreckt; wegen $P \equiv 1 \pmod 4$ lässt sich dafür noch einfacher schreiben

$$(34_4) \qquad S = \frac{\pi}{\sqrt{2P}}\left(\sum{}'\left(\frac{\mu}{P}\right) - \sum{}''\left(\frac{\mu}{P}\right)\right),$$

wenn die erstere Summation auf diejenigen zu P primen Zahlen μ beschränkt wird, welche zwischen 0 und $\frac{P}{8}$, die zweite auf diejenigen, welche zwischen $\frac{3P}{8}$ und $\frac{P}{2}$ enthalten sind. —

5. Hierdurch vervollständigt sich nun die obige Tabelle für die Classenanzahl negativer Determinanten.

Ist $D = -P$, $P \equiv 1 \pmod 4$, so folgt aus (32_1)

$$H(D) = \frac{1}{2}\sum{}'(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{P}\right),$$

wo $\nu < 2P$ und prim zu $2P$; bezeichnen daher $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Anzahl der, für diese Determinante mit α, β bezeichneten Zahlen, welche $< 2P$ sind, so ist einfach

$$(26_2') \qquad H(D) = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{2}.$$

Aus (32_2) folgt aber

$$H(D) = 2\sum{}'\left(\frac{\mu}{P}\right)$$

d. i.

$$(26_2'') \qquad H(D) = 2(A' - B'),$$

wenn A', B' die Anzahl derjenigen der mit a, b bezeichneten Zahlen angeben, welche $< \frac{P}{4}$ sind.

Ist $D = -2P$, $P \equiv 3 \pmod 4$, so folgt aus (33_1)

$$H(D) = \frac{1}{2}\sum{}'(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}\left(\frac{\nu}{P}\right),$$

wo $\nu < 4P$ und prim zu $4P$; bedeuten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Anzahl der für diese Determinante mit α, β bezeichneten Zahlen, welche $< 4P$ sind, so wird wieder

$$(26_3') \qquad H(D) = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{2};$$

aus (33_2) aber folgt

$$H(D) = 2 \sum{}' \left(\frac{\mu}{P}\right)$$

d. i.

$$(26_3'') \qquad H(D) = 2(A' - B'),$$

wenn A', B' die Anzahl derjenigen mit a, b bezeichneten Zahlen bedeuten, welche zwischen $\frac{P}{8}$ und $\frac{3P}{8}$ enthalten sind.

Ist endlich $D = -2P$, $P \equiv 1 \pmod 4$, so folgt aus (34_1)

$$H(D) = \frac{1}{2} \sum{}' (-1)^{\frac{\nu-1}{2} + \frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right)$$

d. h., wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Anzahl derjenigen für diese Determinante mit α, β bezeichneten Zahlen bedeuten, welche $< 4P$ sind,

$$(26_4') \qquad H(D) = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{2};$$

die Formel (34_2) liefert

$$(26_4'') \qquad H(D) = \sum{}' (-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{P}\right),$$

wo $\nu < 2P$ und prim zu $2P$; nach (34_3) ist ferner

$$(26_4''') \qquad H(D) = \sum{}' (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu}{P}\right),$$

wo ν zwischen $\frac{P}{2}$ und $\frac{3P}{2}$ und prim zu $2P$; endlich nach (34_4)

$$H(D) = 2\left(\sum{}' \left(\frac{\mu}{P}\right) - \sum{}'' \left(\frac{\mu}{P}\right)\right)$$

d. i.

$$(26_1'''') \qquad H(D) = 2(A' - B' - A'' + B''),$$

wo A', B' die Anzahl derjenigen mit a, b bezeichneten Zahlen bedeuten, die zwischen 0 und $\frac{P}{8}$, A'', B'' die Anzahl derjenigen von ihnen, welche zwischen $\frac{3P}{8}$ und $\frac{P}{2}$ enthalten sind.

Den drei letzten Fällen von Determinanten kommt wieder eine gemeinsame Formel zu, welche man folgendermassen aussprechen kann:

Ist die negative Determinante $D = -\Delta$ nicht $\equiv 1 \pmod 4$, so ist immer

$$H(D) = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{2}, \tag{27'}$$

wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Anzahl derjenigen Zahlen α, $\beta < 2\Delta$ bezeichnen, für welche resp.

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right) = +1, \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$$

ist.

Die Uebereinstimmung der verschiedenen für dieselbe negative Determinante ermittelten Ausdrücke für die Classenanzahl lässt sich unschwer nachweisen. Wir begnügen uns damit, diesen Nachweis für den ersten der unterschiedenen Fälle $D = -P$, $P \equiv 3 \pmod 4$ beizubringen*). Es handelt sich hier um die Bestätigung der Gleichung

$$\left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \frac{\Sigma b - \Sigma a}{P} = A - B, \tag{35}$$

wo a, b die sämmtlichen zu P primen Zahlen $< P$ bedeuten, für welche resp.

$$\left(\frac{a}{P}\right) = +1, \quad \left(\frac{b}{P}\right) = -1$$

ist und A, B die Anzahl derjenigen von ihnen, welche $< \frac{P}{2}$ sind.

Sei zunächst $\left(\frac{2}{P}\right) = +1$, dann bestimme man zu jeder Zahl b eine Zahl $b' < P$ mittels der Congruenz

$$2b' \equiv b \pmod P;$$

offenbar durchläuft gleichzeitig mit b auch die Zahl b' die Reihe aller Zahlen $b < P$, sodass

$$\frac{\Sigma b}{P} = \frac{\Sigma(2b' - b)}{P} \tag{36}$$

sein wird. Ist aber $b' < \frac{P}{2}$, so muss $2b' - b = 0$ sein, und dies geschieht B mal; ist dagegen $b' > \frac{P}{2}$, so muss $2b' - b = P$

*) Vgl. hierzu Stephen Smith, Report on the theory of Numbers in den Reports of the British Association for the advancement of Sciences, Jahrg. 1861.

sein, und da in diesem Falle $P - b' < \frac{P}{2}$ und $\left(\frac{P-b'}{P}\right) = +1$ ist, entspricht jeder solchen Zahl b' eine der Zahlen a und umgekehrt, ihre Anzahl ist also A. Aus (36) ergiebt sich also

$$\frac{\Sigma b}{P} = A.$$

Und da aus ähnlichen auf die Zahlen a bezüglichen Betrachtungen sich

$$\frac{\Sigma a}{P} = B$$

ergiebt, findet man in diesem ersten Falle

$$\frac{\Sigma b - \Sigma a}{P} = A - B. \tag{37}$$

Ist zweitens $\left(\frac{2}{P}\right) = -1$, so bestimme man zu jeder Zahl b eine Zahl $b' < P$ mittels der Congruenz

$$2b' + b \equiv 0 \pmod{P};$$

offenbar durchlaufen dann b und b' gleichzeitig alle Zahlen $b < P$ und man findet

$$\frac{3\Sigma b}{P} = \frac{\Sigma(2b' + b)}{P}. \tag{38}$$

Ist nun $b' < \frac{P}{2}$, was Bmal geschieht, so ist $2b' + b = P$, wenn dagegen $b' > \frac{P}{2}$ ist, was nach dem im vorigen Falle Bemerkten Amal geschieht, so ist $2b' + b = 2P$, folglich ergiebt sich aus (38)

$$\frac{3\Sigma b}{P} = B + 2A;$$

und da aus ähnlichen auf die Zahlen a bezüglichen Betrachtungen

$$\frac{3\Sigma a}{P} = 2B + A$$

hervorgeht, findet man für diesen zweiten Fall

$$3 \cdot \frac{\Sigma b - \Sigma a}{P} = A - B, \tag{39}$$

kann aber die Formeln (37) und (39) in die eine, für beide Fälle giltige, zu Beweis stehende Formel

$$\left(2-\left(\frac{2}{P}\right)\right)\cdot\frac{\Sigma b-\Sigma a}{P}=A-B$$

zusammenfassen.

Nicht unerwähnt soll hier bleiben, wie man nach Cauchy*) die auf den vorliegenden Fall bezügliche Formel (26_1) bestätigen kann.

Ist $f(x)$ irgend eine zwischen 0 und P stetige Funktion von x, so kann man mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen

$$\sum f(a)-\sum f(b)=\sum\left(\frac{h}{P}\right)f(h)$$

setzen, wenn man die letztere Summe auf alle zu P primen Zahlen $h<P$ bezieht. Nun ist nach der Theorie der Fourier'schen Reihen

$$f(h)=\frac{1}{P}\int_0^P f(x)\,dx+\frac{2}{P}\sum_{1,m}^{\infty}\int_0^P f(x)\cos\frac{2m\pi(h-x)}{P}\,dx,$$

und demgemäss, da

$$\sum\left(\frac{h}{P}\right)=0$$

ist,

$$(40)\quad \sum f(a)-\sum f(b)=\frac{2}{P}\sum_{1,m}^{\infty}\left(\sum_h\left(\frac{h}{P}\right)\int_0^P f(x)\cos\frac{2m\pi(h-x)}{P}\,dx\right).$$

Da $P\equiv 3 \pmod 4$ ist, folgt aus der Gaussischen Summenformel

$$\sum_h\left(\frac{h}{P}\right)e^{\frac{2hm\pi i}{P}}=\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P}\cdot i$$

d. h.

$$\sum_h\left(\frac{h}{P}\right)\sin\frac{2mh\pi}{P}=\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P},\qquad \sum_h\left(\frac{h}{P}\right)\cos\frac{2mh\pi}{P}=0.$$

Löst man also in (40) den cosinus unter dem Integralzeichen in seine Bestandtheile auf, so kommt

$$\sum f(a)-\sum f(b)=\frac{2}{\sqrt{P}}\cdot\sum_{1,m}^{\infty}\left(\frac{m}{P}\right)\int_0^P f(x)\sin\frac{2mx\pi}{P}\,dx.$$

*) S. Mém. de l'Acad. des Sciences vol. 17 p. 673.

Insbesondere, wenn $f(x) = x$ gewählt und dann die einfache Integration ausgeführt wird, findet sich

$$\sum b - \sum a = \frac{P\sqrt{P}}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m}.$$

Hier ist nun

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m} = \lim_{\varrho=0} \sum_{m} \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m^{1+\varrho}}$$

gleich dem Grenzwerthe des Produktes

$$\prod \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{P}\right) \frac{1}{q^{1+\varrho}}},$$

ausgedehnt auf alle nicht in P aufgehende Primzahlen q. Desgleichen ist S der Grenzwerth desselben Produktes, wenn es auf alle nicht in $2P$ aufgehende Primzahlen erstreckt wird, man findet daher sogleich

$$\sum_{m} \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)} \cdot S$$

und folglich

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)}{P\sqrt{P}} \cdot \pi \left(\sum b - \sum a\right),$$

was durch Vergleichung mit der allgemeinen Formel (22) des 6. Abschn. für die Classenanzahl die Gleichung

$$H(D) = \left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \frac{\Sigma b - \Sigma a}{P}$$

zurückgiebt. —

Die Ausdrücke, welche wir im Vorigen für die Anzahl der Formenclassen einer negativen Determinante gefunden haben, und welche sich wesentlich unter der Form gewisser Differenzen dargestellt haben, beweisen durch den Umstand, dass stets mindestens eine Classe vorhanden ist, die interessante Thatsache, dass alle jene Differenzen wesentlich positiv sind. Z. B. also muss nach Gleichung ($26_1'$) die Differenz $A - B$ stets positiv sein d. h. unter den Zahlen, welche zu P prim und $< \frac{P}{2}$ sind, ist die *Anzahl* derjenigen Zahlen a, welche

die Bedingung $\left(\frac{a}{P}\right) = 1$ erfüllen, stets *grösser* als die *Anzahl* der Zahlen b, für welche $\left(\frac{b}{P}\right) = -1$ ist; dagegen ist wegen (26,) bei denselben Zahlen $< P$ die *Summe* aller Zahlen a der ersten Kategorie stets *kleiner* als die *Summe* aller Zahlen b der zweiten Kategorie.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass bisher diese und die auf die andern Fälle negativer Determinanten bezüglichen analogen Sätze ebenso wenig auf rein arithmetischem Wege haben bestätigt werden können, als der höchst merkwürdige Zusammenhang zwischen der Classenanzahl und den in gewissen Grenzen enthaltenen quadratischen Resten und Nichtresten (mod. P) näher aufgeklärt worden ist.

6. Noch interessanter fast sind die Bemerkungen, zu denen die Ausdrücke für die Classenanzahl bei positiver Determinante Veranlassung geben. Diese weisen offenbar einen sehr wesentlichen Unterschied auf von denen bei negativer Determinante, insofern die letztern schon solche Form haben, dass die Classenanzahl als ganze Zahl deutlich hervortritt, während die Ausdrücke bei positiver Determinante, zunächst noch mit analytischen Funktionen vermischt, jenen Umstand durchaus nicht ohne weiteres erkennen lassen. Hier ist es demnach sehr wichtig, dass Dirichlet gelehrt hat, wie den Formeln eine andere viel einfachere Gestalt gegeben werden kann, bei welcher dieser Umstand ganz klar zu Tage tritt; und die eigenthümliche Art, wie es geschieht, ist ein neues, interessantes Beispiel für den überraschenden Zusammenhang verschiedenster Gebiete, den so oft die Zahlentheorie kund giebt: das Mittel, durch welches wir hier zum Ziele gelangen, ist nämlich die Kreistheilung; sie liefert eine Auflösung der Pell'schen Gleichung, und mit dieser aus der Kreistheilung entspringenden Auflösung der Pell'schen Gleichung ist die Classenanzahl auf das nächste verbunden!

Wir wollen uns bei dieser Darstellung der Kürze wegen auf den einfachsten, prägnantesten Fall beschränken, wo die Determinante $D = P \equiv 1 \pmod 4$ ist.

Wir erinnern zunächst an einen bekannten Satz*). Sei P aus lauter verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzt:

$$P = p\, p'\, p'' \ldots$$

und daraus folgende Reihen ganzer Zahlen gebildet:

(0) P

(I) $\frac{P}{p}, \quad \frac{P}{p'}, \quad \frac{P}{p''}, \quad \ldots$

(II) $\frac{P}{pp'}, \quad \frac{P}{pp''}, \quad \frac{P}{p'p''}, \quad \ldots$

(III) $\frac{P}{pp'p''}, \quad \frac{P}{pp'p'''}, \quad \ldots$

u. s. f., bis eine letzte Reihe nur die eine Zahl 1 enthält, welche durch Theilung von P durch alle seine Primfaktoren entsteht. Die Zahlen der geraden Ziffern zusammengenommen nennen wir die Zahlen λ, die Zahlen der ungeraden Ziffern zusammengenommen die Zahlen μ; man sieht leicht ein, dass die Anzahl der λ gleich der Anzahl der μ ist. Der zu erwähnende Satz aber lautet: Jeder Theiler von P, welcher von P selber verschieden ist, geht in ebensoviel Zahlen λ auf, wie in Zahlen μ. Hiernach wird, wenn P eine zusammengesetzte Zahl ist, der Quotient

$$\frac{\Pi\lambda}{\Pi\mu} = 1$$

sein, denn Zähler wie Nenner enthält nur Primfaktoren, welche auch in P aufgehen und jeder Primfaktor von P hebt sich aus Zähler und Nenner heraus. Ist dagegen P eine Primzahl p, so ist offenbar

$$\frac{\Pi\lambda}{\Pi\mu} = \frac{p}{1}.$$

Allgemein dürfen wir daher setzen

$$\frac{\Pi\lambda}{\Pi\mu} = P^{\gamma}, \tag{41}$$

indem wir für γ den Werth 1 oder 0 wählen, je nachdem P Primzahl oder zusammengesetzte Zahl ist.

*) S. El. der Zahlentheorie S. 40; vgl. dazu 11. Abschnitt Nr. 4.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir die Gleichung

$$x^P - 1 = 0$$

mit den Wurzeln

$$x = e^{\frac{2h\pi i}{P}} \tag{42}$$

$$(\text{für } h = 0, 1, 2, \ldots P - 1).$$

Die Gleichung, welcher die sogenannten primitiven der bezeichneten Einheitswurzeln d. i. diejenigen Wurzeln (42) genügen, bei welchen h prim ist zu P, ist nach der Theorie der binomischen Gleichungen*) die folgende:

$$X(x) = 0,$$

wo

$$X(x) = \frac{\Pi(x^\lambda - 1)}{\Pi(x^\mu - 1)}$$

ist und die Multiplikation auf alle oben definirten Zahlen λ, μ zu erstrecken ist. Hierfür darf man auch schreiben:

$$X(x) = \frac{\prod \frac{x^\lambda - 1}{x - 1}}{\prod \frac{x^\mu - 1}{x - 1}}$$

und findet dann für $x = 1$

$$X(1) = \frac{\Pi\lambda}{\Pi\mu} = P^\gamma. \tag{43}$$

Andererseits ist

$$X(x) = \prod_h \left(x - e^{\frac{2h\pi i}{P}}\right),$$

die Multiplikation auf alle zu P primen Zahlen $h < P$ erstreckt; theilt man diese wieder in die beiden Kategorien der Zahlen a, b, für welche

$$\left(\frac{a}{P}\right) = +1, \quad \left(\frac{b}{P}\right) = -1$$

resp. ist, so lässt sich auch setzen

$$X(x) = A(x)\, B(x), \tag{44}$$

*) S. des Verf. Lehre von der Kreistheilung S. 16.

wo $A(x) = \prod_a \left(x - e^{\frac{2a\pi i}{P}}\right)$, $B(x) = \prod_b \left(x - e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)$

ist. Wir suchen zunächst die allgemeine Form der Coefficienten der ganzen Funktionen $A(x)$, $B(x)$ festzustellen. Hierzu erinnern wir daran, dass die Coefficienten einer Gleichung mittels der Newton'schen Formeln durch die Summen gleicher Potenzen ihrer Wurzeln ausgedrückt werden können; suchen wir demnach die Summen

$$\sum_a e^{\frac{2ka\pi i}{P}} \quad \text{und} \quad \sum_b e^{\frac{2kb\pi i}{P}}$$

zu ermitteln. Dies geschieht aber einfach mittels der Sätze über die Gaussischen Summen, nach welchen

$$\sum_h \left(\frac{h}{P}\right) e^{\frac{2kh\pi i}{P}} \quad \text{d. i.} \quad \sum_a e^{\frac{2ak\pi i}{P}} - \sum_b e^{\frac{2bk\pi i}{P}}$$

gleich $\left(\frac{k}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P}$, hier also, wo $P \equiv 1 \pmod 4$ vorausgesetzt ist, gleich $\left(\frac{k}{P}\right)\sqrt{P}$ ist, sowie mittels des allgemeinen algebraischen Satzes, nach welchem die ganze symmetrische Funktion

$$\sum_a e^{\frac{2ak\pi i}{P}} + \sum_b e^{\frac{2bk\pi i}{P}}$$

von den Wurzeln der Gleichung $X(x) = 0$ zugleich mit den Coefficienten dieser Gleichung eine ganze Zahl sein muss, welche m heisse. Hieraus folgt

$$\sum_a e^{\frac{2ak\pi i}{P}} = \frac{1}{2}\left(m + \left(\frac{k}{P}\right)\sqrt{P}\right)$$

$$\sum_b e^{\frac{2bk\pi i}{P}} = \frac{1}{2}\left(m - \left(\frac{k}{P}\right)\sqrt{P}\right)$$

und nunmehr zeigen die Newton'schen Formeln, dass die Coefficienten von $A(x)$ zu den entsprechenden Coefficienten von $B(x)$ conjugirt, dass sie nämlich von der Form

$$\frac{\alpha - \beta\sqrt{P}}{2} \quad \text{resp.} \quad \frac{\alpha + \beta\sqrt{P}}{2}$$

sein müssen, in welcher α, β ganze Zahlen bedeuten. Folglich findet sich

$$(45)\qquad \begin{cases} A(x) = \dfrac{Y(x) - Z(x)\sqrt{P}}{2} \\ B(x) = \dfrac{Y(x) + Z(x)\sqrt{P}}{2}, \end{cases}$$

unter $Y(x)$, $Z(x)$ ganze Funktionen von x verstanden, welche ganzzahlige Coefficienten haben.

Setzt man demnach $x = 1$, so werden diese Funktionen ganzzahlige Werthe annehmen:

$$Y(1) = y, \quad Z(1) = z,$$

und diese werden wegen (44) und mit Rücksicht auf (43) die Bedingung erfüllen

$$y^2 - Pz^2 = 4P^\gamma.$$

Ist $\gamma = 1$ d. h. P eine Primzahl, so muss y durch P theilbar sein, man kann demnach in allen Fällen

$$(46)\qquad y + z\sqrt{P} = (y_0 + z_0\sqrt{P}) \cdot P^{\frac{\gamma}{2}}$$

setzen, wo nun die ganzen Zahlen y_0, z_0 die Gleichung

$$y_0^2 - Pz_0^2 = 4 \cdot (-1)^\gamma$$

erfüllen. Nun müssen y_0, z_0 entweder zugleich gerade oder zugleich ungerade sein, und es ist leicht einzusehen, dass das erstere stets dann geschieht, wenn $P \equiv 1 \pmod 8$ ist. Sind erstens y_0, z_0 gerade, so setze man

$$(47)\qquad \left(\frac{y_0 + z_0\sqrt{P}}{2}\right)^{1+\gamma} = \tau + \upsilon\sqrt{P};$$

offenbar sind τ, υ dann ganze Zahlen; da aber aus dieser Gleichung

$$\tau^2 - P\upsilon^2 = (-1)^{\gamma(1+\gamma)} = 1$$

hervorgeht, so bilden die so bestimmten ganzen Zahlen τ, υ eine Auflösung der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Pu^2 = 1,$$

und ohne Mühe folgt zudem aus (47)

$$\left(\frac{y_0 + z_0\sqrt{P}}{2}\right)^2 = (\tau + \upsilon\sqrt{P})^{2-\gamma}$$

d. h.

$$\left(\frac{y+z\sqrt{P}}{2P^{\gamma/2}}\right)^2=(\tau+v\sqrt{P})^{2-\gamma}. \tag{48}$$

Sind dagegen y_0, z_0 zweitens ungerade, und folglich $P\equiv 5 \pmod 8$, so setze man

$$(y_0+z_0\sqrt{P})^3=y_1+z_1\sqrt{P}$$

nämlich

$$y_1=y_0^3+3y_0z_0^2P, \qquad z_1=3y_0^2z_0+z_0^3P;$$

da

$$y_0^2+3z_0^2P\equiv 1+15\equiv 0,\ 3y_0^2+z_0^2P\equiv 3+5\equiv 0 \pmod 8$$

gefunden wird, so sind y_1, z_1 durch 8 theilbare ganze Zahlen, und wenn dann

$$\left(\frac{y_1+z_1\sqrt{P}}{8}\right)^{1+\gamma} \quad \text{d. i.} \quad \left(\frac{y_0+z_0\sqrt{P}}{2}\right)^{3(1+\gamma)}=\tau+v\sqrt{P}$$

gesetzt wird, werden wieder τ, v eine ganzzahlige Lösung der Pell'schen Gleichung darstellen, denn man findet

$$\tau^2-Pv^2=\left(\frac{y_0^2-Pz_0^2}{4}\right)^{3(1+\gamma)}=1.$$

Zudem lässt sich schreiben

$$\left(\frac{y_0+z_0\sqrt{P}}{2}\right)^6 \quad \text{d. i.} \quad \left(\frac{y+z\sqrt{P}}{2P^{\gamma/2}}\right)^6=(\tau+v\sqrt{P})^{2-\gamma}. \tag{49}$$

Wir wollen die ganzzahlige Lösung τ, v der Pell-schen Gleichung

$$t^2-Pu^2=1,$$

welche auf solche Weise gefunden wird, die Kreistheilungslösung dieser Gleichung nennen.

7. Gehen wir nun zurück zu dem Ausdrucke der Classenanzahl, welcher dem Falle der Determinante $D=+P\equiv 1 \pmod 4$ entspricht, nämlich zur Formel (24_1):

$$H(D)=\frac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})}\cdot\log\prod\frac{\sin\frac{b\pi}{P}}{\sin\frac{a\pi}{P}}, \tag{50}$$

so lässt sich darin zunächst das Produkt durch folgende Betrachtung umformen. Man hat

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \prod \left(\frac{x - e^{\frac{2b\pi i}{P}}}{x - e^{\frac{2a\pi i}{P}}} \right)$$

und folglich

$$\frac{B(1)}{A(1)} = \prod \left(\frac{1 - e^{\frac{2b\pi i}{P}}}{1 - e^{\frac{2a\pi i}{P}}} \right),$$

wofür nach den einfachsten Sätzen auch

$$\prod \frac{e^{\frac{b\pi i}{P}}}{e^{\frac{a\pi i}{P}}} \cdot \frac{2i \sin \frac{b\pi}{P}}{2i \sin \frac{a\pi}{P}} = e^{\frac{\pi i}{P}(\Sigma b - \Sigma a)} \cdot \prod \frac{\sin \frac{b\pi}{P}}{\sin \frac{a\pi}{P}}$$

gesetzt werden kann. Nun ist $P \equiv 1 \pmod 4$, jedem Werthe b entspricht daher ein Werth $b' = P - b$; ist daher B die Anzahl der Zahlen b, welche $< \frac{P}{2}$ sind, so ist $\Sigma b = B \cdot P$, und ebenso ist auch $\Sigma a = A \cdot P$, wenn A die Anzahl der Zahlen a bezeichnet, welche $< \frac{P}{2}$ sind; der Exponent von e wird auf solche Weise

$$\pi i (B - A)$$

d. i. ein gerades Vielfaches von πi, denn $B - A$ ist ebenso gerade, wie die Summe $B + A = \frac{1}{2}\varphi(P)$. Wir finden also schliesslich

$$\frac{B(1)}{A(1)} = \prod \frac{\sin \frac{b\pi}{P}}{\sin \frac{a\pi}{P}}. \tag{51}$$

Die linke Seite dieser Formel darf aber auch durch

$$\frac{B(1)^2}{A(1)\,B(1)} = \left(\frac{y + z\sqrt{P}}{2P^{\nu/2}} \right)^2$$

ersetzt werden. Somit geht die Gleichung (50) in die folgende über:

$$H(D) = \frac{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}{\log (T + U\sqrt{P})} \cdot \log \left(\frac{y + z\sqrt{P}}{2P^{\nu/2}} \right)^2$$

d. i., wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$(52) \qquad (T + U\sqrt{P})^{H(D)} = \left(\frac{y + z\sqrt{P}}{2\,P^{\gamma/2}}\right)^{2\left(2-\left(\frac{2}{P}\right)\right)}.$$

Diese Formel nimmt je nach den beiden im Vorigen unterschiedenen Fällen, welche uns zur Formel (48) oder (49) führten, die besondere Gestalt an:

$$(52_1) \qquad (T + U\sqrt{P})^{H(D)} = (\tau + v\sqrt{P})^{(2-\gamma)\left(2-\left(\frac{2}{P}\right)\right)}$$

oder, da im zweiten Falle $P \equiv 5 \pmod 8$ also $2 - \left(\frac{2}{P}\right) = 3$ ist,

$$(52_2) \qquad (T + U\sqrt{P})^{H(D)} = (\tau + v\sqrt{P})^{2-\gamma}$$

an. Nach der Theorie der Pell'schen Gleichung kann die Kreistheilungsauflösung derselben durch ihre Fundamentalauflösung T, U ausgedrückt werden, indem in der Formel

$$\tau + v\sqrt{P} = (T + U\sqrt{P})^{\omega}$$

für den Exponenten ω eine passende ganze Zahl gesetzt wird. Demnach findet sich dann aus (52_1) und (52_2) schliesslich

$$(53) \quad H(D) = \left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right)(2-\gamma)\,\omega \text{ resp. } H(D) = (2-\gamma)\,\omega.$$

Dies sind die Formeln für die Classenanzahl, welche wir herleiten wollten. Man sieht aus ihnen, wie sie im letzten Grunde lediglich durch die Kreistheilungsauflösung der Pell'schen Gleichung bestimmt sind. Der merkwürdige Zusammenhang, der sich zwischen so ganz verschiedenen Fragen der Zahlentheorie hier ausprägt, blieb einstweilen noch gänzlich unaufgeklärt, da auch hier eine rein arithmetische Bestimmung der Classenanzahl noch Niemand gelungen ist.

Wir haben schliesslich hier noch eine Bemerkung anzufügen ähnlich derjenigen, welche bei negativen Determinanten zu verzeichnen war, eine Bemerkung nämlich in Betreff des Vorzeichens der ganzen Zahlen, welche y, z genannt worden sind.

Aus (50) und (51) folgt nämlich

$$H(D) \cdot \log(T + U\sqrt{P}) = \left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \log \frac{B(1)}{A(1)},$$

wo die linke Seite ihrer Bedeutung nach positiv ist; demnach ist

$$\frac{B(1)}{A(1)} > 1$$

d. h.

$$\frac{y + z\sqrt{P}}{y - z\sqrt{P}} > 1 .$$

Da aber einer oben gemachten Bemerkung gemäss

$$A(x) = \prod_{a < \frac{P}{2}} \left(x - e^{\frac{2a\pi i}{P}}\right)\left(x - e^{-\frac{2a\pi i}{P}}\right)$$

$$B(x) = \prod_{b < \frac{P}{2}} \left(x - e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)\left(x - e^{-\frac{2b\pi i}{P}}\right)$$

gesetzt werden können, so sind $A(1)$, $B(1)$, weil aus paarweis conjugirt imaginären Faktoren bestehend, wesentlich positiv. Hieraus folgt

$$y - z\sqrt{P} > 0, \quad y + z\sqrt{P} > 0$$

also auch $y > 0$; die obige Ungleichheit aber liefert

$$y + z\sqrt{P} > y - z\sqrt{P}$$

und folglich auch $z > 0$. Die Zahlen y, z sind also wesentlich positiv. Auch dieser Satz ist bisher noch auf keinem andern Wege bestätigt worden.

8. Die so verschiedenen Formen, welche die Ausdrücke für die Classenanzahl im Fall einer positiven und einer negativen Determinante darbieten, reizt von selbst zu der Frage nach dem Verhältnisse, in welchem sie zu einander stehen, und inwieweit sie einander angenähert werden können. Wir wollen dieser Frage in dem Falle $D = \pm P \equiv 1 \pmod 4$ näher treten.

Ist $D = +P$, so fanden wir, dass die Classenanzahl durch die Funktion

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \prod \left(\frac{x - e^{\frac{2b\pi i}{P}}}{x - e^{\frac{2a\pi i}{P}}} \right)$$

bestimmt wird; auf diese lässt sie sich aber auch im Falle $D = -P$ leicht zurückführen. Setzt man

$$F(x) = \log \frac{B(x)}{A(x)} \tag{54}$$

und untersucht das Integral

$$\int_0^1 dF(x),$$

so findet sich ohne Mühe dafür der Werth

$$-\sum \left(\frac{h}{P}\right)\left(\log \sin \frac{h\pi}{P} - \frac{h\pi i}{P}\right),$$

die Summation auf alle $h < P$, welche prim zu P sind, ausgedehnt. Ist zuerst $P = 4\mu + 1$, so verschwindet nach (20^3) die Summe $\sum \left(\frac{h}{P}\right) h$ und es ergiebt sich

$$\int_0^1 dF(x) = \log \prod \frac{\sin \frac{b\pi}{P}}{\sin \frac{a\pi}{P}}$$

also nach (50)

$$H(+P) = \frac{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}{\log (T + U\sqrt{P})} \cdot \int_0^1 dF(x). \tag{55}$$

Ist aber $P = 4\mu + 3$, so verschwindet nach (20_3) die Summe

$$\sum \left(\frac{h}{P}\right) \log \sin \frac{h\pi}{P},$$

folglich ist

$$\int_0^1 dF(x) = \frac{\pi i}{P} \sum \left(\frac{h}{P}\right) h$$

d. i. nach (26_1)

$$H(-P) = \frac{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}{\frac{\pi}{i}} \cdot \int_0^1 dF(x). \tag{56}$$

Da nun im erstern Falle für das früher eingeführte Zeichen ϑ die Gleichung

$$\log (T + U\sqrt{P}) = \vartheta \cdot \sqrt{P},$$

im zweiten Falle die Gleichung

$$\frac{\pi}{i} = \vartheta \cdot \sqrt{P}$$

gilt, lassen sich die Formeln (55) und (56) in die einzige, allgemein giltige zusammenfassen:

$$H(\pm P) = \frac{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}{\vartheta \cdot \sqrt{P}} \cdot \int_0^1 dF(x), \tag{57}$$

durch welche die Classenanzahl auf die der Kreistheilung entstammende Funktion $F(x)$ zurückgeführt wird.

Noch eine andere hierher gehörende Beziehung soll abgeleitet werden. Ist $P = 4\mu + 3$, so ergeben sich nach den Gaussischen Summenformeln die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P} = \sum_h \left(\frac{h}{P}\right) \sin\frac{2mh\pi}{P}, \quad 0 = \sum_h \left(\frac{h}{P}\right) \cos\frac{2mh\pi}{P},$$

wo die Summation auf alle Zahlen $h < P$ erstreckt werden darf, während m auch irgend eine dieser Zahlen bedeutet. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{P}$ und subtrahirt dann die zweite, so kommt

$$\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P}\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{P} = \sum_h \left(\frac{h}{P}\right) \frac{\sin(2h-1)\frac{m\pi}{P}}{\sin\frac{m\pi}{P}},$$

wofür nach bekannter Formel auch

$$2\sum_h \left(\frac{h}{P}\right)\left[\frac{1}{2} + \cos\frac{2m\pi}{P} + \cos\frac{4m\pi}{P} + \cdots + \cos(h-1)\frac{2m\pi}{P}\right]$$

gesetzt werden kann. Wird nun beiderseits über alle Werthe von m summirt, so ist für jeden der Werthe $s = 1, 2, 3, \ldots h-1$ die Summe zu bilden

$$\cos\frac{2s\pi}{P} + \cos\frac{4s\pi}{P} + \cdots + \cos(P-1)\frac{2s\pi}{P},$$

welche gleich

$$\frac{\sin(2P-1)\frac{s\pi}{P}}{2\sin\frac{s\pi}{P}} - \frac{1}{2} = -1$$

ist, und man findet

$$\sqrt{P} \cdot \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \operatorname{cotg} \frac{m\pi}{P} = 2 \cdot \sum_h \left(\frac{h}{P}\right)\left(\frac{P-1}{2} - (h-1)\right)$$

d. i. wegen $\sum_h \left(\frac{h}{P}\right) = 0$ gleich

$$-2 \sum_h \left(\frac{h}{P}\right) h .$$

Die Formel (26_1) liefert hiernach noch folgenden neuen Ausdruck für die Classenanzahl

$$H(-P) = \frac{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}{2\sqrt{P}} \cdot \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \operatorname{cotg} \frac{m\pi}{P} . \tag{58}$$

Nun ist aber

$$\frac{dF(x)}{dx} = -\sum_m \frac{\left(\frac{m}{P}\right)}{x - e^{\frac{2m\pi i}{P}}},$$

wo man m alle Zahlen $< P$ annehmen lassen darf, und da für $P = 4\mu + 3$

$$\left(\frac{P-m}{P}\right) = -\left(\frac{m}{P}\right), \quad e^{\frac{2(P-m)\pi i}{P}} = e^{-\frac{2m\pi i}{P}}$$

ist, während m und $P - m$ zugleich alle Werthe $< P$ durchlaufen, lässt sich schreiben

$$2\,\frac{dF(x)}{dx} = -\sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \frac{2i \sin \frac{2m\pi}{P}}{x^2 - 2x \cos \frac{2m\pi}{P} + 1}$$

also für $x = 1$

$$2\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)_{x=1} = -i \cdot \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \operatorname{cotg} \frac{m\pi}{P} .$$

Hierdurch nimmt die Gleichung (58) die Gestalt an:

$$H(-P) = i \cdot \frac{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}{\sqrt{P}} \cdot F'(x)_{x=1} . \tag{59}$$

Vergleicht man hiermit die Formel (55), der man nach den Ausführungen der vorigen Nr. auch diese Gestalt geben kann:

$$H(+P) = \frac{2 - \left(\frac{2}{P}\right)}{\log (T + U\sqrt{P})} \cdot F(x)_{x=1} , \tag{60}$$

so erkennt man den interessanten Umstand, dass, während die Classenanzahl für eine positive Determinante durch den Werth bestimmt wird, welchen die der Kreistheilung entstammende Funktion $F(x)$ für $x = 1$ annimmt, sie für eine negative Determinante durch den Werth bestimmt ist, welchen die *Ableitung* dieser Funktion für $x = 1$ annimmt.

Diese Bemerkung, sowie die Formel (58), aus welcher sie gewonnen wurde, entnehme ich einer Dissertation von Schemmel, welche unter dem Titel: de multitudine formarum secundi gradus Disquisitiones im Jahre 1863 zu Breslau erschienen ist.

Noch zwei weitere Formeln mögen hier Platz finden, welche an die Funktion $F(x)$ sich anknüpfen. Bedeutet z eine complexe Veränderliche, so wird die Funktion

$$\Pi\left(\frac{z - e^{\frac{2b\pi i}{P}}}{z - e^{\frac{2a\pi i}{P}}}\right)$$

Null nur für die Punkte $z = e^{\frac{2b\pi i}{P}}$ und unendlich nur für die Punkte $z = e^{\frac{2a\pi i}{P}}$, welche auf einem Kreise liegen, der den Nullpunkt der z-Ebene in der Entfernung 1 umgiebt. Nach bekannter, aus dem Fundamentalsatze von Cauchy folgender Formel findet sich daher

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\, dF(z) = \sum_b e^{\frac{2b\pi i}{P}} - \sum_a e^{\frac{2a\pi i}{P}}$$

d. h. nach dem Werthe der Gaussischen Summen: das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\, dF(z) \quad \text{ist} \quad -i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{P}, \tag{61}$$

wenn es über einen Kreis erstreckt wird, welcher dem genannten concentrisch ist und dessen Radius die Einheit beliebig wenig übertrifft.

Betrachtet man dagegen die Funktion

$$\Pi\left(\frac{e^{2z\pi i}-e^{\frac{2b\pi i}{P}}}{e^{2z\pi i}-e^{\frac{2a\pi i}{P}}}\right),$$

so verschwindet diese für alle Werthe $z=\frac{b}{P}+m$ und wird unendlich für alle Werthe $z=\frac{a}{P}+m$, wo m jede ganze Zahl bedeutet; sie verschwindet also innerhalb des genannten Kreises mit dem Radius 1 nur für die Punkte

$$z=\frac{b}{P} \quad \text{und} \quad z=-\frac{P-b}{P}$$

und wird unendlich nur für die Punkte

$$z=\frac{a}{P} \quad \text{und} \quad z=-\frac{P-a}{P};$$

wird aber $P\equiv 3 \pmod 4$ vorausgesetzt, so lassen sich die negativen von diesen Werthen auch resp. $z=\frac{-a}{P}$ und $z=\frac{-b}{P}$ nennen. Nach der zuvor erwähnten Formel findet sich demnach die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\,dF\left(e^{2z\pi i}\right)=2\cdot\frac{\Sigma b-\Sigma a}{P}$$

d. i. wegen (26_1) die folgende Formel:

$$H(-P)=\frac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{4\pi i}\cdot\int z\,dF\left(e^{2z\pi i}\right), \tag{62}$$

wenn die Integration auf den Kreis ausgedehnt wird, welcher den Nullpunkt in der Entfernung 1 umgiebt.

Neunter Abschnitt.

Die Geschlechter quadratischer Formen.

1. Wir werden in diesem Abschnitte die Eintheilung aller quadratischen Formen derselben Determinate sowie ihrer Classen in sogenannte Geschlechter (genera), wie sie Gauss gelehrt hat, auseinandersetzen, werden die Anzahl dieser Geschlechter mittels der Dirichlet'schen Methode bestimmen und sodann andere Untersuchungen daran anknüpfen, welche in unmittelbarem Zusammenhange damit stehen.

Die Grundlage für die Eintheilung der Formen in Geschlechter ist folgende Erwägung. Sei (a, b, c) eine quadratische Form mit der Determinante D, welche wir stets als verschieden von einer positiven Quadratzahl voraussetzen, und sei

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

jede durch diese Form darstellbare, zu $2D$ prime Zahl. Sind dann f', f'' irgend zwei solche Zahlen, sodass die Gleichungen stattfinden

$$f' = a\alpha'^2 + 2b\alpha'\gamma' + c\gamma'^2, \quad f'' = a\alpha''^2 + 2b\alpha''\gamma'' + c\gamma''^2,$$

so ergiebt sich auf Grund der fundamentalen Gleichheit

$$(a\alpha'^2 + 2b\alpha'\gamma' + c\gamma'^2)(a\alpha''^2 + 2b\alpha''\gamma'' + c\gamma''^2)$$
$$= \big(a\alpha'\alpha'' + b(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma') + c\gamma'\gamma''\big)^2 - D(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma')^2$$

und wenn zur Abkürzung

$$x = a\alpha'\alpha'' + b(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma') + c\gamma'\gamma'', \qquad y = \alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma'$$

gesetzt wird, sofort die Gleichung

$$f'f'' = x^2 - Dy^2; \tag{1}$$

aus ihr aber geht ein in gewisser Hinsicht übereinstimmendes Verhalten aller zu $2D$ primen und durch (a, b, c) darstellbaren Zahlen f hervor.

Denn, ist q eine ungerade in D aufgehende Primzahl, so geht aus (1) ohne weiteres

$$\left(\frac{f'f''}{q}\right) = 1$$

hervor, d. h. für sämmtliche Zahlen f hat das Symbol $\left(\frac{f}{q}\right)$ gleichen Werth.

Ist $D \equiv 3 \pmod 4$ so folgt zudem aus (1) die Congruenz

$$f'f'' \equiv x^2 + y^2 \pmod 4$$

und, da eine der beiden Zahlen x, y gerade, die andere ungerade sein muss, folgt

$$f'f'' \equiv 1 \pmod 4$$

d. h. für alle Zahlen f der bezeichneten Art hat das Symbol $(-1)^{\frac{f-1}{2}}$ gleichen Werth.

Ist dagegen $D \equiv 2 \pmod 8$, so folgt aus (1) die Congruenz

$$f'f'' \equiv x^2 - 2y^2 \pmod 8,$$

was erfordert, dass x ungerade, also, jenachdem y gerade oder ungerade ist,

$$f' \equiv \pm f'' \pmod 8$$

und folglich

$$(-1)^{\frac{f'^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{f''^2-1}{8}}$$

ist. Also hat in diesem Falle für alle jene Zahlen f das Zeichen $(-1)^{\frac{f^2-1}{8}}$ gleichen Werth.

Ist ferner $D \equiv 6 \pmod 8$, so wird

$$f'f'' \equiv x^2 + 2y^2 \pmod 8 \cdot$$

also x wieder ungerade und $f'f'' \equiv 1$ oder $f'f'' \equiv 3 \pmod 8$, jenachdem y gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt leicht, dass in diesem Falle für alle Zahlen f das Symbol $(-1)^{\frac{f-1}{2}+\frac{f^2-1}{8}}$ gleichen Werth hat.

Im Falle $D \equiv 4 \pmod 8$ folgt aus der Congruenz

$$f'f'' \equiv x^2 - 4y^2 \pmod 8,$$

dass x ungerade und $f'f'' \equiv 1 \pmod 4$ sein muss; also hat in diesem Falle das Zeichen $(-1)^{\frac{f-1}{2}}$ für alle Zahlen f der bezeichneten Art gleichen Werth.

Ist endlich $D \equiv 0 \pmod 8$, so findet sich aus (1) die Congruenz

$$f'f'' \equiv 1 \pmod 8,$$

welche mit

$$f' \equiv f'' \pmod 8$$

gleichbedeutend ist. In diesem Falle haben also entweder alle Zahlen f die Form $8k+1$, oder alle die Form $8k+3$, oder alle die Form $8k+5$ oder endlich alle die Form $8k+7$. Einfacher kann man sagen: in diesem Falle haben die zwei Symbole $(-1)^{\frac{f-1}{2}}$ und $(-1)^{\frac{f^2-1}{8}}$ für alle jene Zahlen f je ein und denselben Werth.

Der Werth ± 1, welcher für die quadratische Form $f = (a, b, c)$ mit der Determinante D jedem der, in diesen Fällen in Betracht kommenden, Symbole

$$\left(\frac{f}{q}\right), \quad (-1)^{\frac{f-1}{2}}, \quad (-1)^{\frac{f^2-1}{8}} \text{ u. s. w.}$$

zukommt, soll ein Charakter der Form f genannt werden. Die Anzahl solcher verschiedener Einzelcharaktere ist nach dem Vorhergehenden, so oft $D \equiv 1 \pmod 4$, gleich der Anzahl der verschiedenen ungeraden Primfaktoren, welche in D aufgehen, in dem Falle $D \equiv 0 \pmod 8$ ist sie um 2, in allen übrigen Fällen um 1 grösser als diese Anzahl ϖ; wird unter σ, jenach diesen Fällen, 0, 2 oder 1 verstanden, so ist jene Anzahl jederzeit gleich $\varpi + \sigma$. Die Gesammtheit aller, einer Form zukommenden Einzelcharaktere heisst der Gesammtcharakter der Form. Da nun jeder der $\varpi + \sigma$ Einzelcharaktere entweder den Werth $+1$ oder den Werth -1 haben muss, so ist die Anzahl der hier denkbaren Fälle d. i. die Anzahl aller überhaupt angebbaren Gesammtcharaktere gleich $2^{\varpi+\sigma}$.

Alle Formen derselben Determinante nun, denen ein bestimmter dieser Gesammtcharaktere zukommt, werden Formen eines einzigen Geschlechtes genannt, und nach diesem Gesichtspunkte vertheilen sich sämmtliche Formen derselben Determinante in eine Anzahl von Geschlechtern, welche sicher nicht grösser, wohl aber kleiner als $2^{\omega+\sigma}$ sein kann, nämlich, falls — und wir werden bald sehen, dass dieser Fall in der That statt hat — nicht jedem der angebbaren Charaktere wirklich quadratische Formen der gegebenen Determinante entsprechen.

Da durch zwei äquivalente Formen stets die nämlichen Zahlen dargestellt werden können, so leuchtet sogleich ein, dass allen Formen derselben Classe auch derselbe Gesammtcharakter entspricht und dass sie mithin auch Formen desselben Geschlechtes sein werden. Die Eintheilung der Formen in Geschlechter überträgt sich sonach auch auf die Classen, indem man zwei Classen zu demselben oder zu verschiedenen Geschlechtern zu zählen hat, jenachdem ihren Formen derselbe oder ein verschiedener Gesammtcharakter entspricht.

Wählt man, wie es stets geschehen kann, die repräsentirenden Formen (a, b, c) jeder Classe so, dass ihr erster Coefficient prim ist zu $2D$, so kann dieser Gesammtcharakter aus dem Verhalten der Zahl a, weil diese ja durch die Form darstellbar ist, sofort ermittelt werden, und es ergiebt sich

$$\left(\frac{f}{q}\right) = \left(\frac{a}{q}\right), \cdots (-1)^{\frac{f-1}{2}} = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \text{ u. s. w.}$$

2. Um für jede gegebene Determinante die in Frage kommenden Einzelcharaktere leicht angeben zu können, hat Dirichlet eine Tabelle aufgestellt, welche wir hier zunächst reproduciren wollen. Wir führen dazu wieder die Bezeichnungen ein, welche wir schon in Nr. 1 des 3. Abschnittes und später benutzt haben, indem wir

$$D = \pm 2^{\varepsilon} \cdot P \cdot S^2$$

setzen und unter $p, p', p'', \ldots$ die verschiedenen in P, unter $r, r', \ldots$ die verschiedenen in S aber nicht in P aufgehenden ungeraden Primzahlen verstehen. Dann unterscheiden wir nach

Dirichlet folgende möglichen Fälle, denen die zugehörigen Einzelcharaktere jedesmal nebengestellt sind.

T.

I. $D = \pm P \cdot S^2$, $\pm P \equiv 1 \pmod 4$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$.

1) $S \equiv 1 \pmod 2$ $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid \left(\frac{f}{r}\right)$, $\left(\frac{f}{r'}\right), \ldots$

2) $S \equiv 2 \pmod 4$ $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid (-1)^{\frac{f-1}{2}}$, $\left(\frac{f}{r}\right), \ldots$

3) $S \equiv 0 \pmod 4$ $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid (-1)^{\frac{f-1}{2}}, (-1)^{\frac{f^2-1}{8}}, \left(\frac{f}{r}\right), \ldots$

II. $D = \pm P \cdot S^2$, $\pm P \equiv 3 \pmod 4$, $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$.

1) $S \equiv 1 \pmod 2$ $(-1)^{\frac{f-1}{2}}$, $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid \left(\frac{f}{r}\right)$, $\left(\frac{f}{r'}\right), \ldots$

2) $S \equiv 2 \pmod 4$ $(-1)^{\frac{f-1}{2}}$, $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid \left(\frac{f}{r}\right)$, $\left(\frac{f}{r'}\right), \ldots$

3) $S \equiv 0 \pmod 4$ $(-1)^{\frac{f-1}{2}}$, $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid (-1)^{\frac{f^2-1}{8}}, \left(\frac{f}{r}\right), \ldots$

III. $D = \pm 2P \cdot S^2$, $\pm P \equiv 1 \pmod 4$, $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$.

1) $S \equiv 1 \pmod 2$ $(-1)^{\frac{f^2-1}{8}}$, $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid \left(\frac{f}{r}\right)$, $\left(\frac{f}{r'}\right), \ldots$

2) $S \equiv 0 \pmod 2$ $(-1)^{\frac{f^2-1}{8}}$, $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid (-1)^{\frac{f-1}{2}}, \left(\frac{f}{r}\right), \ldots$

IV. $D = \pm 2P \cdot S^2$, $\pm P \equiv 3 \pmod 4$, $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$.

1) $S \equiv 1 \pmod 2$ $(-1)^{\frac{f-1}{2}+\frac{f^2-1}{8}}$, $\left(\frac{f}{p}\right)$, $\left(\frac{f}{p'}\right), \ldots \mid \left(\frac{f}{r}\right)$, $\left(\frac{f}{r'}\right), \ldots$

2) $S \equiv 0 \pmod 2$ $(-1)^{\frac{f-1}{2}}$, $(-1)^{\frac{f^2-1}{8}}$, $\left(\frac{f}{p}\right), \ldots \mid \left(\frac{f}{r}\right)$, $\left(\frac{f}{r'}\right), \ldots$

Der Grund, warum in dieser Tabelle jedesmal die Einzelcharaktere in zwei, durch den Vertikalstrich bezeichnete Gruppen eingetheilt worden sind, wird sogleich aus folgender Erwägung hervorgehen. Ist nämlich m eine positive zu $2D$ prime Zahl, welche durch Formen der Determinante D eigent-

lich darstellbar ist, so muss bekanntlich D quadratischer Rest von m und demnach $\left(\frac{D}{m}\right) = +1$ sein, was nach Formel (5) des 3. Abschnitts mit der anderen Gleichheit

$$\delta^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) = +1 \tag{2}$$

gleichbedeutend ist; ist also f eine derjenigen Formen, durch welche m so darstellbar ist, so wird das Produkt zur Linken genau gleich dem Produkte der Werthe aller Einzelcharaktere, welche in der obigen Tabelle jedesmal zur ersten der unterschiedenen Gruppen gezählt worden sind. Während demnach die Einzelcharaktere in jeder der zweiten Gruppen unbeschränkt jede Combination der Werthe ± 1 bieten dürfen, sind diejenigen der ersten Gruppen durch die Bedingung beschränkt, dass ihr Produkt gleich 1 sein muss. Somit wird die Anzahl der zulässigen Combinationen der Werthe der Einzelcharaktere offenbar auf die Hälfte der von vornherein angebbaren beschränkt, und es wird aus der für die Darstellbarkeit erforderlichen Bedingung (2) ersichtlich, dass die Anzahl der wirklich vorhandenen Geschlechter, in welche die Formen der Determinante D sich vertheilen, höchstens gleich $\frac{1}{2} \cdot 2^{\omega+\sigma}$ d. i. $2^{\omega+\sigma-1}$ ist*). Im Folgenden soll der Nachweis geführt werden, dass sie dieser Zahl in der That gleich ist.

Vorläufig bemerken wir, dass, wenn R das Produkt der Primfaktoren $r, r', \ldots$ bedeutet, nach Nr. 2 des 3. Abschnittes sämmtliche zu $2D$ prime Zahlen m in $\frac{1}{2}\varphi(8PR)$ arithmetische Progressionen von der Form $8PRz + a$, wo $\left(\frac{D}{a}\right) = +1$

*) Auf diesen Umstand hat Gauss in den Disquis. Arithm. seinen zweiten Beweis des Reciprocitätsgesetzes gegründet; bei dem Wege, den wir eingeschlagen haben, würde es ersichtlich nur ein circulus vitiosus sein, dasselbe daraus ableiten zu wollen, da unsere Herleitung des letzten Resultates die Betrachtungen in Nr. 1 des dritten Abschnittes und folglich das Reciprocitätsgesetz wesentlich zur Voraussetzung haben.

ist, und in ebensoviel arithmetische Progressionen von der Form $8PRz + b$, wo $\left(\frac{D}{b}\right) = -1$ ist, vertheilt werden können. Allen Zahlen m einer solchen Progression entsprechen nun dieselben Werthe der einzelnen bezüglich der Determinante D in Frage kommenden Charaktere, also ein bestimmter der angebbaren Gesammtcharaktere. Man überzeugt sich zudem leicht, dass immer gleich vielen der Progressionen derselbe Gesammtcharakter zugehört. Denn die Zahlen a, b entsprechen allen Combinationen der Reste $1, 3, 5, 7$ (mod. 8) mit allen Combinationen der Reste $1, 2, 3, \cdots p-1$ (mod. p), mit allen Combinationen der Reste $1, 2, 3, \cdots r-1$ (mod. r) u. s. w. Einer Bestimmung aber, nach welcher einer der Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \quad (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}$$

einen vorgeschriebenen Werth haben soll, genügen nur je zwei der vier Reste $1, 3, 5, 7$, der Bestimmung, dass jeder der beiden Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{und} \quad (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$$

vorgeschriebenen Werth haben soll, sogar nur einer von ihnen; ferner genügen der Bestimmung $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$ oder $= -1$ nur $\frac{p-1}{2}$ der Reste (mod. p) u. s. w. Wird also der Gesammtcharakter für eine zu $2D$ d. i. zu $8PR$ prime Zahl m vorgeschrieben, so giebt es je nach den verschiedenen Fällen, welche D darbieten kann, je

$$4 \cdot \prod\left(\tfrac{p-1}{2}\right) \cdot \prod\left(\tfrac{r-1}{2}\right) \text{ (für } \sigma = 0)$$

oder

$$2 \cdot \prod\left(\tfrac{p-1}{2}\right) \cdot \prod\left(\tfrac{r-1}{2}\right) \text{ (für } \sigma = 1)$$

oder

$$1 \cdot \prod\left(\tfrac{p-1}{2}\right) \cdot \prod\left(\tfrac{r-1}{2}\right) \text{ (für } \sigma = 2)$$

geeignete Restcombinationen (mod. $8PR$). Ebensovielen Progressionen wird demnach auch jedesmal derselbe Gesammtcharakter entsprechen.

Nun erfüllen aber nur die Zahlen m der Progressionen $8PRz + a$ die Bedingung $\left(\frac{D}{m}\right) = +1$, welche zur Darstellbarkeit der Zahl m durch Formen der Determinante D nothwendig ist; nur diesen Zahlen m entspricht demnach ein zulässiger d. i. mit der Bedingung (2) verträglicher Gesammtcharakter, ein solcher, für welchen es möglicherweise ein Geschlecht von Formen der Determinante D giebt. Diese $\frac{1}{2}\varphi(8PR)$ Progressionen vertheilen sich also gleichmässig auf die zulässigen Gesammtcharaktere. Wäre umgekehrt die Bedingung $\left(\frac{D}{m}\right) = +1$ auch ausreichend dafür, dass m durch eine Form der Determinante D dargestellt werden kann, so würde für jeden dieser zulässigen Gesammtcharaktere auch wirklich eine Form angebbar sein, welcher er zukommt, und demnach ihre Anzahl gleich der der Geschlechter oder jedes der möglichen Geschlechter auch wirklich vorhanden sein. Die bezeichnete Umkehrung ist aber im allgemeinen nicht zutreffend, denn die ausreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Zahl m durch Formen der Determinante D ist die Bedingung, dass D quadratischer Rest sei (mod. m), und letztere ist mit der obigen Bedingung $\left(\frac{D}{m}\right) = 1$ nur in dem Falle identisch, wenn m eine Primzahl ist. Wollen wir uns nun auf den Satz von der arithmetischen Progression stützen, so dürfen wir weiter schliessen, dass, weil in jeder der Progressionen $8PRz + a$ auch Primzahlen befindlich sind, jedem der zulässigen Gesammtcharaktere auch Primzahlen entsprechen, von welchen D quadratischer Rest ist, welche demnach durch Formen der Determinante D darstellbar sind, und damit würde dann der Nachweis geliefert sein, dass die als möglich bezeichneten $2^{\omega+\sigma-1}$ Geschlechter stets auch wirklich vorhanden sind.

3. Wir wollen uns jedoch zu diesem Nachweise nicht auf den Hilfssatz von der arithmetischen Progression stützen, ihn vielmehr aus derselben Grundlage herleiten, von der aus wir die Bestimmung der Classenanzahl gefunden. Wir schliessen uns dabei der Modification des Dirichlet'schen Ver-

fahrens, wie Kronecker sie angegeben hat*), an, da bei ihr unseres Erachtens eine deutlichere Einsicht in den eigentlichen Sachverhalt gewonnen wird.

Kehren wir zu der Grundformel (6″) des 5. Abschnittes:

$$(3)\quad \tau \cdot \sum{}' \left(\frac{D}{n}\right) F(nn') = \sum{}' F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots$$

wieder zurück, in welcher wir unter H das Produkt der verschiedenen Primfaktoren verstehen wollen, aus denen $2D$ besteht, sodass beiderseits die Summationen auf solche Argumente der Funktion F zu beziehen sind, welche prim sind zu $2D$. Wir wollen dann versuchen, die bis dahin noch unbestimmte Funktion $F(m)$ so zu wählen, dass diejenigen Summen auf der rechten Seite, für welche die darin auftretende quadratische Form einen gegebenen Gesammtcharakter hat, gleichen Werth, alle übrigen den Werth Null erhalten.

Sind der Tabelle T gemäss

$$(4)\qquad \varphi'(f),\quad \varphi''(f), \ldots \mid \psi'(f),\quad \psi''(f), \ldots$$

die sämmtlichen Einzelcharaktere, welche für Formen der Determinante D in Betracht kommen, und n irgend eine zu $2D$ prime Zahl, so wollen wir jedes Glied des entwickelten Produktes

$$(5)\quad P(n) = \big(1 + \varphi'(n)\big)\big(1 + \varphi''(n)\big) \ldots \big(1 + \psi'(n)\big) \ldots,$$

deren es $2^{\bar{\omega}+\sigma}$ giebt, mit $k(n)$ bezeichnen. Der Bedeutung der Zeichen $\varphi'(n), \ldots \psi'(n), \ldots$ gemäss wird offenbar

$$(6)\qquad k(n) = \theta^{\frac{n-1}{2}}\, \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{Q}\right)$$

sein, wo θ, η positive oder negative Einheiten, Q aber ein Theiler von PR ist. Unter diesen Grössen $k(n)$ giebt es zwei ausgezeichnete, nämlich

erstens, entsprechend den Werthen $\theta = 1$, $\eta = 1$, $Q = 1$

$$(6a)\qquad k_0(n) = 1,$$

und zweitens, entsprechend den Werthen $\theta = \delta$, $\eta = \varepsilon$, $Q = P$

$$(6b)\qquad k^0(n) = \delta^{\frac{n-1}{2}}\, \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{D}{n}\right).$$

*) S. Monatsber. d. Berl. Acad. v. J. 1864 p. 295.

Der Natur der Symbole $\varphi'(n), \ldots \psi'(n), \ldots$ gemäss hat man für jedes derselben die Beziehung

$$\varphi'(nn') = \varphi'(n) \cdot \varphi'(n') \text{ u. s. w.} \tag{7}$$

und folglich auch für jede der Funktionen $k(n)$ die Beziehung

$$k(nn') = k(n) \cdot k(n'), \tag{8}$$

wenn n, n' zwei beliebige zu $2D$ prime Zahlen bedeuten.

Dies vorausgeschickt, nehmen wir nun einen bestimmten der zulässigen Gesammtcharaktere als gegeben an, d. h. wir bestimmen, den Einzelcharakteren entsprechend, gewisse positive oder negative Einheiten

$$\delta', \quad \delta'', \ldots \mid \varepsilon', \quad \varepsilon'', \ldots \tag{9}$$

der Art, dass

$$\delta'\delta'' \cdots = 1 \tag{10}$$

ist. Alsdann setzen wir

$$\varpi(f) = \big(1 + \delta'\varphi'(f)\big) \ldots \big(1 + \varepsilon'\psi'(f)\big) \ldots \tag{11}$$

und wählen nun die Funktion $F(m)$ für jede zu $2D$ prime positive Zahl m gleich dem Ausdrucke

$$F(m) = \varrho \cdot \frac{\varpi(m)}{m^{1+\varrho}}, \tag{12}$$

sodass die Grundformel (3) die folgende besondere Gestalt annimmt:

$$\tau\varrho \sum{}' \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\varpi(nn')}{(nn')^{1+\varrho}} = \varrho \sum{}' \frac{\varpi(f)}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} + \cdots, \tag{13}$$

wo rechts im Zeichen $\varpi(f)$ unter f der Werth der quadratischen Form im Nenner zu verstehen ist. Da aber der erste Coefficient a gegen $2D$ prim vorausgesetzt werden darf, so stimmen die Werthe der Symbole

$$\varphi'(f), \quad \varphi''(f), \ldots \psi'(f), \ldots$$

in der ersten Summe durchaus mit den Werthen von

$$\varphi'(a), \quad \varphi''(a), \ldots \psi'(a), \ldots \tag{14}$$

resp. und demnach auch $\varpi(f)$ mit $\varpi(a)$ überein, sodass bei der ersten Summation der Faktor $\varpi(f) = \varpi(a)$ als gemeinsamer Faktor aller Glieder heraustritt und die erste Summe durch

$$\varpi(a) \cdot \varrho \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

ersetzt werden kann. Ist nun die Form (a, b, c) eine solche, welcher der von uns gewählte Gesammtcharakter (9) zukommt, so stimmen die Werthe (14) durchweg mit den Einheiten (9) resp. überein, jeder Faktor von $\bar{\omega}(a)$ wird demnach gleich 2 und

$$\bar{\omega}(a) = 2^{\bar{\omega}+\sigma}.$$

Ist dagegen die Form (a, b, c) eine solche, deren Gesammtcharakter von dem gegebenen verschieden ist, so muss mindestens einer der Werthe (14) der entsprechenden Einheit (9) entgegengesetzt sein, und demnach ist dann

$$\bar{\omega}(a) = 0.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (13) verbleiben auf solche Weise nur diejenigen Summen, welche auf Formen vom gegebenen Gesammtcharakter sich beziehen; wir nennen ihre Anzahl Γ, wo Γ Null zu setzen sein würde, falls es solche Formen überhaupt nicht gäbe. Geht man daher in der Gleichung (13) zur Grenze $\varrho = 0$ über und erinnert sich, dass nach (15″) des 6. Abschnittes der Grenzwerth jeder der Reihen

$$\varrho \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

ein und derselbe, nämlich

$$\frac{\tau\vartheta}{2} \cdot \frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta}$$

ist, so wird der Grenzwerth der ganzen rechten Seite gleich

$$\Gamma \cdot 2^{\bar{\omega}+\sigma} \cdot \frac{\tau\vartheta}{2} \cdot \frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta}. \tag{15}$$

4. Was nun die linke Seite betrifft, so zerfällt die Summe auf derselben in soviel Bestandtheile, als das entwickelte Produkt

$$\bar{\omega}(nn') = \left(1 + \delta'\varphi'(nn')\right) \ldots \left(1 + \varepsilon'\psi'(nn')\right) \ldots$$

verschiedene Glieder enthält. Unter diesen Gliedern befindet sich erstens das Glied $k_0(nn') = 1$; ihm entspricht der Bestandtheil

$$\tau \cdot \varrho \sum{}' \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{(nn')^{1+\varrho}}$$

der linken Seite, welcher nach den Formeln (6‴) des 5. und (15″) des 6. Abschnittes den Grenzwerth

$$\frac{\tau\vartheta}{2}\cdot\frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta}\cdot H(D)$$

hat; zweitens, mit Rücksicht auf (10), das Glied

$$k^0(nn') = \left(\frac{D}{nn'}\right);$$

ihm entspricht die Summe

$$\tau\cdot\varrho\sum{}'\left(\frac{D}{n}\right)\left(\frac{D}{nn'}\right)\frac{1}{(nn')^{1+\varrho}}$$

d. i.

$$\tau\cdot\varrho\sum{}'\left(\frac{D}{n'}\right)\frac{1}{(nn')^{1+\varrho}}$$

als Bestandtheil der linken Seite, welcher dem vorigen gleich ist, also auch den gleichen Grenzwerth hat;

drittens wird jedes andere Glied der Entwicklung von $\varpi(nn')$ einer der übrigen $2^{\varpi+\sigma}-2$ Grössen $k(nn')$, positiv oder negativ genommen, gleich d. h. gleich $\pm k(n)\,k(n')$ sein, wo

$$k(n) = \theta^{\frac{n-1}{2}}\eta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{Q}\right)$$

ist; ausgeschlossen sind die beiden Fälle

(16) $$\theta = 1, \quad \eta = 1, \quad Q = 1,$$

— dies gäbe nämlich das bereits behandelte erste Glied der Entwicklung — und

(17) $$\theta = \delta, \quad \eta = \varepsilon, \quad Q = P,$$

denn das gäbe das bereits behandelte zweite Glied der Entwicklung. Hiernach lässt sich der entsprechende Bestandtheil der linken Seite folgendermassen schreiben:

(18) $$\pm\tau\cdot\varrho\sum{}'\left(\frac{D}{n}\right)k(n)\,k(n')\cdot\frac{1}{(nn')^{1+\varrho}},$$

wo nun statt

$$\left(\frac{D}{n}\right)k(n) = \delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\cdot\theta^{\frac{n-1}{2}}\eta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{Q}\right)$$

einfacher auch

(19) $$k_1(n) = \theta_1^{\frac{n-1}{2}}\eta_1^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{Q_1}\right)$$

gesetzt werden kann, unter θ_1, η_1 wieder Einheiten, unter Q_1 der Quotient von PQ durch die grösste darin aufgehende Quadratzahl und demnach auch wieder ein Theiler von PR verstanden; ausgeschlossen sind auch hier die beiden Fälle

$$\theta_1 = 1, \quad \eta_1 = 1, \quad Q_1 = 1, \tag{20}$$

denn dieser ist identisch mit dem Falle (17), und

$$\theta_1 = \delta, \quad \eta_1 = \varepsilon, \quad Q_1 = P, \tag{21}$$

denn dieser kommt mit dem Falle (16) überein.

Betrachtet man demnach zunächst die, für jedes positive ϱ offenbar unbedingt convergente Reihe

$$\sum{}' k(n) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum{}' \theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{Q}\right) \cdot \frac{1}{n^{1+\varrho}}, \tag{22}$$

ausgedehnt über alle zu $2D$ d. i. zu $8PR$ primen positiven Zahlen n, so kann der Umfang dieser Summation, wenn $PR = QR_0$ gesetzt wird, auch dahin ausgesprochen werden, dass sie über alle zu $8QR_0$ primen positiven Zahlen n auszudehnen sei. Nach Nr. 1 des 3. Abschnittes findet sich, da der Fall (16) ausgeschlossen ist, die über alle genannten Zahlen n der Reihe $1, 2, 3, \ldots 8QR_0$ erstreckte Summe

$$\sum \theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{Q}\right) = 0$$

und in Folge davon und mit Rücksicht auf die Betrachtungen in Nr. 6 ebendaselbst ist der Grenzwerth, gegen welchen die Reihe (22) bei unendlich abnehmendem ϱ convergirt, ein endlicher, nämlich

$$\sum_1^\infty \theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{Q}\right) \frac{1}{n}.$$

Gleiches gilt von der für jedes positive ϱ unbedingt convergenten Reihe

$$\sum{}' k_1(n') \frac{1}{n'^{1+\varrho}} = \sum{}' \theta_1^{\frac{n'-1}{2}} \eta_1^{\frac{n'^2-1}{8}} \left(\frac{n'}{Q_1}\right) \frac{1}{n'^{1+\varrho}}, \tag{23}$$

welche statt über alle zu $2D$ d. i. zu $8PR$ primen Zahlen n' auch, wenn $PR = Q_1 R_1$ gesetzt wird, über alle zu $8Q_1R_1$ primen Zahlen erstreckt werden darf. Da der Fall (17) und mit ihm auch der Fall (20) ausgeschlossen ist, wird

$$\sum \theta_1^{\frac{n'-1}{2}} \eta_1^{\frac{n'^2-1}{8}} \left(\frac{n'}{Q_1}\right) = 0,$$

wenn über alle genannten Zahlen n' der Reihe 1, 2, 3, ... $8\,Q_1 R_1$ summirt wird, und daraus folgt dann wieder, dass auch die Summe (23) bei unendlich abnehmendem ϱ einen endlichen Grenzwerth, nämlich den Werth

$$\sum_1^\infty \theta_1^{\frac{n'-1}{2}} \eta_1^{\frac{n'^2-1}{8}} \left(\frac{n'}{Q_1}\right) \cdot \frac{1}{n'}$$

hat. Da aber der Ausdruck (18) nach Nr. 3 des 1. Abschnittes gleich dem Produkte

$$\tau\varrho \cdot \sum{}' k(n) \frac{1}{n^{1+\varrho}} \cdot \sum{}' k_1(n') \frac{1}{n'^{1+\varrho}}$$

ist, so convergirt dieser Ausdruck mit unendlich abnehmendem ϱ gegen die Grenze Null.

Aus alle diesem geht schliesslich hervor, dass der Grenzwerth für die linke Seite der Gleichung (13) der folgende ist:

$$\tau\vartheta \cdot \frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta} \cdot H(D).$$

Durch Vergleichung mit (15) gewinnen wir nun sogleich die Formel

$$H(D) = \Gamma \cdot 2^{\varpi+\sigma-1}. \tag{24}$$

Sie lehrt uns, dass Γ nicht Null sein kann, dass mithin zu jedem der zulässigen Gesammtcharaktere Formen vorhanden sind, welchen er eigen ist d. h. dass die oben als möglich bezeichneten Geschlechter sämmtlich auch wirklich vorhanden sind. Die Formel (24) zeigt ferner, dass die Anzahl der Classen, welche einen bestimmten Gesammtcharakter besitzen, d. i. die Anzahl Classen in jedem Geschlechte immer dieselbe, nämlich

$$\Gamma = \frac{H(D)}{2^{\varpi+\sigma-1}} \tag{25}$$

ist. Die Anzahl $G(D)$ der Geschlechter selbst ist

$$G(D) = 2^{\varpi+\sigma-1}. \tag{26}$$

5. So haben wir auf zwiefache Weise einen der schönsten Sätze von quadratischen Formen, welche Gauss in den Disquis.

Arithm. auf rein arithmetischem Wege mit Hilfe der Lehre von der Zusammensetzung der Formen und ihrer Classen gewonnen hat, mittels analytischer Methoden hergeleitet. Wir wollen nun dazu übergehen, seinen Zusammenhang mit anderen Sätzen dieser Compositionslehre aufzuweisen und den Hauptsatz derselben, welchen Gauss nur mittels Betrachtungen einer neuen Art, die nämlich der Lehre von den ternären quadratischen Formen angehören, zu beweisen vermocht hat, aus der gleichen Grundlage entwickeln, welche all' unsern Untersuchungen über quadratische Formen zur Stütze gedient hat. Dies zuerst gethan zu haben, ist das Verdienst von Kronecker*).

Wir müssen damit beginnen, einige elementare Punkte der Lehre von der Zusammensetzung der Formen hier in Erinnerung zu bringen.

Bedeutet C sowohl wie C' irgend eine Classe von eigentlich primitiven Formen der Determinante D, so können als ihre Repräsentanten stets auf unendlich viele Weisen Formen der folgenden Art**) gewählt werden:

$$(a,\ B,\ a'C), \qquad (a',\ B,\ aC),$$

wo a und a' wieder prim gegen $2D$ und auch unter einander vorausgesetzt werden dürfen; dann findet die Gleichung statt:

$$\text{(F)}\quad (ax^2 + 2Bxy + a'Cy^2)(a'x'^2 + 2Bx'y' + aCy'^2) = aa'X^2 + 2BXY + CY^2,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\text{(Fa)}\quad X = xx' - Cyy', \quad Y = (ax + By)y' + (a'x' + By')y.$$

Die Classe C'', zu welcher diese dritte zusammengesetzte Form gehört, ist ebenfalls eigentlich primitiv, und, unabhängig von der besonderen Wahl der beiden bezeichneten Repräsen-

*) S. Kronecker's Abh. im Monatsber. d. Berl. Acad. v. J. 1864 p. 297.

**) S. zu dem Folgenden „El. d. Z." von S. 240 bis 251; die dort der Einfachheit wegen eingeführte Annahme, dass a, a' relativ prim sind, ist zwar nicht erforderlich für die Theorie der Zusammensetzung; da wir aber auf dies Buch hier verweisen, wollen wir die Annahme auch festhalten.

tanten der Classen C und C', nur durch diese Classen selber bestimmt. Man nennt deshalb die Classe C'' aus den Classen C und C' zusammengesetzt oder das Produkt aus ihnen:

$$C'' = C \cdot C',$$

wobei die Reihenfolge der Faktoren gleichgiltig ist.

Durch Zusammensetzung einer Classe C mit der Hauptclasse H bleibt C ungeändert; zwei entgegengesesetzte Classen setzen sich zur Hauptclasse zusammen, und umgekehrt sind zwei Classen, welche sich zur Hauptclasse zusammensetzen, einander entgegengesetzt. Diese Sätze lassen erkennen, dass alle eigentlich primitiven Classen der Determinante D eine Gruppe bilden von der Art (eine Abel'sche Gruppe), auf welche der allgemeine Kronecker'sche Gruppensatz anwendbar ist. Versteht man nämlich unter dem Exponenten, zu welchem eine solche Classe C gehört, den niedrigsten Exponenten, für welchen C^n der Hauptclasse gleich ist, so giebt es gewisse Fundamentalclassen

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots \; C_\omega,$$

welche zu den Exponenten $m_1, \; m_2, \; \ldots \; m_\omega$ gehören, von der Beschaffenheit, dass alle eigentlich primitiven Classen derselben Determinante und jede einmal durch das Produkt

$$C_1^{h_1} C_2^{h_2} \ldots C_\omega^{h_\omega} \tag{27}$$

dargestellt werden, wenn darin allgemein

$$h_i \text{ die Reihe } 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; m_i - 1$$

durchläuft, wobei allgemein C_i^0 der Hauptclasse gleich zu achten ist. Von den Exponenten $m_1, \; m_2, \; \ldots \; m_\omega$ ist jeder ein Theiler des vorhergehenden. Man findet hiernach die Gleichung

$$H(D) = m_1 m_2 m_3 \ldots m_\omega.$$

Der Exponent n, zu welchem irgend eine der Classen gehört, ist stets ein Theiler von m_1.

Die Classe, welche durch Zusammensetzung einer Classe C mit sich selbst entsteht,

$$C \cdot C = C^2,$$

nennt Gauss die durch Duplikation von C entstehende Classe. Ist A eine ambige Classe d. h. sich selbst entgegengesetzt, so entsteht durch ihre Duplikation die Hauptclasse:

$$A \cdot A = H;$$

umgekehrt wird jede Classe, welche dieser Gleichung genügt, eine ambige Classe sein; denn, nennt man A' die zu A entgegengesesetzte Classe, so entsteht aus jener Gleichung durch Multiplikation mit A' die folgende

$$AH = HA' \quad \text{oder} \quad A = A'$$

d. h. A ist sich selbst entgegengesetzt. Hiernach können die ambigen Classen auch als solche definirt werden, durch deren Duplikation die Hauptclasse entsteht.

Aus der Formel (27) erschliesst man leicht, dass die Anzahl der ambigen Classen gleich 2^{μ} ist, wenn μ von den Exponenten $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ der Fundmentalclassen gerade sind. —

Da a eine gegen $2D$ prime Zahl ist, welche durch die Formen der Classe C, a' eine solche, welche durch die Formen der Classe C' (eigentlich) darstellbar ist, so bestimmen die Werthe der Charaktere

$$\varphi'(a), \quad \varphi''(a), \ldots \mid \psi'(a), \quad \psi''(a), \ldots,$$

welche für die Determinante D in Betracht kommen, das Geschlecht, zu dem die Classe C gehört, und in gleicher Weise die Werthe der Grössen

$$\varphi'(a'), \quad \varphi''(a'), \ldots \mid \psi'(a'), \quad \psi''(a'), \ldots$$

das Geschlecht von C'; da allgemein

$$\varphi'(aa') = \varphi'(a) \cdot \varphi'(a') \text{ u. s. w.} \tag{28}$$

ist, ergeben sich hieraus ohne weiteres die Werthe der Grössen

$$\varphi'(aa'), \quad \varphi''(aa'), \ldots \mid \psi'(aa'), \quad \psi''(aa'), \ldots$$

und somit das Geschlecht der zusammengesetzten Classe C'', durch deren Formen aa' darstellbar ist, aus den Geschlechtern der Classen C und C', aus denen sie entsteht.

Besonders ersieht man hieraus, dass jede Classe, welche durch Duplikation einer andern entsteht, zum Hauptgeschlechte, d. i. zu demjenigen Geschlechte gehört, dessen sämmtliche Einzelcharaktere den Werth $+1$ haben und welchem deshalb die Hauptform $x^2 - Dy^2$ und die Hauptclasse H angehört; denn nach (28) wird $\varphi'(aa') = 1$, wenn $\varphi'(a)$ und $\varphi'(a')$ dieselbe Einheit bezeichnen.

Ferner findet man auf Grund derselben Formel (28), dass, wenn eine der Classen C, C' zum Hauptgeschlechte gehört, das Produkt CC' zu demselben Geschlechte gehört, wie die andere von ihnen, also zum Hauptgeschlecht, wenn auch diese dazu gehört. Und hieraus geht sofort der Satz hervor: Die Classen des Hauptgeschlechtes bilden eine Gruppe von derselben Beschaffenheit wie die Gruppe aller Classen, und demzufolge kann man durch Anwendung des allgemeinen Gruppensatzes auch das analoge Resultat herbeiführen: Alle Classen des Hauptgeschlechtes lassen sich aus gewissen Fundamentalclassen K_1, $K_2, \ldots K_v$, welche zu den Exponenten n_1, $n_2, \ldots n_v$ gehören, mittels der Formel

$$K_1^{h_1} \cdot K_2^{h_2} \ldots K_v^{h_v} \tag{29}$$

und zwar jede einmal erhalten, wenn darin allgemein

$$h_i \text{ die Reihe } 0, 1, 2, \ldots n_i - 1$$

durchläuft. Von den Exponenten n_1, $n_2, \ldots n_v$ ist jeder ein Theiler des vorhergehenden. Die Anzahl der Classen des Hauptgeschlechtes ist demnach

$$K(D) = n_1 n_2 \ldots n_v \cdot \tag{30}$$

Der Exponent n, zu welchem eine Classe des Hauptgeschlechtes gehört, ist stets ein Theiler von n_1. Die Anzahl der ambigen Classen des Hauptgeschlechts ist 2^ν, wenn ν von den Exponenten n_1, $n_2, \ldots n_v$ gerade sind.

6. Bevor wir jetzt unserm eigentlichen Vorhaben näher treten, wollen wir eine Reihe von Bemerkungen einschalten, welche, obwohl nicht dafür erforderlich, sich naturgemäss hier anschliessen und von grossem Interesse sind.

Zunächst lässt sich der Satz, den wir in Nr. 4 auf analytischem Wege gefunden, dass die Anzahl der Formenclassen der Determinante D in jedem Geschlechte dieselbe sei, aus der Theorie der Zusammensetzung leicht bestätigen. Wir schicken dazu folgenden Satz voraus:

Der Exponent n, zu welchem eine Classe C gehört, ist stets gerade, wenn C nicht eine Classe des Hauptgeschlechts ist. Denn, da jede durch Duplikation entstehende Classe zum Hauptgeschlechte gehört, werden die geraden Potenzen von C zum Hauptgeschlechte, die ungeraden Potenzen zu demselben Geschlecht gehören wie C; da dies letztere vom Hauptgeschlechte verschieden gedacht wird, C^n aber der Hauptclasse d. i. einer Classe des Hauptgeschlechts gleich ist, muss n gerade sein; C^{n-1} d. i. die zu C entgegengesetzte Classe gehört also zu demselben Geschlechte wie C selbst.

Sind nun

$$H,\ K,\ K',\ K'',\ \ldots$$

die Classen des Hauptgeschlechtes und C eine davon verschiedene, also irgend einem andern Geschlechte G angehörige Classe, so werden nach Nr. 5 die unter einander verschiedenen Classen

$$CH,\ CK,\ CK',\ CK'',\ \ldots$$

sämmtlich dem Geschlechte G angehörig, ausser ihnen aber keine Classe dieses Geschlechts mehr vorhanden sein; denn, wäre C' noch eine solche, so müsste $C'C^{n-1}$ eine Classe K des Hauptgeschlechts und folglich $C' = CK$ sein, gegen die Voraussetzung. Jedes vom Hauptgeschlecht verschiedene Geschlecht enthält somit dieselbe Anzahl von Classen, wie dieses.

Für die bedeutende Mehrzahl der Determinanten zeigt es sich, dass alle Classen des Hauptgeschlechtes nur aus einer einzigen Fundamentalclasse K_1 durch wiederholte Zusammensetzung mit sich selbst erzeugt werden können; für sie alle ist demnach

$$K(D) = n_1.$$

Diese Determinanten bezeichnen wir nach Gauss als reguläre oder regelmässige Determinanten, zum Unterschiede

von den irregulären oder unregelmässigen, bei denen mehr als eine Fundamentalclasse vorhanden ist. Für diese letztern heisst der Quotient

$$\frac{K(D)}{n_1} = n_2\, n_3 \ldots n_v, \tag{31}$$

welcher für regelmässige Determinanten gleich 1 ist, der Exponent der Unregelmässigkeit (exponens irregularitatis). Wenn dieser Exponent durch eine Primzahl p theilbar ist, so muss einer der Faktoren rechts, und da jeder im vorhergehenden also insbesondere in n_1 enthalten ist, auch n_1 durch p theilbar sein; demnach ist alsdann $K(D)$ durch p^2 theilbar. Hieraus folgt, dass die Determinante zu den regelmässigen gehört, sobald $K(D)$ keinen quadratischen Theiler hat.

Ist n_1 und folglich alle übrigen Faktoren $n_2, n_3, \ldots n_v$ ungerade, so ist die Anzahl der Ambigen im Hauptgeschlechte gleich 1; ist n_1, aber auch nur n_1 gerade, so beträgt diese Anzahl 2; in beiden Fällen ist D entweder eine regelmässige Determinante oder der Exponent ihrer Unregelmässigkeit ist ungerade. Sind mehr als zwei Ambigen im Hauptgeschlechte vorhanden, so ist von den Faktoren $n_2, n_3, \ldots n_v$ mindestens der erste noch gerade, also ist D eine unregelmässige Determinante und ihr exponens irregularitatis ist gerade.

Irgend ein Geschlecht enthält nicht mehr Ambige, als das Hauptgeschlecht. Denn die Classen jenes entstehen aus den Classen des letztern durch Zusammensetzung mit irgend einer in jenem Geschlecht enthaltenen Classe. Wählt man aber für letztere eine darin enthaltene Ambige A und ist K eine Classe des Hauptgeschlechtes, so kann KA nur eine Ambige sein, wenn K es ist; denn, da das Produkt zweier Ambigen wieder eine solche ist, so ist auch die zu A inverse Classe A' eine solche, und es müsste auch $KA \cdot A' = K$ eine sein. Enthält demnach ein Geschlecht überhaupt eine Ambige, so enthält es genau so viel, wie das Hauptgeschlecht. — Nun ist die Anzahl der Ambigen gleich der der Geschlechter — wie wir später zeigen werden; nehmen wir dies Resultat hier vorweg, so können wir schliessen: Enthält das Hauptgeschlecht nur eine Ambige, so enthält jedes Geschlecht eine solche; ent-

hält dagegen das Hauptgeschlecht genau zwei Ambigen — der einzige Fall, welcher ausser dem eben genannten bei regulären Determinanten vorkommen kann — so enthält nur die Hälfte der Geschlechter Ambigen und jedes von diesen je zwei. —

Es ist bemerkenswerth, dass die irregulären positiven Determinanten nach Gauss' Feststellungen viel seltener sind, als die negativen, welche letztern in der wachsenden Reihe der Determinanten immer häufiger zu werden scheinen. —

Da wir gefunden haben, das jedes Geschlecht dieselbe Anzahl Γ von Classen enthält, so ergiebt sich $\Gamma = K(D)$; wird also, wie in (26), die Anzahl der Geschlechter, nämlich $2^{\varpi+\sigma-1}$, mit $G(D)$ bezeichnet, so findet sich

$$H(D) = G(D) \cdot K(D). \tag{32}$$

Hiernach kann man die verschiedenen Determinanten classificiren. Wenn man nämlich die Classenanzahl für verschiedene Determinanten aufstellt, so wird es nicht genügen, um diese völlig zu charakterisiren, wenn man diejenigen Determinanten in dieselbe Kategorie wirft, denen dieselbe Anzahl von Classen zukommt, sondern diese zerfallen wieder noch in verschiedene Gruppen, je nach den Faktoren G und K, aus denen das Produkt H besteht. Wir werden vielmehr alle diejenigen Determinanten D als demselben *Typus* angehörig bezeichnen müssen, bei denen sowohl G als K einen bestimmten Werth haben, und wollen diesen Typus den Typus (G, K) nennen.

Nach Gauss' Feststellungen scheint die Reihe der negativen Determinanten, welche demselben Typus angehören, stets endlich zu sein; z. B. scheint es im Ganzen nur 65 negative Determinanten zu geben, deren grösste $D = -1848$ sein würde, welche einem der Typen $(G, 1)$ angehören d. h. für welche jedes Geschlecht nur eine Classe enthält, sodass die Anzahl der Classen gleich derjenigen der Geschlechter ist. Für positive Determinanten dagegen ist nicht nur die Classifikation $(G, 1)$ die häufigst auftretende, sondern es lässt sich auch, auf einem Wege, den Dirichlet angezeigt hat, der Nachweis führen, dass die Menge der Determi-

nanten, welche diesen Typen entsprechen, unendlich ist.

In der That, in Nr. 7 des 6. Abschnittes haben wir die für positive Determinanten giltige Formel (36[3]) aufgestellt und bewiesen, dass die Classenanzahl für unendlich viele Determinanten von der Form $D \cdot S^2$ ein und denselben Werth hat. Durch schickliche Wahl von D und den Primfaktoren, aus welchen S sich zusammensetzt, lässt es sich aber erreichen, dass diese unveränderliche Classenanzahl mit der Anzahl der für jene Determinanten vorhandenen Geschlechter übereinstimmt.

Um dies an einem einfachen Falle zu bestätigen, wählen wir $D = 2$ und $S = 3^\alpha$, also

$$D' = 2 \cdot 3^{2\alpha}.$$

Die Pell'sche Gleichung $t^2 - 2u^2 = 1$ hat zur Fundamentalauflösung $T = 3$, $U = 2$; da

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$$

ist, wo der Coefficient von $\sqrt{2}$ durch den in S enthaltenen Primfaktor 3 aufgeht und zwar nur durch die erste Potenz von 3, so haben die in der angezogenen Nr. mit δ, ν, N bezeichneten Zahlen, sobald $\alpha > 1$, die folgenden Werthe:

$$\nu = 2, \quad \delta = 1, \quad N = 2 \cdot 3^{\alpha-1}.$$

Da ferner $H(2) = 1$ ist, und das in der genannten Formel auftretende Produkt hier gleich

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

wird, so findet sich

$$H(2 \cdot 3^{2\alpha}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

Nun ist aber $D' = 2 \cdot 3^{2\alpha} \equiv 2 \pmod 8$, für die Formen dieser Determinante sind also die zwei Charaktere

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{n}{3}\right)$$

und demnach zwei Geschlechter vorhanden, die Anzahl der Geschlechter also in der That der Classenanzahl gleich.

Somit erweist sich die Vermuthung, welche Gauss bereits ausgesprochen, als richtig: es giebt unendlich viel positive Determinanten, für welche jedes Geschlecht nur eine einzige Classe enthält. Dieser Satz ist um so bemerkenswerther, als es dem vorher Bemerkten gemäss scheint, dass er einen neuen wesentlichen Unterschied zwischen Formen von positiver und solchen von negativer Determinante feststellt.

7. Nun seien

(33) $$C,\ C'\ C'',\ \ldots$$

die sämmtlichen Formenclassen der Determinante D; ihre Quadrate

$$C^2,\ C'^2,\ C''^2,\ \ldots$$

müssen dann alle diejenigen Classen liefern, welche durch Duplikation entstehen. Bezeichnen wir aber mit

(34) $$A,\ A',\ A'',\ \ldots$$

die sämmtlichen Ambigen unter den Classen (33) und mit $\mathfrak{A}(D)$ ihre Anzahl, so leuchtet ein, dass

(35) $$CA,\ CA',\ CA'',\ \ldots$$

nicht nur verschiedene Classen des Formensystems (33) sind, sondern dass auch ihre Quadrate der oben gegebenen Definition ambiger Classen gemäss sämmtlich gleich C^2 sind; eine weitere Classe C', deren Quadrat gleich C^2 wäre, giebt es aber nicht mehr, denn setzt man die Formen (33) mit irgend einer von ihnen, etwa mit C zusammen, so erhält man wieder ihre ganze Reihe, darunter also auch C', sodass man stets setzen darf $C' = C \cdot C''$; soll nun aber $C'^2 = C^2$ sein, so ergiebt sich $C''^2 = 1$ d. h. C'' wäre eine der Ambigen (34) und C' eine der Formen (35).

Hieraus geht hervor, dass immer je $\mathfrak{A}(D)$ Classen durch Duplikation dieselbe Classe erzeugen; heisst also $Q(D)$ die Anzahl derjenigen Classen, welche durch Duplikation entstehen, so ist

(36) $$H(D) = Q(D) \cdot \mathfrak{A}(D).$$

Die Vergleichung dieser Formel mit (32) lehrt sogleich, dass, wenn sich zeigen lässt, dass

$$Q(D) = K(D) \tag{37}$$

ist, daraus auch die Gleichheit

$$G(D) = \mathfrak{A}(D)$$

hervorgeht. In den Disquisitiones Arithmeticae lehrt Gauss die Anzahl der Ambigen durch direkte Betrachtungen finden, beweist dann die Gleichheit (37) und findet so die Anzahl der Geschlechter. Umgekehrt haben wir diese letztere nach den Dirichlet'schen Methoden bestimmt; wir werden jetzt nach Kronecker's Vorgange zeigen, wie aus denselben Methoden auch die Gleichheit (37) entspringt, und finden damit als eine Folge die Anzahl der Ambigen. Jedoch müssen wir zu diesem Zwecke für die Classen, welche durch Duplikation entstehen, erst eine geeignetere Definition aufstellen, und schalten deshalb hier eine Betrachtung ein, auf welche wir auch an einer späteren Stelle werden zurückzuweisen haben.

8. Wir behaupten folgenden Satz: Ist C eine beliebige Classe von Formen der Determinante D und m eine zu $2D$ prime Zahl, welche durch ihre Formen zur Wurzel (n, m) gehörig eigentlich darstellbar ist, so ist durch die Formen der Classe C^k, welche durch k-fache Zusammensetzung von C mit sich selbst entsteht, m^k zu einer Wurzel (N, m^k) gehörig eigentlich darstellbar, für welche $N \equiv n \pmod{m}$ ist.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir ihn als bewiesen an für alle Zahlen $k = 1, 2, 3, \ldots h$ und beweisen daraus seine Giltigkeit auch für $k = h + 1$.

Sei also C^h diejenige Classe, welche durch h-fache Zusammensetzung von C mit sich selbst entsteht; als Repräsentanten von C und C^h wählen wir, wie in Nr. 5 die Formen

$$(a, B, a'C), \qquad (a', B, aC),$$

in denen a, a' prim zu m angenommen werden dürfen. Sei m durch die erstere dieser Formen zur Wurzel (n, m) gehörig eigentlich darstellbar; der Voraussetzung zufolge gestattet dann m^h durch die zweite eine zur Wurzel (N, m^h) gehörige eigentliche Darstellung, während $N \equiv n \pmod{m}$ ist. Es bestehen also für relativ prime Werthe α, γ; α', γ' folgende zwei Gleichungen:

$$(38)\qquad \begin{cases} m = a\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + a'C\gamma^2 \\ m^h = a'\alpha'^2 + 2B\alpha'\gamma' + aC\gamma'^2 \end{cases}$$

und die Congruenzen

$$(39\text{a})\qquad a\alpha + B\gamma + n\gamma \equiv 0 \pmod{m}$$

$$(39\text{b})\qquad a'\alpha' + B\gamma' + N\gamma' \equiv 0 \pmod{m^h},$$

aus deren zweiter auch

$$(39\text{c})\qquad a'\alpha' + B\gamma' + n\gamma' \equiv 0 \pmod{m}$$

folgt. Durch Zusammensetzung beider Formen entsteht die Form

$$(aa',\ B,\ C)$$

der Classe C^{h+1} und aus den Gleichungen (38) die folgende:

$$(40)\qquad m^{h+1} = aa' \cdot \mathsf{A}^2 + 2B \cdot \mathsf{A}\Gamma + C \cdot \Gamma^2,$$

wo

$$\mathsf{A} = \alpha\alpha' - C\gamma\gamma', \quad \Gamma = a\alpha\gamma' + 2B\gamma\gamma' + a'\alpha\gamma$$

gesetzt ist; m^{h+1} gestattet also eine Darstellung durch die Formen der Classe C^{h+1}. Diese Darstellung ist aber auch eine eigentliche d. h. A, Γ sind relativ prim; denn, hätten sie einen gemeinsamen Primtheiler p, so müsste dieser wegen (40) auch in m aufgehen, aus den Congruenzen (39a) und (39c) würde dann aber mit Rücksicht darauf, dass p als ein Theiler von Γ vorausgesetzt ist,

$$2n\gamma\gamma' \equiv 0 \pmod{p}$$

also eine der Zahlen γ, γ', etwa γ durch p theilbar sein, was aber der entsprechenden der Congruenzen (39a) und (39c) zuwider ist, da α, γ relativ prim sind und a keinen Theiler mit m gemeinsam hat.

Nun lässt sich aber bekanntlich eine Wurzel N der Congruenz

$$\mathsf{N}^2 \equiv D \pmod{m^{h+1}}$$

so wählen, dass

$$\mathsf{N} \equiv N \pmod{m^h} \quad \text{also auch} \quad \mathsf{N} \equiv n \pmod{m}$$

ist. Schreibt man demnach die Congruenzen (39a) und (39b) folgendermassen:

$$a\alpha + B\gamma + \mathsf{N}\gamma \equiv 0 \pmod{m}$$
$$a'\alpha' + B\gamma' + \mathsf{N}\gamma' \equiv 0 \pmod{m^h},$$

so ergiebt sich aus ihnen

$$(a\alpha + B\gamma + \mathsf{N}\gamma)(a'\alpha' + B\gamma' + \mathsf{N}\gamma') \equiv 0 \pmod{m^{h+1}}$$

d. h. $$aa' \cdot \mathsf{A} + B \cdot \Gamma + \mathsf{N} \cdot \Gamma \equiv 0 \pmod{m^{h+1}}.$$

Da A, Γ relativ prim und aa' prim ist zu m, kann Γ keinen Theiler mit dem Modulus gemeinsam haben und somit erweist diese Congruenz endlich, dass die Darstellung von m^{h+1} durch die Formen der Classe C^{h+1} zur Wurzel (N, m^{h+1}) gehört, für welche $\mathsf{N} \equiv n \pmod{m}$ ist.

Da unser Satz für $h = 1$ selbstverständlich ist, so ist er hiermit als allgemein giltig erwiesen. —

Um hiervon zu unserm augenblicklichen Vorhaben zurückzukehren, ziehen wir aus dem allgemeinen Satze die besondere Folgerung:

Durch jede Classe, welche durch Duplikation entsteht, kann eine zu $2D$ prime Quadratzahl (eigentlich) dargestellt werden.

Sei nun umgekehrt Q eine Classe, durch deren Formen eine zu $2D$ prime Quadratzahl m^2 eigentlich darstellbar ist, und n die Wurzel (mod. m^2), zu welcher eine solche Darstellung gehört. Da alsdann auch $n^2 \equiv D \pmod{m}$ ist, so giebt es eine Classe C von Formen der Determinante D, durch welche m eigentlich zur Wurzel (n, m) gehörig darstellbar ist. Werden nun, was immer möglich ist, zwei Repräsentanten dieser Classe $(a, B, a'C)$, (a', B, aC) so gewählt, dass m relativ prim ist zu aa', so zeigt die voraufgehende Betrachtung, dass m^2 zur Wurzel (n, m^2) gehörig eigentlich darstellbar ist durch eine Form derjenigen Classe, welche durch Duplikation von C entsteht, eine Classe, welche mit Q übereinstimmen muss. Also: jede Classe, durch deren Formen eine zu $2D$ prime Quadratzahl (eigentlich) darstellbar ist, entsteht durch Duplikation.

Hiernach dürfen die durch Duplikation entstehenden Classen schliesslich auch als diejenigen Classen definirt werden, durch welche Quadratzahlen, die prim sind zu $2D$, (eigentlich) darstellbar sind.

9. Wir wollen nun die Anzahl dieser Classen zu bestimmen suchen und gehen dazu von der Bemerkung aus, dass eine jede von ihnen durch eine Form repräsentirt werden kann, deren erster Coefficient eine zu $2D$ prime Quadratzahl ist, welche also die Gestalt (A^2, B, C) hat; der mittlere Coefficient B darf, wie leicht ersichtlich, als ungerade vorausgesetzt werden. Denken wir uns also das ganze Formensystem (a, b, c), (a', b', c'), ... der Determinante D, so dürfen wir annehmen, dass diejenigen dieser Formen, welche die durch Duplikation entstehenden Classen repräsentiren, die angegebene Gestalt, nämlich

$$(A^2, B, C), \quad (A'^2, B', C'), \ldots$$

haben. Dies vorausgeschickt, gehen wir zu unserer Fundamentalgleichung (6_0) bezw. (6_1) des 5. Abschnittes zurück. Wie wir aus (6) daselbst die besondere Gleichung (6′) hergeleitet haben, genau ebenso findet sich aus jener die Gleichung

$$(41) \quad \tau \cdot \sum{}' \psi(m) F(m) = \sum{}' F(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2) + \cdots,$$

worin die Summation bezüglich m zwar den gleichen Umfang hat wie in (6′), die Summationen in Bezug auf die Unbestimmten der quadratischen Formen aber, was durch den Accent angedeutet werden soll, auf die relativ primen Werthe derselben zu beschränken sind. Sehen wir von dem Falle $D = -1$ ab, der hier kein Interesse darbietet, so bedeutet das Zeichen τ für jede negative Determinante den Werth 2; damit dasselbe auch für positive Determinanten der Fall sei, verstehen wir in den dann die Summationen bestimmenden Ungleichheiten unter t, u diejenige Auflösung der Pell'schen Gleichung, für welche

$$(42) \qquad t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^2$$

ist. Die obige Gleichung lautet dann bestimmter

$$(41\,a) \quad 2 \cdot \sum{}' \psi(m) \cdot F(m) = \sum{}' F(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2) + \cdots.$$

Diese Gleichung, wie die Gleichung (41), aus der sie herkommt und wie die ihr analoge Gleichung (6′) des 5. Abschn. sind auf eine beliebig gegebene Zahl II bezüglich, gegen welche

die Argumente der Funktion F prim sein müssen; wir wählen für diese Zahl jetzt den Ausdruck

$$H = 2 \cdot pp' \cdots rr'r'' \cdots,$$

wo $p, p', \ldots$ alle verschiedenen ungeraden Primzahlen, aus denen D besteht, und $r, r', r'', \ldots$ die davon verschiedenen, in den ungeraden Zahlen $A, A', \ldots$ enthaltenen Primzahlen bezeichnen sollen.

Nun wählen wir die noch beliebige Funktion F so, dass sie verschwindet, wenn m keine Quadratzahl ist; links bleiben dann nur die Glieder von der Form $\psi(n^2) \cdot F(n^2)$, wo n jede zu H prime Zahl bedeutet also auch prim ist gegen $2D$; da mithin $\psi(n)$ die Anzahl aller Wurzeln der Congruenz $z^2 \equiv D \pmod{n}$ bedeutet, welche Null ist, sobald n einen Primfaktor enthält, für welchen D quadratischer Nichtrest ist, im entgegengesetzten Falle aber nur von der Anzahl der verschiedenen in n aufgehenden Primfaktoren bestimmt ist, so leuchtet sogleich ein, dass $\psi(n^2) = \psi(n)$ sein wird. Rechts aber kann $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2$ niemals eine Quadratzahl sein, ausser wenn (a, b, c) eine der Formen (A^2, B, C), $(A'^2, B', C') \ldots$ bedeutet, mithin fallen rechts alle Summen fort mit Ausnahme derjenigen, welche sich auf die Repräsentanten der durch Duplikation entstehenden Classen beziehen. Wird demnach die Funktion F weiter noch so bestimmt, dass

$$F(n^2) = \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

ist, so nimmt die Formel (41a) folgende Gestalt an:

$$(43)\quad 2 \cdot \sum{}' \psi(n) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum{}' \frac{1}{(A^2x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2)^{\frac{1+\varrho}{2}}} + \cdots,$$

in welcher rechts soviel Summen stehen, als die Anzahl $Q(D)$ der durch Duplikation entstehenden Classen beträgt, und der bisherige Umfang der Summationen bezüglich der Unbestimmten x', y' noch dahin zu beschränken ist, dass nur diejenigen ihrer bisherigen Werthe zu berücksichtigen sind, für welche die unter dem Summenzeichen stehende quadratische Form quadratische Werthe erhält.

Gehen wir noch einmal zu der Gleichung (41) zurück,

ersetzen in dieser das Zeichen m durch n und wählen nun zweitens die Funktion

$$F(n) = \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

so nimmt sie die Gestalt an

$$(44)\quad \tau \cdot \sum{}' \psi(n) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum{}' \frac{1}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{1+\varrho}} + \cdots,$$

in welcher links dieselbe Summe steht, wie in (43), rechts dagegen so viel Summen stehen, als das Formensystem der Determinante D Formen enthält, und der Umfang der Summationen derselbe ist, wie in (41). Verstehen wir unter den Werthen t, u in den für positive Determinanten zu erfüllenden Ungleichheiten hier die Fundamentalauflösung T, U, so wird dem Zeichen τ der Werth 1 oder 2 zukommen, je nachdem die Determinante $D > 0$ oder < 0 ist.

Die Vergleichung der Formeln (43) und (44) liefert sogleich die Beziehung

$$(45)\quad 2 \cdot \varrho \sum{}' \frac{1}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{1+\varrho}} + \cdots = \tau \cdot \varrho \sum{}' \frac{1}{(A^2x'^2 + \cdots)^{\frac{1+\varrho}{2}}} + \cdots,$$

in welcher wir nun ϱ wollen gegen 0 convergiren lassen.

Was zunächst die linke Seite betrifft, so haben wir in (15′) des 6. Abschn. den Grenzwerth der Summe

$$\varrho \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

bestimmt, in welcher x, y denselben Bedingungen, wie die x', y' unterworfen sind, nur dass sie nicht relativ prim zu sein brauchen. Da aber die für den Fall einer positiven Determinante von x', y' zu erfüllenden Ungleichheiten bestehen bleiben, wenn sie mit einer positiven Zahl μ multiplicirt werden, so ist ersichtlich, dass man aus den Zahlen x', y' die sämmtlichen zulässigen Zahlen x, y erhalten wird, wenn man jene mit allen zu II primen positiven Zahlen μ multiplicirt, und dass in Folge davon

$$\varrho \cdot \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$
$$= \varrho \cdot \sum \frac{1}{\mu^{2+2\varrho}} \cdot \sum{}' \frac{1}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{1+\varrho}}$$

sein wird. Nun ist aber nach der Euler'schen Formel des 1. Abschnittes

$$\sum \frac{1}{m^{2+2\varrho}} = \prod \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2+2\varrho}}} \right),$$

wenn links über alle positive ganze Zahlen m, rechts über alle Primzahlen q summirt resp. multiplicirt wird, und gleicherweise wird

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\varrho}} = \prod' \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2+2\varrho}}} \right)$$

sein, wenn die Multiplikation sich nur auf alle nicht in Π enthaltenen Primzahlen erstreckt. Hieraus folgt sogleich

$$\sum \frac{1}{m^{2+2\varrho}} = \sum \frac{1}{\mu^{2+2\varrho}} \cdot \prod'' \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2+2\varrho}}} \right),$$

wenn hier die Multiplikation im Gegentheil auf alle in Π enthaltenen Primfaktoren sich erstreckt. Convergirt jetzt ϱ gegen 0, so geht die linke Seite in $\sum \frac{1}{m^2}$ d. h. nach einer bekannten Euler'schen Formel*) in $\frac{\pi^2}{6}$ über und man findet somit

$$\lim_{\varrho=0} \sum \frac{1}{\mu^{2+2\varrho}} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \prod'' \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)$$

oder, wenn wir dem Zeichen q dieselbe Bedeutung ertheilen, wie wir ihm bei der Formel (15′) des 6. Abschnittes beigelegt haben, gleich

$$\frac{\pi^2}{8} \cdot \prod \left(1 - \frac{1}{q^2}\right).$$

Mit Rücksicht auf diese Formel ergiebt sich sodann

$$(46) \quad \lim_{\varrho=0} \varrho \sum' \frac{1}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{1+\varrho}} = \frac{2\tau\vartheta}{\pi^2} \cdot \prod \left(\frac{q-\varepsilon}{q+1}\right).$$

Da der gefundene Grenzwerth somit für jede der zur Linken der Gleichung (45) stehenden Summen der gleiche ist,

---

*) S. in Euler's Introductio in Analysin das Capitel de seriebus ex evolutione factorum ortis.

ergiebt sich als Grenzwerth der ganzen *linken* Seite dieser Gleichung der Werth:

$$(47) \qquad H(D) \cdot \frac{4\tau\vartheta}{\pi^2} \cdot \prod \left(\frac{q-\varepsilon}{q+1}\right).$$

10. Um die gleiche Untersuchung nun auch für ihre rechte Seite durchzuführen, bedarf es einer näheren Betrachtung der bei der Summation zulässigen Werthe von x', y'. Diese Werthe sollen relativ prim sein, und in der ersten der rechts stehenden Summen den Ausdruck

$$A^2x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2$$

zu einer zu Π primen Quadratzahl m^2 machen, endlich, falls die Determinante positiv ist, den Ungleichheiten

$$(48) \qquad y' > 0, \quad u(A^2x' + By') > ty'$$

oder den ihnen gleichbedeutenden Ungleichheiten

$$(48\,a) \qquad \begin{cases} A^2x' + By' \pm y'\sqrt{D} > 0 \\ 1 < \dfrac{A^2x' + By' + y'\sqrt{D}}{A^2x' + By' - y'\sqrt{D}} < \dfrac{t + u\sqrt{D}}{t - u\sqrt{D}} \end{cases}$$

genügen. Aus der Gleichung

$$A^2x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = m^2$$

folgt zunächst, dass y' und A keinen gemeinsamen Primtheiler haben dürfen, damit m eine zu Π prime Zahl wird; und so wird y' auch mit m keinen gemeinsamen Primtheiler haben, weil sonst dieser, da x', y' relativ prim vorausgesetzt werden, auch in A aufgehen, A und m also nicht relativ prim sein würden. Schreibt man nun die vorige Gleichung folgendermassen:

$$(49) \quad (A^2x' + By' + Am)(A^2x' + By' - Am) = Dy'^2,$$

so ergiebt sich der Unterschied der Faktoren gleich $2Am$, ein gemeinsamer ungerader Primtheiler derselben müsste also in A oder in m aufgehen, andererseits aber auch in D oder in y', was nicht zusammen geschehen kann.

Sind nun erstens D und y' ungerade, so werden sich die Primzahlpotenzen, aus denen Dy'^2 besteht, auf die beiden Faktoren so vertheilen, dass einer von ihnen stets eine der-

selben ganz in sich enthält, mit anderen Worten: setzt man $D = d\delta$, $y' = \theta\eta$, so wird

$$A^2x' + By' + Am = d\theta^2, \quad A^2x' + By' - Am = \delta\eta^2$$

sein, während $d\theta^2$ und $\delta\eta^2$ relativ prim sind.

Ist zweitens y' gerade, so müssen beide Faktoren gerade, können aber zugleich nur durch 2^1 theilbar sein, und demnach wird

$$A^2x' + By' + Am = 2d\theta^2, \quad A^2x' + By' - Am = 2\delta\eta^2$$

sein, worin jetzt $y' = 2\theta\eta$, $d\theta^2$ und $\delta\eta^2$ aber wieder relativ prim sind.

Ist endlich drittens y' zwar ungerade, aber D gerade, so müssen wieder beide Faktoren gerade sein, woraus D als durch 4 theilbar hervorgeht, sie können aber gleichzeitig nur durch 2^1 theilbar sein; in diesem Falle findet sich also

$$A^2x' + By' + Am = d\theta^2, \quad A^2x' + By' - Am = \delta\eta^2,$$

wo $d\delta = D$, $\theta\eta = y'$ sind, während $d\theta^2$, $\delta\eta^2$ den grössten gemeinsamen Theiler 2 haben.

Allgemein ist mithin zu setzen:

$$(50)\quad A^2x' + By' + Am = \frac{2}{r}d\theta^2, \quad A^2x' + By' - Am = \frac{2}{r}\delta\eta^2,$$

wo $d\delta = D$, $2\theta\eta = ry'$ und $r = 1$ oder 2 ist, je nachdem y' gerade oder ungerade ist; θ, η sind stets relativ prim, d, δ desgleichen mit Ausnahme des Falls, in welchem D gerade und y' ungerade ist, wo sie den grössten gemeinsamen Theiler 2 haben. Da die Zahlen A, m als positiv angenommen werden dürfen, ebenso auch θ und η, und da x', y' die Ungleichheiten (48) erfüllen sollen, so wird nach der ersten der Gleichungen (50) d stets positiv sein.

Für jedes diesen Bestimmungen gemässe System ganzer Zahlen r, d, δ werden, wie leicht zu erkennen, die Zahlen

$$(51)\qquad L = drA, \quad M = d\varepsilon B, \quad N = \frac{d\varepsilon^2B^2 - \delta}{rA},$$

in denen ε eine ungerade der Congruenz

$$(52)\qquad d\varepsilon \equiv 1 \pmod{A}$$

genügende Zahl sein soll, drei ganze Zahlen sein, welche die Gleichung erfüllen

$$M^2 - LN = D. \tag{53}$$

Zudem werden aber auch L, $2M$, N ohne gemeinsamen Theiler sein. Bezüglich jedes ungeraden Theilers ergiebt sich dies ohne weiteres; die Zahlen können aber auch nicht alle drei den Theiler 2 haben. Denn, ist erstens $r = 1$ also y' gerade, so sind d, δ relativ prim; ist d gerade, so wird δ ungerade, mithin N ungerade sein, ist dagegen d ungerade, so ist L ungerade; zweitens wenn $r = 2$ ist, so ist zwar $d\varepsilon^2 B^2 - \delta$ durch 2 theilbar, aber nicht durch 4, denn sonst wäre $d - \delta \equiv 0 \pmod 4$, während in diesem Falle aus der Gleichung

$$2Am = d\theta^2 - \delta\eta^2$$

die Congruenz

$$d - \delta \equiv 2Am \equiv 2 \pmod 4$$

hervorgeht, N ist folglich in diesem Falle ungerade.

Weiter folgt aus (50) die Gleichung

$$rA^2x' = d\theta^2 - 2B\theta\eta + \delta\eta^2$$

also, wie ohne Mühe zu finden ist,

$$d\theta \equiv B\eta \pmod A,$$

was in Verbindung mit (52)

$$\theta \equiv B\eta\varepsilon \pmod A$$

oder eine Gleichung von der Gestalt

$$\theta = B\eta\varepsilon + Ar\xi \tag{54}$$

ergiebt, in welcher ξ eine ganze Zahl ist, welche offenbar zu η prim sein muss, da sonst η, θ einen gemeinsamen Theiler erhielten.

Nun erschliesst man aber aus (50) die Doppelgleichung

$$r(A^2x' + By' \pm y'\sqrt{D}) = d\theta^2 + \delta\eta^2 \pm 2\theta\eta\sqrt{D}; \tag{55}$$

wird sie mit 2θ dividirt und dann die Gleichung

$$\frac{rAm}{2\theta} = \frac{d\theta^2 - \delta\eta^2}{2\theta}$$

hinzugefügt, so findet sich

$$(56)\quad \frac{r}{2\theta}(A^2x' + By' \pm y'\sqrt{D} + Am) = L\xi + M\eta \pm \eta\sqrt{D};$$

wird die Gleichung (55) dagegen mit d multiplicirt, so findet sich

$$dr(A^2x' + By' \pm y'\sqrt{D}) = (L\xi + M\eta \pm \eta\sqrt{D})^2,$$

und wenn die beiden in dieser Formel enthaltenen Gleichungen in einander dividirt und multiplicirt werden, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{A^2x' + By' + y'\sqrt{D}}{A^2x' + By' - y'\sqrt{D}} = \left(\frac{L\xi + M\eta + \eta\sqrt{D}}{L\xi + M\eta - \eta\sqrt{D}}\right)^2$$

und

$$A^2x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = (L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2)^2.$$

Für den Fall $D > 0$ lehren demnach die Bedingungen (48a) mit Rücksicht auf die Annahme (42), dass die ganzen Zahlen ξ, η dann den nachstehenden Bedingungen unterworfen sind:

$$(57)\quad \begin{cases} L\xi + M\eta \pm \eta\sqrt{D} > 0 \\ 1 \leqq \dfrac{L\xi + M\eta + \eta\sqrt{D}}{L\xi + M\eta - \eta\sqrt{D}} < \dfrac{T + U\sqrt{D}}{T - U\sqrt{D}}; \end{cases}$$

und die Voraussetzung, nach welcher $A^2x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2$ prim sein soll zu Π, lehrt, dass die ganzen Zahlen ξ, η den Ausdruck $L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$ zu Π prim machen müssen.

Auch geht aus unseren Betrachtungen hervor, dass jedem zulässigen Werthsysteme x', y' und θ, η, wenn, wie es geschehen ist, letztere positiv gewählt werden, ein einziges System der Zahlen r, d, δ und ein einziges System ξ, η, das obigen Bedingungen genügt, zugehörig ist. Lässt man die θ, η betreffende Voraussetzung fallen, so ändert das zwar nichts im Falle einer positiven Determinante, da dann durch die Ungleichheiten (57) η und damit auch θ als positiv erfordert werden; dagegen würde im Falle einer negativen Determinante auch das System $-\xi$, $-\eta$ mit allen Bedingungen, denen x', y' genügen sollen, verträglich sein, in diesem Falle also jedem zulässigen Systeme x', y' zwei zulässige Systeme ξ, η zugehören. Da nun umgekehrt offenbar, sobald

für die Zahlen r, d, δ ein zulässiges Werthsystem gesetzt ist, für $D > 0$ jedem mit den aufgestellten Bedingungen verträglichen Systeme ξ, η ein zulässiges System x', y', für $D < 0$ den beiden Systemen ξ, η; $-\xi, -\eta$ ein solches entspricht, so übersieht man die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$\tau \cdot \varrho \sum{}' \frac{1}{(A^2x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2)^{\frac{1+\varrho}{2}}} = \varrho \cdot \sum{}' \frac{1}{(L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2)^{1+\varrho}},$$

wenn in derselben einerseits über alle zulässigen Werthsysteme x', y', andererseits nicht nur über alle zulässigen Werthsysteme r, d, δ oder L, M, N, sondern auch jedesmal dann über alle relativen Primzahlen ξ, η summirt wird, für welche der Werth der quadratischen Form (L, M, N) prim wird gegen H und welche, im Falle einer positiven Determinante, die Ungleichheiten (57) erfüllen; τ ist wieder gleich 1 oder gleich 2, je nachdem die Determinante positiv oder negativ ist. Die Summe auf der rechten Seite der Gleichung steht also an Stelle von so viel ähnlichen Summen, als zulässige Werthsysteme r, d, δ vorhanden sind, und zwar ist jede von den letzteren genau von derselben Art wie diejenige*), für welche in voriger Nr. der Grenzwerth für $\varrho = 0$ bestimmt worden ist. Man findet demnach

$$\tau \cdot \lim_{\varrho=0} \varrho \sum{}' \frac{1}{(A^2x'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2)^{\frac{1+\varrho}{2}}} = \tau \cdot \frac{2\vartheta}{\pi^2} \prod \left(\frac{q-\varepsilon}{q+1}\right) \cdot \Delta,$$

wo Δ die Anzahl der zulässigen Werthsysteme r, d, δ bezeichnet.

Diese Betrachtung wiederholt sich bei jeder der übrigen Summen, welche die rechte Seite der Gleichung (45) bilden, und da wir sogleich zeigen werden, dass Δ für jede von ihnen denselben Werth hat, und da die Anzahl der genannten Summen

*) Zwar ist L nicht, wie für den ersten Coefficienten a bei Herleitung der Formel (15′) des 6. Abschn., auf welche wir uns gestützt haben, vorausgesetzt wurde, relativ prim gegen H; doch bleibt diese Formel offenbar auch bestehen, wenn man diese, nur zu ihrer Herleitung eingeführte Voraussetzung fallen lässt, da die Summe auf ihrer linken Seite nur von der Classe abhängt, welche durch die Form (a, b, c) repräsentirt wird, nicht von dieser repräsentirenden Form selber.

$Q(D)$ ist, so findet man für den Grenzwerth der gesammten *rechten* Seite dieser Gleichung den Werth:

$$\frac{2\iota\vartheta}{\pi^2}\cdot\prod\left(\frac{q-\varepsilon}{q+1}\right)\cdot Q(D)\cdot\Delta\,.$$

11. Die Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit dem Grenzwerthe (47) der linken Seite ergiebt also

$$Q(D)\cdot\Delta = 2H(D). \tag{58}$$

Zur näheren Bestimmung der Zahl Δ beachten wir vor allem, dass die Gleichung

$$(A^2x' + By')^2 - Dy'^2 = A^2m^2$$

als Congruenz (mod. 4) oder (mod. 8) aufgefasst sehr leicht erkennen lässt, dass

$r = 1$ ist in den Fällen $D \equiv 1, 2, 4, 5, 6 \pmod 8$,

dagegen sowohl $r = 1$ als auch $r = 2$ sein kann in den Fällen $D \equiv 0, 3, 7 \pmod 8$.

Nun mussten d, δ relativ prim sein, so oft D ungerade ist; bezeichnen wir wieder allgemein mit ϖ die Anzahl der verschiedenen ungeraden Primfaktoren, aus denen D besteht, so ist 2^ϖ für eine ungerade Determinante die Anzahl ihrer Zerlegungen in zwei relativ prime Faktoren, deren einer (d) positiv ist; demnach giebt es

für $D \equiv 1, 5 \pmod 8$ $1\cdot 2^\varpi$ zulässige Systeme r, d, δ;

für $D \equiv 3, 7 \pmod 8$ $2\cdot 2^\varpi$ „ „ „ .

War D gerade, so mussten, so oft $r = 1$ war, die Faktoren d, δ der Zerlegung von D wieder relativ prim sein, von welchen Zerlegungen jetzt die Zahl D genau $2^{\varpi+1}$ darbietet. Hieraus folgt

für $D \equiv 2, 4, 6 \pmod 8$ $2^{\varpi+1}$ zulässige Systeme r, d, δ.

Für

$$D \equiv 0 \pmod 8$$

entspringen dem Werthe $r = 1$ zunächst $2^{\varpi+1}$ zulässige Systeme r, d, δ; da aber in diesem Falle auch $r = 2$ sein kann und d, δ, wenn D gerade und $r = 2$ war, den grössten gemeinsamen Theiler 2 haben also von der Form $d = 2d'$,

$\delta = 2\delta'$ sein mussten, wo nun $d' \cdot \delta'$ eine Zerlegung von $\frac{D}{4}$ in zwei relativ prime Faktoren, deren erster positiv ist, darstellt, eine Zerlegung, deren es $2^{\omega+1}$ giebt, da $\frac{D}{4}$ noch durch 2 aufgeht, so kommen in diesem Falle noch einmal $2^{\omega+1}$ zulässige Systeme r, d, δ hinzu, und es giebt demnach

für $D \equiv 0 \pmod 8$ $2^{\omega+2}$ zulässige Systeme r, d, δ.

Allgemein ergiebt sich aus diesen Betrachtungen für die Anzahl $\mathcal{A}$ der zulässigen Systeme r, d, δ der nur von der Determinante, nicht von der besonderen Form (A^2, B, C) abhängige Werth

$$\mathcal{A} = 2^{\omega+\sigma},$$

wo σ dieselbe Bedeutung hat, wie bei der Anzahl der Geschlechter. Alles in allem giebt nun die Formel (58) das Resultat

$$H(D) = Q(D) \cdot 2^{\omega+\sigma-1}$$

und durch Vergleichung mit (24)

$$Q(D) = \Gamma$$

d. h. die Anzahl der durch Duplikation entstehenden Classen ist gleich der Anzahl der in jedem Geschlechte, also auch gleich der Anzahl der im Hauptgeschlechte enthaltenen Classen:

(59) $$Q(D) = K(D).$$

Da aber jede durch Duplikation entstehende Classe, wie wir wissen, dem Hauptgeschlecht angehört, so folgt hieraus der berühmte Gaussische Satz*):

Jede Classe des Hauptgeschlechtes entsteht durch Duplikation.

Nunmehr folgt dann nach Nr. 7 sogleich auch die Gleichheit der Anzahl der Geschlechter mit der Anzahl der ambigen Classen oder die Formel

(60) $$\mathfrak{A}(D) = 2^{\omega+\sigma-1}.$$

---

*) Gauss Disquis. Arithm. art. 286.

12. Nachdem wir so aus analytischer Quelle die schönsten Resultate der Lehre von der Zusammensetzung der Formen, welche Gauss auf arithmetischem Wege gefunden, hergeleitet haben, wollen wir die bezüglichen Betrachtungen abschliessen, indem wir eine Bemerkung von Schering anfügen*), welche aus der Zusammensetzung aller Classen der Determinante D aus Fundamentalclassen, nämlich aus der allgemeinen Formel (27):

$$C_1^{h_1} \cdot C_2^{h_2} \cdot C_3^{h_3} \cdots C_\omega^{h_\omega}$$

entspringt.

Es ist bereits bemerkt worden, dass die Anzahl der ambigen Classen gleich 2^μ ist, wenn unter den Exponenten $m_1, m_2, \ldots m_\omega$, zu denen die Fundamentalclassen gehören, μ gerade vorhanden sind; auch leuchtet daraus, dass jeder dieser Exponenten im vorhergehenden aufgeht, ein, dass diese geraden Exponenten die μ ersten sein müssen. Ferner ist auch schon bemerkt worden, dass der Exponent, zu welchem eine nicht zum Hauptgeschlechte gehörige Classe gehört, immer gerade ist. Sind demnach γ unter den Fundamentalclassen nicht zum Hauptgeschlechte gehörig, so muss $\mu \geqq \gamma$ also auch $2^\mu \geqq 2^\gamma$ sein. Nun bezeichne g die Anzahl der verschiedenen Geschlechter $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, in welche diese γ Fundamentalclassen sich vertheilen, so wird $\gamma \geqq g$ also auch $2^\gamma \geqq 2^g$ sein. Beachtet man, dass Classen des Hauptgeschlechts durch Zusammensetzung mit einander stets wieder eine Classe des Hauptgeschlechts, dagegen Classen irgend eines vom Hauptgeschlechte verschiedenen Geschlechts Γ durch Zusammensetzung mit einander oder mit Classen des Hauptgeschlechtes stets wieder nur Classen des letzteren oder des Geschlechtes Γ hervorbringen, so übersieht man ohne Mühe, dass die Anzahl der verschiedenen Geschlechter, welche durch Zusammensetzung der Fundamentalclassen oder aus der Formel (27) hervorgehen — das ist aber die Anzahl sämmtlicher Geschlechter — gewiss nicht grösser sein kann, als die Anzahl der Glieder des entwickelten Produktes

*) Schering, die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen (im 14. Bd. der Abhh. der K. Ges. d. W. zu Göttingen, 1869), am Schlusse.

$$(1 + \Gamma_1)(1 + \Gamma_2) \cdots$$

nämlich 2^g, und somit folgt $2^g \geqq 2^{\varpi+\sigma-1}$. Da wir aber die Gleichheit für die Anzahl der ambigen Classen und der Geschlechter bereits bewiesen haben, so ergiebt sich

$$\mu = \gamma = g = \varpi + \sigma - 1 .$$

Und hieraus fliessen die Sätze:

Die Exponenten, zu welchen die Fundamentalclassen aus dem Hauptgeschlechte gehören, sind ungerade. — Ist γ die Anzahl der Fundamentalclassen, die *nicht* zum Hauptgeschlechte gehören, so ist 2^γ die Anzahl der ambigen Classen, sowie die Anzahl der Geschlechter; γ ist $\varpi + \sigma - 1$, und die *nicht* zum Hauptgeschlechte gehörigen Fundamentalclassen sind die *ersten* γ Classen in der Formel (27). Es ist leicht einzusehen, dass eine ambige Classe *nur* aus der Zusammensetzung dieser γ Fundamentalclassen hervorgehen kann.

Zehnter Abschnitt.

Ausdehnung des Satzes von der arithmetischen Progression auf quadratische Formen.

1. Zum Schlusse unseres Berichts über die Anwendungen, welche man von den Dirichlet'schen Methoden auf die Theorie der quadratischen Formen gemacht hat, wollen wir den gegenwärtigen Abschnitt dem Satze widmen, durch welchen Dirichlet denjenigen von der arithmetischen Progression auf quadratische Formen übertragen hat, dem Satze, dass jede eigentlich primitive quadratische Form fähig ist, unendlich viele Primzahlen darzustellen. In einer, der Berliner Academie im J. 1840 vorgelesenen Arbeit hat Dirichlet den Beweis seines Satzes entwickelt. Der Auszug dieser Arbeit aber, wie er sich in den Monatsberichten v. J. 1840 oder auch im 21. Bande des Crelle'schen Journals findet, beschränkt sich auf den besonderen Fall, dass die Determinante der quadratischen Form regulär und eine negative Primzahl $-p$ ist, welche absolut genommen die Form $4k+3$ hat, und lässt auch abgesehen von dieser Beschränkung eine Ergänzung in einem wesentlichen Punkte der Beweisführung sehr zu wünschen. Zudem hat Dirichlet selbst seinem Satze in den Comptes Rendus v. J. 1840 eine nähere Bestimmung hinzugefügt, nach welcher unter den im Satze genannten unendlich vielen Primzahlen insbesondere auch unendlich viel solche vorhanden seien, welche zugleich in irgend einer mit den Charakteren der quadratischen Form verträglichen primitiven Linearform enthalten sind. H. Weber hat in einer schönen Arbeit jene Ergänzung des ursprünglichen Satzes und A. Meyer sodann, indem er auf diese sich stützte, für

Dirichlet's bestimmteren Satz den Beweis beigebracht*). Da mit dem letztern zugleich der ursprüngliche dargethan ist, so genügt es ihn zu beweisen, und wir wollen daher, indem wir der Weber'schen Abhandlung nur die Grundlage der Beweisführung entnehmen, im Anschlusse an die Arbeit von Meyer den vollständigen Dirichlet'schen Satz hier herleiten.

Dieser Satz lautet also: Jede eigentlich primitive (positive) Form (deren Determinante kein Quadrat ist), stellt unendlich viele Primzahlen dar, welche zugleich in einer gegebenen, mit den Charakteren der Form verträglichen primitiven Linearform $Mx + N$ enthalten sind.

2. Wir beginnen den Beweis mit einigen nothwendigen Vorbemerkungen. Nach Nr. 5 des vorigen Abschnitts können alle Classen eigentlich primitiver (positiver) quadratischer Formen einer gegebenen Determinante D und jede einmal aus gewissen Fundamentalclassen mittels der Formel

$$C = C_1^{h_1} C_2^{h_2} \dots C_\omega^{h_\omega} \tag{1}$$

erhalten werden, wenn man darin jeden Exponenten h_i die Zahlen $0, 1, 2, \dots m_i - 1$ durchlaufen lässt, unter m_i den sogenannten Exponenten verstanden, zu welchem die Fundamentalclasse C_i gehört, sodass die Anzahl aller Classen

$$h = m_1 m_2 \dots m_\omega$$

ist. Seien nun $w_1, w_2, \dots w_\omega$ irgend welche Wurzeln der Gleichungen

$$w_1^{m_1} = 1, \quad w_2^{m_2} = 1, \dots w_\omega^{m_\omega} = 1, \tag{2}$$

so wollen wir

$$K(C) = w_1^{h_1} w_2^{h_2} \dots w_\omega^{h_\omega} \tag{3}$$

setzen und einen Charakter der Classe C nennen. Solcher Classencharaktere giebt es offenbar so viele, als die Wurzeln $w_1, w_2, \dots w_\omega$ der Gleichungen (2) verschiedentlich ge-

*) H. Weber, Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist, Math. Ann., Bd. 20 p. 301; A. Meyer, über einen Satz von Dirichlet, im Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 103 p. 98.

wählt werden können, also $m_1 m_2 \ldots m_\omega = h$. Hier wiederholen sich die gleichen Betrachtungen und Benennungen, welche gelegentlich der im 4. Abschnitte eingeführten Zahlencharaktere $\chi(n)$ von uns angewandt worden sind. So findet sich unmittelbar aus der Definition die Gleichung

$$K(C) \cdot K(C') = K(CC') \tag{4}$$

für irgend zwei gleiche oder verschiedene Classen C, C'.

Sind ferner $w_1, w_2, \ldots w_\omega$; $w_1', w_2', \ldots w_\omega'$ zwei Wurzelcombinationen, die auch identisch sein können, so ergiebt sich daraus eine ganz bestimmte dritte

$$w_1'' = w_1 w_1', \quad w_2'' = w_2 w_2', \quad \ldots \quad w_\omega'' = w_\omega w_\omega'$$

d. h. die beiden den erstern entsprechenden Charaktere $K(C)$, $K'(C)$ setzen sich nach der Formel

$$K(C) \cdot K'(C) = K''(C), \tag{5}$$

die dann für jede Classe gilt, zu einem bestimmten dritten Charakter $K''(C)$ zusammen.

Wir nennen ferner Hauptcharakter denjenigen Charakter, welcher den Wurzeln

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1, \quad \ldots \quad w_\omega = 1$$

entspricht, nennen zwei Charaktere entgegengesetzt, wenn sie zum Hauptcharakter sich zusammensetzen, und einen Charakter ambige, wenn er sich selbst entgegengesetzt, oder wenn er, mit sich selbst zusammengesetzt, gleich dem Hauptcharakter wird. Der Hauptcharakter hat also für jede Classe den Werth $+1$, jeder ambige Charakter für jede Classe den Werth ± 1.

Genau auf dieselbe Weise endlich, wie im 4. Abschnitte die in den Formeln (10), (10a), (11) und (11a) ausgesprochenen Sätze, beweist man hier die folgenden: Für jeden bestimmten Charakter K ist die über sämmtliche Classen C erstreckte Summe

$$\sum_C K(C) = 0, \tag{6}$$

ausgenommen den Hauptcharakter, für welchen

$$\sum_{C} K(C) = h \tag{6a}$$

ist; für jede Classe C dagegen ist die auf sämmtliche Charaktere erstreckte Summe

$$\sum_{K} K(C) = 0, \tag{7}$$

ausgenommen die Hauptclasse H, für welche

$$\sum_{K} K(H) = h \tag{7a}$$

ist. —

Heisst $K_i(C)$ derjenige Charakter, für welchen w_i eine primitive Wurzel der entsprechenden Gleichung (2), alle anderen Wurzeln w aber gleich 1 sind, so ist sehr einfach zu erkennen, dass, welches auch die Classe C sei, alle Charaktere $K(C)$ ähnlich den Classen selber durch den Ausdruck

$$K(C) = K_1(C)^{k_1} K_2(C)^{k_2} \ldots K_\omega(C)^{k_\omega}$$

gegeben werden, wenn jedes k_i die Werthe $0, 1, \ldots m_i - 1$ durchläuft. Und hieraus schliesst man, genau wie in Nr. 5 des vor. Abschnitts für die ambigen Classen, dass die Anzahl der ambigen Classencharaktere gleich der der ambigen Classen, nämlich 2^μ ist, wenn μ von den Exponenten $m_1, m_2, \ldots m_\omega$, was dann die ersten μ derselben sein müssen, gerade Zahlen sind.

Ist nun $f(C)$ irgend eine durch die Classe C eindeutig bestimmte, von Null verschiedene Grösse, welche für je zwei Classen C', C'' der Bedingung genügt:

$$f(C') \cdot f(C'') = f(C'C''), \tag{4a}$$

so ist leicht zu sehen, dass $f(C)$ mit einem der Classencharaktere identisch sein muss. Denn setzt man zunächst für C'' die Hauptclasse H, so folgt aus (6)

$$f(H) = 1;$$

setzt man sodann $C' = C$, $C'' = C^{m-1}$, wo m den Exponenten bedeutet, zu welchem die Classe C gehört, so folgt aus derselben Formel

$$f(C)^m = f(H) = 1$$

also muss $f(C)$ eine Einheitswurzel des Grades sein, zu welchem C gehört. Sind demgemäss $w_1, w_2, \ldots w_\omega$ die Werthe dieser Einheitswurzel, entsprechend den Fundamentalclassen d. h., ist

$$f(C_1) = w_1, \quad f(C_2) = w_2, \ \ldots \ f(C_\omega) = w_\omega,$$

so folgt aus (1) in Verbindung mit der Annahme (4a)

$$f(C) = K(C)$$

w. z. b. w.

Bezeichnet man aber wieder, wie im vorigen Abschnitte, mit

$$\varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots \mid \psi', \psi'', \ldots$$

die sämmtlichen, einer Form der Determinante D zukommenden Einzelcharaktere, so sind ihre Werthe, wie wir wissen, für alle zu $2D$ primen Zahlen n, welche durch die Formen einer bestimmten Classe darstellbar sind, dieselben; sie sind daher als Funktionen der Classe aufzufassen und sollen als solche durch

$$\varphi'(C), \quad \varphi''(C), \ \ldots \mid \psi'(C), \quad \psi''(C), \ \ldots$$

ausgedrückt werden. Wird jedes Glied des entwickelten Produktes

$$P(C) = \big(1 + \varphi'(C)\big)\big(1 + \varphi''(C)\big) \ \ldots \ \big(1 + \psi'(C)\big) \ \ldots$$

wieder $k(C)$ genannt, so leistet diese Funktion, wie dort gezeigt worden, der Bedingung

$$k(C') \cdot k(C'') = k(C'C'')$$

Genüge, wir besitzen also in ihr eine Funktion der Art, wie wir soeben unter $f(C)$ verstanden, und sehen folglich, dass jede der Grössen $k(C)$ mit einem der Classencharaktere identisch sein und, da ihr Werth für jede Classe C nur ± 1 sein kann, zu den 2^α ambigen Classencharakteren gehören muss.

Solcher Funktionen $k(C)$ giebt es aber $2^{\omega+\sigma} = 2^{\mu+1}$; da jedoch für jede zu $2D$ prime durch Formen der Determinante D darstellbare Zahl n das Produkt $\varphi' \varphi'' \varphi''' \ldots$ der Einzelcharaktere der ersten Kategorie bekanntlich gleich 1 ist, so muss auch für jede Classe das Glied

$$\varphi'(C) \varphi''(C) \varphi'''(C) \ldots$$

des entwickelten Produktes $P(C)$ seinem ersten Gliede 1, und wie daraus erkennbar, je zwei Grössen $k(C)$ einander gleich sein, sodass, wenn aus jedem solchen Paare nur eine der Grössen $k(C)$ beibehalten wird, insbesondere vom erstgenannten Paare nur die Grösse $k(C) = 1$, von den übrig bleibenden 2^{α} Funktionen $k(C)$ nicht zwei identisch sein werden. Da sie nun aber sämmtlich zu den in gleicher Anzahl vorhandenen ambigen Classencharakteren zählen, stimmen sie mit den letzteren überein. Jeder ambige Classencharakter $K(C)$ ist also einer dieser Grössen $k(C)$ gleich d. h. nach (6) des vor. Abschnittes

$$K(C) = \theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{Q}\right), \tag{8}$$

wenn n irgend eine zu $2D$ prime, durch die Formen der Classe C darstellbare Zahl, θ, η Einheiten, Q aber einen positiven ungeraden Theiler von D bedeutet, der aus lauter verschiedenen Primfaktoren besteht. Die Combination

$$\theta = \delta, \quad \eta = \varepsilon, \quad Q = P,$$

welche der Grösse

$$k(C) = \varphi'(C)\,\varphi''(C)\,\varphi'''(C) \ldots$$

entspricht, ist dem Gesagten zufolge hierbei ausgeschlossen.

Für jede zu $2D$ prime Zahl m, welche die Bedingung erfüllt, dass

$$\delta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) = 1$$

ist, wird hiernach die Summe

$$\sum \theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{Q}\right),$$

wenn sie auf alle, den ambigen Charakteren K entsprechende Werthcombinationen bezogen wird, gleich

$$\tfrac{1}{2}\big(1 + \varphi'(m)\big)\big(1 + \varphi''(m)\big) \ldots \big(1 + \psi'(m)\big) \ldots$$

d. h. gleich Null sein, ausser, wenn sämmtliche Grössen

$$\varphi'(m), \quad \varphi''(m), \ldots \psi'(m), \ldots$$

den Werth $+1$ haben, wo sie gleich 2^{α} ist.

3. Nunmehr verstehen wir unter M eine positive Zahl, welche sowohl durch 8 als durch D theilbar sein soll; eine Zahl, welche prim ist zu M, wird es also auch sein gegen $2D$. Wir bezeichnen mit m jede positive gegen M prime Zahl, von welcher D quadratischer Rest ist. Führen wir alsdann nach den Auseinandersetzungen in Nr. 2 des 4. Abschnittes die Zahlencharaktere χ (mod. M) wieder ein, so wird jeder dieser Zahlencharaktere $\chi(m)$ für jede der gedachten Zahlen m bestimmt sein. Da aber D quadratischer Rest von m sein soll, so wird jede der Zahlen m auch durch Formen der Determinante D eigentlich darstellbar sein; ist nämlich ϖ die Anzahl der Primfaktoren von m, so ist 2^{ϖ} die Anzahl verschiedener Wurzeln der Congruenz

$$z^2 \equiv D \pmod{m} \tag{9}$$

und jeder von ihnen entspricht eine Gruppe von Darstellungen der Zahl m durch Formen der Determinante D, d. i. eine Formenclasse C, durch welche m zu jener Wurzel gehörig darstellbar ist, wobei möglicherweise verschiedenen Congruenzwurzeln dieselbe Classe zugehören kann. Denken wir uns nun diese sämmtlichen, verschiedenen oder nicht verschiedenen Classen C_m, durch welche m darstellbar ist, verstehen unter $K(C)$ irgend einen der Classencharaktere und unter $\Sigma K(C_m)$ die über jene sämmtlichen Classen C_m erstreckte Summe, so wollen wir für einen Augenblick

$$f(m) = \frac{\chi(m) \cdot \Sigma K(C_m)}{m^s} \tag{10}$$

setzen und den Nachweis führen, dass diese Funktion für je zwei relativ prime Zahlen m, m' der betrachteten Art die Bedingung erfüllt:

$$f(m) \cdot f(m') = f(mm'). \tag{11}$$

In der That erhält man für solche Zahlen sämmtliche Wurzeln der Congruenz

$$Z^2 \equiv D \pmod{mm'},$$

wenn man für jedes Paar von Wurzeln z, z' der Congruenzen

$$z^2 \equiv D \pmod{m}, \quad z'^2 \equiv D \pmod{m'}$$

die Zahl Z durch die Congruenzen

$$Z \equiv z \pmod{m}, \qquad Z \equiv z' \pmod{m'}$$

bestimmt; die Classe $C_{mm'}$ aber, durch welche mm' zur Wurzel Z gehörig dargestellt werden kann, findet sich nach der Lehre von der Zusammensetzung der Classen aus den Classen C_m, $C_{m'}$, durch welche resp. m, m' zur Wurzel z, z' gehörig darstellbar sind, mittels der Gleichung

$$C_{mm'} = C_m C_{m'}.$$

Mit Rücksicht hierauf und auf die in Formel (4) ausgedrückte Eigenschaft der Classencharaktere ergiebt sich offenbar

$$\sum K(C_{mm'}) = \sum K(C_m) \cdot \sum K(C_{m'}),$$

während andererseits nach den Eigenschaften der Zahlencharaktere

$$\chi(mm') = \chi(m) \cdot \chi(m')$$

ist. Hierdurch aber ist die behauptete Relation (11) bewiesen.

Da zudem $f(1)$ sich ohne weiteres gleich 1 findet, folgt nach der allgemeinen Euler'schen Formel (17) des ersten Abschnittes nachstehende für jedes $s > 1$ giltige Gleichung:

$$(12) \quad \sum_m \frac{\chi(m) \Sigma K(C_m)}{m^s} = \prod_q \left(1 + f(q) + f(q^2) + \cdots\right),$$

wo die Multiplikation rechts alle Primzahlen q umfasst, aus denen die Zahlen m zusammengesetzt sind d. i. sämmtliche nicht in M aufgehende Primzahlen, von denen D quadratischer Rest ist. Bedenkt man endlich, dass es für eine solche Primzahl q nur zwei Wurzeln der Congruenz

$$z^2 \equiv D \pmod{q}$$

giebt, welche zudem einander entgegengesetzt sind, dass folglich nur zwei und zwar entgegengesetzte Classen C_q und C_q^{-1} vorhanden sind, durch welche q eigentlich darstellbar ist, mithin hier

$$\sum K(C_q) = K(C_q) + K(C_q^{-1})$$

ist, so findet sich

$$f(q) = \frac{\chi(q) \cdot \left(K(C_q) + K(C_q^{-1})\right)}{q^s}$$

und zufolge des Satzes in Nr. 8 des vorigen Abschnittes sowie der Eigenschaften der Charaktere χ und K allgemeiner

$$f(q^i) = \frac{\chi(q)^i \cdot \left(K(C_q)^i + K(C_q^{-1})^i\right)}{q^{is}}.$$

Der allgemeine Faktor des Produktes in (12) nimmt dadurch folgende Gestalt an:

$$1 + q^{-s} \cdot \chi(q)\left(K(C_q) + K(C_q^{-1})\right) + q^{-2s} \cdot \chi(q)^2\left(K(C_q)^2 + K(C_q^{-1})^2\right) + \cdots$$

d. i.

$$-1 + \frac{1}{1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q)} + \frac{1}{1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q^{-1})}$$

$$= \frac{1 - q^{-2s} \cdot \chi(q)^2}{\left(1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q)\right)\left(1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q^{-1})\right)},$$

sodass man endlich folgende Gleichung erschliesst

$$\sum_m \frac{\chi(m)\, \Sigma K(C_m}{m^s} = \prod_q \frac{1 - q^{-2s} \cdot \chi(q)^2}{\left(1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q)\right)\left(1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C^{-1})\right)}, \tag{13}$$

in welcher links über sämmtliche oben bezeichneten positiven Zahlen m zu summiren, rechts über alle nicht in M aufgehenden Primzahlen q, von denen D quadratischer Rest ist, zu multipliciren ist.

Man kann dieselbe Summe aber noch auf andere Weise erzeugen. In der That, bedeuten

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_h$$

irgend welche Repräsentanten der verschiedenen Classen C_1, $C_2, \ldots C_h$ der Determinante D, so bilde man den Ausdruck

$$L = K(C_1) \cdot \sum{}' \frac{\chi(f_1)}{f_1^s} + K(C_2) \cdot \sum{}' \frac{\chi(f_2)}{f_2^s} + \cdots + K(C_h) \cdot \sum{}' \frac{\chi(f_h)}{f_h^s}, \tag{14}$$

in welchem allgemein die auf die Form f_i bezügliche Summation sich auf alle ganzzahligen, relativ primen x, y er-

strecken soll, welche der Form f_i einen zu M primen Werth ertheilen und, falls $D > 0$, den bekannten Beschränkungen unterliegen:

$$y > 0, \quad x > \gamma y$$

(γ ist $\frac{T - bU}{aU}$, wenn T, U die Fundamentalauflösung der Pell-schen Gleichung und $f_i = ax^2 + 2bxy + cy^2$ ist); unter $\chi(f_i)$ ist der Zahlencharakter der jedesmaligen so durch f_i dargestellten Zahl zu verstehen. Lässt man dem Zeichen τ dieselbe Bedeutung wie in den früheren Abschnitten, so überzeugt man sich sogleich, dass unter den durch die Formen in L' dargestellten Zahlen jede Zahl m und keine andere auftreten wird und dass, wenn alle Glieder der verschiedenen Summen zusammengezogen werden, in denen dieselbe Zahl m auftritt, L' sich folgendermassen schreiben lässt:

$$L' = \tau \cdot \sum_m \frac{\chi(m) \Sigma K(C_m)}{m^s}.$$

Und so entsteht durch Vergleichung mit (13) diese Gleichung:

$$(15) \quad L' = \tau \cdot \prod_q \frac{1 - q^{-2s} \cdot \chi(q)^2}{\left(1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q)\right)\left(1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q^{-1})\right)}.$$

Bezeichnet aber p jede der Primzahlen, welche nicht in M aufgehen und in Bezug auf welche D quadratischer Nichtrest ist, so findet sich mittels der schon benutzten Euler-schen Formel die Beziehung:

$$\prod_p \frac{1}{1 - \chi(p^2) \cdot p^{-2s}} \cdot \prod_q \frac{1}{1 - \chi(q^2) \cdot q^{-2s}} = \sum_n \frac{\chi(n^2)}{n^{2s}},$$

wenn die Summation rechts auf alle positiven zu M primen Zahlen n ausgedehnt wird. Durch Multiplikation der vorigen Gleichung mit dieser Summe resp. dem ihr gleichen Produkte gewinnen wir endlich die Gleichung, die der folgenden Untersuchung zur Grundlage dient:

$$(16) \quad L = P \cdot \prod_q \frac{1}{\left(1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q)\right)\left(1 - q^{-s} \cdot \chi(q) K(C_q^{-1})\right)},$$

und in welcher P zur Abkürzung steht für

$$P = \tau \cdot \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p^2) \cdot p^{-2s}}$$

und

$$(17) \qquad L = K(C_1) \cdot \sum{}' \frac{\chi(f_1)}{f_1^s} + K(C_2) \cdot \sum{}' \frac{\chi(f_2)}{f_2^s} + \cdot$$
$$+ K(C_h) \cdot \sum{}' \frac{\chi(f_h)}{f_h^s}$$

ist, wenn nun zum Unterschiede von (14) die Summationen über sämmtliche ganzzahlige x, y zu erstrecken sind, welche den bei (14) angegebenen Bedingungen entsprechen.

Der Gleichung (16) zur Seite steht eine Grundformel, die wir durch ihre Logarithmirung erhalten:

$$(18) \qquad \log \frac{L}{P} = \sum{}' \frac{K(C_q) + K(C_q^{-1})}{q^s} \chi(q)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum{}' \frac{K(C_q^2) + K(C_q^{-2})}{q^{2s}} \chi(q^2) + \cdots$$

4. Da es $\varphi(M)$ verschiedene Charaktere χ und h verschiedene Charaktere K giebt, so umfasst die Formel (17) wie (18) $h \cdot \varphi(M)$ Ausdrücke L. Diese Ausdrücke sind aber nicht sämmtlich von einander verschieden, vielmehr werden zwei derselben, welche den Charakteren K', χ'; K'', χ'' entsprechen, mit einander identisch sein, wenn für jede der zu M primen und durch Formen der Determinante D darstellbaren Zahlen m und für die Classe C, durch welche die Darstellung erfolgt,

$$(19) \qquad K'(C) \cdot \chi'(m) = K''(C) \cdot \chi''(m)$$

ist. Um dieser Bedingung auf die allgemeinste Weise zu genügen, führen wir die eindeutig bestimmten Charaktere K, χ ein, für welche

$$(20) \quad K''(C) = K'(C) \cdot K(C), \qquad \chi''(m) = \chi'(m) \cdot \chi(m)$$

ist, und welche demnach folgender Bedingung zu unterwerfen sind:

$$(21) \qquad K(C) \cdot \chi(m) = 1.$$

Ist nun zunächst C die Hauptclasse H, also $K(C) = 1$, so kann man y in der Hauptform $x^2 - Dy^2$ so wählen, dass

Dy^2 durch M theilbar ist, x aber so, dass es bezüglich aller in M enthaltenen Primzahlpotenzen vorgeschriebene Reste lässt. Sei p^α eine dieser Potenzen und ω die Wurzel der Gleichung $\omega^{\varphi(p^\alpha)} = 1$, welche dem Charakter χ entspricht, so kann man also z. B. x so wählen, dass sein Index (mod. p^α) gleich 1, seine Indices bezüglich aller übrigen Primzahlpotenzen von M aber gleich 0 sind; dann wird für die so dargestellte Zahl $m = x^2 - Dy^2$ der Index (mod. p^α) gleich 2, für alle übrigen Primzahlpotenzen von M aber gleich 0 sein, also $\chi(m) = \omega^2$. Die Bedingung (21) erfordert mithin $\omega^2 = 1$ d. i. $\omega = \pm 1$; und da dies für jede der Primzahlpotenzen von M, (auch, wie leicht ersichtlich, für die darin aufgehende Potenz von 2) wiederholt werden kann, muss χ ein ambiger Charakter sein. Nach den Auseinandersetzungen in Nr. 4 des 4. Abschnittes lässt sich demnach

$$\chi(m) = \theta'^{\frac{m-1}{2}} \eta'^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P'}\right), \tag{22}$$

setzen, wenn unter θ', η' gewisse Einheiten, unter P' das Produkt derjenigen ungeraden Primfaktoren von M verstanden wird, denen eine negative Wurzel ω entspricht.

Ist aber zweitens C eine durch Duplikation einer der Fundamentalclassen entstandene Classe: $C = C_i^2$, so ist $K(C) = w_i^2$; da alsdann unter m eine Quadratzahl verstanden werden darf, für den ambigen Charakter χ also $\chi(m) = 1$ wird, erfordert die Bedingung (21), dass $w_i^2 = 1$ d. i. $w_i = \pm 1$ ist, und da dies für jeden Werth von i gilt, so muss auch K ein ambiger Charakter also

$$K(C) = \theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{Q}\right) \tag{23}$$

sein.

Die Bedingung (21) nimmt hiernach folgende Gestalt an:

$$(\theta\theta')^{\frac{m-1}{2}} \cdot (\eta\eta')^{\frac{m^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{m}{P'Q}\right) = 1$$

und soll für jede zu M prime, durch Formen der Determinante D darstellbare Zahl m erfüllt sein. Bezeichnet man durch das Zeichen A den Quotienten von A durch das grösste

in A aufgehende Quadrat, so ist diese Gleichung mit der folgenden gleichbedeutend:

$$(24) \qquad (\theta\theta')^{\frac{m-1}{2}} \cdot (\eta\eta')^{\frac{m^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{m}{P'Q}\right) = 1 .$$

Nun ist aber, wenn man die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes beibehält, für jede solche Zahl m die Bedingung erfüllt:

$$(25) \qquad \delta^{\frac{m-1}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{m}{P}\right) = 1 .$$

Ist also nicht

$$(26) \qquad \theta' = \theta, \quad \eta' = \eta, \quad \overline{P'Q} = 1,$$

wo die voraufgehende Bedingung von selbst erfüllt ist, so muss

$$(27) \qquad \theta' = \theta\delta, \quad \eta' = \eta\varepsilon, \quad P' = \overline{PQ}$$

sein. Hiernach entsprechen jedem Werthe des ambigen Charakters K je zwei Werthe von χ und folglich ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung (21) gleich $2^{\mu+1}$. Werden diese Lösungen aber in (20) eingesetzt, so erhält man diejenigen Charaktere, für welche die entsprechende Reihe L mit der, den Charakteren K', χ' zugehörigen identisch ist. Deshalb sind je $2^{\mu+1}$ von den Reihen L mit einander identisch, und wenn wir die Gesammtheit aller Charaktere K'', welche durch Zusammensetzung eines Charakters K' mit den ambigen Charakteren entstehen, den Complex von K' nennen, so dürfen wir sagen: Die Reihen L, welche der, den Charakteren K', χ' entsprechenden Reihe identisch sind, werden erhalten, wenn man die einzelnen Glieder des Complexes von K' mit je zwei passenden Charakteren χ verbindet. Die Anzahl der nicht identischen Reihen L ist demnach

$$\frac{h}{2^{\mu}} \cdot \frac{1}{2} \varphi(M).$$

Auch nicht identische Reihen L sind möglicherweise numerisch gleich. In dieser Hinsicht bemerken wir nur Folgendes:

1) Die Reihe L_0, welche den beiden Hauptcharakteren K, χ entspricht, nämlich

$$(28) \qquad L_0 = \sum \frac{1}{f_1^s} + \sum \frac{1}{f_2^s} + \ldots + \sum \frac{1}{f_h^s}$$

ist nebst den mit ihr identischen Reihen von allen übrigen verschieden, weil jede andere Reihe L entweder imaginär oder, aus positiven und negativen Gliedern gemischt, numerisch geringer ist.

2) Der Complex, welcher einem Charakter K' zugehört, ist, wenn K' nicht ambige ist, im allgemeinen verschieden von demjenigen, welcher dem entgegengesetzten Charakter K'^{-1} zugehört und der zum erstern entgegengesetzte heissen mag. Man übersieht unschwer, dass beide Complexe dann aber auch nur dann, von der Ordnung abgesehen, mit einander übereinstimmen, wenn für jede Classe C

$$K'(C)^4 = 1$$

ist.

Nehmen wir nun an, die Reihe L entspreche einem solchen Charakter. Weil K' als nicht ambige vorausgesetzt ist, erfordert die Bedingungsgleichung, dass wenigstens eine der Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_\omega$ gleich $\pm i$ sei, wir wollen daher annehmen, es seien

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_j = \pm i, \quad w_{j+1} = \cdots = w_\omega = \pm 1.$$

Betrachtet man dann in der Reihe L eins der Glieder, für welche $K'(C) = \pm i$ ist, so ist in dem, der entgegengesetzten Classe entsprechenden Gliede $K'(C^{-1}) = \mp i$, während die zugehörigen Summen einander gleich sind, da durch entgegengesetzte Formen dieselben Zahlen dargestellt werden; auch können die Classen C und C^{-1} nicht zusammenfallen, weil ambigen Classen der Charakter ± 1 entspricht. Hieraus geht hervor, dass je zwei Glieder der Reihe L, welche imaginären Werthen des Charakters K' entsprechen, sich fortheben und dass folglich in L nur Glieder bestehen bleiben von der Form

$$K'(C) \cdot \sum \frac{\chi(f)}{f^s},$$

wo $K'(C) = \pm 1$ d. h., der Annahme zufolge,

$(\pm i)^{h_1} \cdot (\pm i)^{h_2} \ldots (\pm i)^{h_j} \cdot (\pm 1)^{h_{j+1}} \cdots (\pm 1)^{h_\omega} = \pm 1$

ist, eine Gleichheit, welche erfordert, dass

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_j \equiv 0 \pmod 2$$

ist. Ist also

$$\theta_1^{\frac{m-1}{2}} \eta_1^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{Q_1}\right)$$

derjenige ambige Charakter K, welcher der Annahme

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_j = -1, \quad w_{j+1} = \cdots = w_\omega = 1$$

entspricht, wo weder

$$\theta_1 = 1, \quad \eta_1 = 1, \quad Q_1 = 1$$

noch

$$\theta_1 = \delta, \quad \eta_1 = \varepsilon, \quad Q_1 = P$$

sein kann, da dieser Charakter vom Hauptcharakter verschieden ist, so leuchtet ein, dass für alle in L verbliebenen Classen C

$$\theta_1^{\frac{m-1}{2}} \eta_1^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{Q_1}\right) = +1$$

sein und der Werth von L sich nicht verändern wird, wenn man den Charakter χ in $\chi \cdot \chi_1$ verwandelt, unter χ_1 den ambigen Zahlencharakter verstanden, welcher durch die Gleichung

$$\chi(m) = \theta_1^{\frac{m-1}{2}} \eta_1^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{Q_1}\right)$$

bestimmt ist. Da das Gleiche für die mit L identischen Reihen gilt, so folgt offenbar: Ist K' ein nicht ambiger Charakter, dessen Complex mit seinem entgegengesetzten identisch ist, und L eine ihm entsprechende Reihe, so werden nicht allein die $2^{\omega+1}$ mit L identischen Reihen, sondern noch (wenigstens) $2^{\omega+1}$ andere Reihen von gleichem Werthe sein.

5. Nachdem dies voraufgeschickt, theilen wir nun alle Reihen L in drei Arten:

Erstens die Reihe L_0 nebst den mit ihr identischen, also eine Anzahl $2^{\omega+1}$ von Reihen; sie entsprechen offenbar lauter ambigen Charakteren K und χ.

Zweitens die übrigen Reihen, welche zwei ambigen Charakteren K, χ entsprechen; unter ihnen befinden sich zugleich die mit ihnen identischen; in der That, ist L eine von L_0 verschiedene Reihe, welche ambigen Charakteren K', χ' entspricht, so werden die Charaktere K'', χ'' in (20), welche

den mit L identischen, also gleichfalls von L_0 verschiedenen Reihen zukommen, auch ambige sein, da sie aus jenen durch Zusammensetzung mit ebenfalls ambigen Charakteren entstehen.

Drittens alle übrigen Reihen L.

Setzt man nun wieder $s = 1 + \varrho$ und lässt ϱ gegen 0 convergiren, so wissen wir aus den Untersuchungen über die Classenanzahl, dass (Formel (15′) des 6. Abschnittes)

$$\lim_{\varrho=0} \varrho L_0 = g \cdot h \tag{29}$$

ist, wenn zur Abkürzung

$$g = \frac{\tau\vartheta}{4} \cdot \prod_q \left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{q}\right)$$

gesetzt und die Multiplikation auf alle ungeraden Primfaktoren von M erstreckt wird; L_0 wird also bei unendlich abnehmendem ϱ unendlich gross, wie $\frac{gh}{\varrho}$.

Ist zweitens L eine Reihe der zweiten Art, so kann man mit Beachtung der Formeln (22) und (23) der zugehörigen Reihe L' folgenden Ausdruck geben:

$$L' = \sum_{i=1}^{h} \sum_{m_i} \frac{(\theta\theta')^{\frac{m_i-1}{2}} \cdot (\eta\eta')^{\frac{m_i^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{m_i}{P'Q}\right)}{m_i^s},$$

wo die Summation nach m_i auf sämmtliche durch die Form f_i in der bei (14) näher bestimmten Weise darstellbare, zu M prime positive Zahlen erstreckt werden muss. Fasst man hier alle Glieder zusammen, in denen dieselbe Zahl m auftritt, und bedenkt, dass diese, weil prim zu M also auch zu $2D$, genau $\tau \cdot \psi(m) = \tau \cdot 2^{\varpi}$ Mal, wenn ϖ die Anzahl der Primfaktoren von m bedeutet, durch das Formensystem in der angegebenen Art dargestellt werden kann, so findet sich einfacher

$$L' = \tau \cdot \sum (\theta\theta')^{\frac{m-1}{2}} \cdot (\eta\eta')^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P'Q}\right) \cdot \frac{2^{\varpi}}{m^s}, \tag{30}$$

ausgedehnt über alle positiven zu M primen Zahlen m, von welchen D quadratischer Rest ist.

Zur Abkürzung setzen wir $P'Q = P_1$; diese Zahl ist dann ein ungerader Faktor von M ohne quadratische Theiler.

Bezeichnet S_1 das Produkt aller verschiedenen Primfaktoren von M, welche nicht in $2P_1$ aufgehen, so werden P_1 und S_1 zusammengenommen sämmtliche ungerade Primfaktoren von M enthalten. Wenn wir also setzen

$$\begin{aligned}
D_1 &= \pm P_1 S_1^2 \equiv 1 \pmod 4, \text{ wenn } \theta\theta' = \quad 1, \quad \eta\eta' = \quad 1 \text{ ist}\\
D_1 &= \pm P_1 S_1^2 \equiv 3 \pmod 4, \quad \text{„} \quad \theta\theta' = -1, \quad \eta\eta' = \quad 1 \text{ „}\\
D_1 &= \pm 2 P_1 S_1^2 \equiv 2 \pmod 8, \quad \text{„} \quad \theta\theta' = \quad 1, \quad \eta\eta' = -1 \text{ „}\\
D_1 &= \pm 2 P_1 S_1^2 \equiv 6 \pmod 8, \quad \text{„} \quad \theta\theta' = -1, \quad \eta\eta' = -1 \text{ „},
\end{aligned}$$

und, wie früher,

$$D = \pm 2^e P \cdot S^2 = D' \cdot S^2,$$

so ist jedenfalls $2D_1$, weil durch alle Primfaktoren von M theilbar, auch theilbar durch alle diejenigen von D und folglich auch durch D'. Wir dürfen deshalb

$$4D_1 = D'D''$$

setzen, wenn D_1 ungerade und D' gerade ist, dagegen

$$D_1 = D'D''$$

in den übrigen Fällen. Die zu M primen Zahlen stimmen dann mit denjenigen, die es zu $2D'D''$ sind, augenscheinlich überein. Aehnlich wie in Nr. 4 des 4. Abschnittes nimmt hierdurch die Formel (30) die Gestalt an:

$$L' = \tau \cdot \sum_m \left(\frac{D'D''}{m}\right) \cdot \frac{2^{\bar{\omega}}}{m^s},$$

wo der frühere Umfang der Summation jetzt auch so gefasst werden kann, dass man über alle m zu summiren habe, welche prim sind zu $2D'D''$ und von welchen D oder auch D' quadratischer Rest ist. Eine einfache Ueberlegung führt diese Gleichung, wenn wieder q alle nicht in M aufgehende Primzahlen bezeichnet, von denen D quadratischer Rest ist, in die folgende über:

$$L' = \tau \cdot \prod_q \frac{1 + \left(\frac{D'D''}{q}\right)\frac{1}{q^s}}{1 - \left(\frac{D'D''}{q}\right)\frac{1}{q^s}}\ ^{*)},$$

*) Vergl. folgenden Abschnitt Nr. 6.

wofür man auch schreiben kann

$$L' = \tau \cdot \prod_r \frac{1 + \left(\frac{D'D''}{r}\right)\frac{1}{r^s}}{1 - \left(\frac{D''}{r}\right)\frac{1}{r^s}},$$

wenn man die Multiplikation über sämmtliche nicht in M aufgehende Primzahlen r ausdehnt, oder endlich

$$L' = \tau \cdot \prod\left(1 - \frac{1}{r^{2s}}\right) \cdot \prod \frac{1}{1 - \left(\frac{D'D''}{r}\right)\frac{1}{r^s}} \cdot \prod \frac{1}{1 - \left(\frac{D''}{r}\right)\frac{1}{r^s}}$$

$$= \tau \cdot \frac{\sum \left(\frac{D'D''}{n}\right)\frac{1}{n^s} \cdot \sum \left(\frac{D''}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\sum \frac{1}{n^2}},$$

wenn die Summationen auf alle positive, gegen $2D'D''$ prime Zahlen n ausgedehnt werden.

Aus L' erhielt man die zugehörige Reihe L durch Multiplikation mit

$$\sum \frac{\chi(n^2)}{n^{2s}},$$

eine Summe, welche hier, wo χ als ambiger Charakter vorausgesetzt also $\chi(n^2) = 1$ ist, mit $\sum \frac{1}{n^{2s}}$ identisch ist. Demnach findet sich aus der Gleichung für L' diese für L:

$$L = \tau \cdot \sum \left(\frac{D'D''}{n}\right)\frac{1}{n^s} \cdot \sum \left(\frac{D''}{n}\right)\frac{1}{n^s}. \tag{31}$$

Nun bemerke man aber, dass weder $D'D''$ noch D'' eine positive Quadratzahl sein kann. Denn das Erstere würde erfordern, dass D_1 eine solche also

$$\theta\theta' = 1, \quad \eta\eta' = 1, \quad P_1 = 1$$

sei, dass zweite hingegen, wie leicht zu erkennen, dass

$$\theta\theta' = \delta, \quad \eta\eta' = \varepsilon, \quad P_1 = P$$

sei, beide Fälle sind aber für die Formel (30) ausgeschlossen, da, wenn sie stattfänden, L mit L_0 identisch also gegen die Voraussetzung eine Reihe der ersten Art wäre. Demnach werden die beiden Summen, welche in (31) auftreten, genau

diejenigen Summen sein, welche zur Bestimmung der Classenanzahl für die beiden Determinanten $D'D''$ und D'^2D'' dienen, und werden folglich, wenn $s = 1 + \varrho$ gesetzt und ϱ der Null unendlich genähert wird, endliche von Null verschiedene Grenzwerthe haben.

Aus dieser Betrachtung folgt für alle Reihen der zweiten Art der Schluss, dass sie mit unendlich abnehmendem ϱ gegen eine endliche von Null verschiedene Grenze convergiren.

6. Wir haben nun dasselbe nachzuweisen für alle Reihen der dritten Art.

Zu diesem Zwecke denken wir uns in Gleichung (18) für K einen bestimmten Charakter gesetzt, für χ aber successive alle verschiedenen Charaktere, und addiren alle $\varphi(M)$ so entstehenden Gleichungen. Erinnert man sich der Formeln (11) und (11a) des 4. Abschnitts, so sieht man sogleich die Richtigkeit folgender Formel ein:

$$\varphi(M)\cdot\left[\sum\frac{K(C_q)+K(C_q^{-1})}{q^s}+\frac{1}{2}\sum\frac{K(C_q^2)+K(C_q^{-2})}{q^{2s}}+\cdots\right]=\sum_\chi\log\frac{L}{P}, \tag{32}$$

in welcher die erste Summe links auf alle Primzahlen q der früher bezeichneten Art auszudehnen ist, welche selbst $\equiv 1 \pmod{M}$ sind, die zweite auf alle diejenigen jener Primzahlen, deren Quadrate es sind u. s. w.

Ist $K(C)$ ein ambiger Charakter also identisch mit einer der Grössen $k(C)$, so sind in jeder der genannten Summen die beiden Charaktere einander und mit der positiven Einheit gleich, da jede Classe, durch welche Zahlen $m \equiv 1 \pmod{M}$ darstellbar sind, zum Hauptgeschlechte gehört. In diesem Falle nimmt die vorige Gleichung also die Form an:

$$2\varphi(M)\cdot\left[\sum\frac{1}{q^s}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{q^{2s}}+\cdots\right]=\sum_\chi\log\frac{L}{P}.$$

Da es aber für jedes K zwei Charaktere χ giebt, für welche zwei Reihen L identisch werden, und da für diese, nur um einen ambigen Faktor verschiedenen Charaktere χ^2 also auch P

denselben Werth hat, so kann man vorstehende Gleichung einfacher so schreiben:

$$(33) \quad \varphi(M)\cdot\Big[\sum\frac{1}{q^s}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{q^{2s}}+\cdots\Big]=\sum_{\chi}{}' \log\frac{L}{P},$$

wo man nun die Summation zur Rechten nur noch auf nicht identische L zu erstrecken hat.

Lässt man ferner in (32) K sämmtliche Charaktere annehmen und addirt alle so entstehenden h Gleichungen, so findet man mit Hilfe der Formeln (7) und (7a) folgendes Resultat:

$$(34) \quad 2h\cdot\varphi(M)\cdot\Big[\sum\frac{1}{q^s}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{q^{2s}}+\cdots\Big]=\sum_{K,\chi}\log\frac{L}{P},$$

wo links die erste Summe auf alle diejenigen der Primzahlen q bezüglich ist, welche $\equiv 1 \pmod{M}$ und durch die Hauptclasse darstellbar sind, die zweite Summe auf diejenigen, deren Quadrate diese Bedingungen erfüllen u. s. w.

Auf Grund dieser Formeln gelingt der Nachweis, den wir führen sollen, wenn wir uns noch auf den Umstand stützen, der eines besonderen Beweises bedarf, den wir aber vorläufig hier voraussetzen, dass nämlich die Reihen der dritten Art nebst ihren nach ϱ genommenen Ableitungen für alle Werthe von $\varrho > 0$ endliche, stetige Funktionen von ϱ sind. Für die mit P bezeichnete Grösse ist dasselbe nach den Grundsätzen der ersten Abschnitte unschwer zu erkennen, und da diese Grösse für $\varrho > 0$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth hat, gilt Gleiches dann auch von $\frac{L}{P}$. Da zudem dieser Quotient nach (16) einem Produkte gleich ist, dessen allgemeiner Faktor offenbar eine rationale Funktion von $\chi(q)$ mit reellen Coefficienten ist, so werden die beiden Ausdrücke $\frac{L}{P}$, $\frac{L_1}{P_1}$, welche demselben Charakter K, aber entgegengesetzten Charakteren χ, χ^{-1} entsprechen, wenn sie identisch sind, reell und gleich, wenn sie aber nicht identisch sind, im allgemeinen conjugirt imaginär sein.

Setzt man im ersteren Falle $\frac{L}{P}=f(\varrho)$, so darf man in Folge des vorausgesetzten Umstandes

$$\frac{L}{P} = f(0) + \varrho \cdot f'(\theta\varrho)$$

schreiben, wo θ ein positiver echter Bruch ist, und folglich würde, wenn $\frac{L}{P}$ für $\varrho = 0$ verschwände,

$$\frac{L}{P} = \varrho \cdot f'(\theta\varrho)$$

also

$$\log \frac{L}{P} = \log \varrho + \log \Gamma$$

sein, wo Γ bei unendlich abnehmendem ϱ endlich bleibt.

Im anderen Falle setze man

$$\frac{L}{P} = f(\varrho) + if_1(\varrho);$$

dann kann man in Folge des vorausgesetzten Umstandes schreiben:

$$\frac{L}{P} = f(0) + if_1(0) + \varrho[f'(\theta\varrho) + if_1'(\theta_1\varrho)],$$

wo θ, θ_1 positive echte Brüche sind, und daraus folgt dann

$$\frac{L_1}{P_1} = f(0) - if_1(0) + \varrho[f'(\theta\varrho) - if_1'(\theta_1\varrho)].$$

So oft demnach L mit unendlich abnehmendem ϱ gegen Null convergirt, wird

$$\frac{L}{P} = \varrho[f'(\theta\varrho) + if_1'(\theta_1\varrho)]$$

$$\frac{L_1}{P_1} = \varrho[f'(\theta\varrho) - if_1'(\theta_1\varrho)]$$

also

$$\frac{L}{P} \cdot \frac{L_1}{P_1} = \varrho^2[f'(\theta\varrho)^2 + f_1'(\theta_1\varrho)^2]$$

sein, wo der Faktor von ϱ^2 mit unendlich abnehmendem ϱ eine endliche Grenze hat. Demnach wird dann

$$\log \frac{L}{P} + \log \frac{L_1}{P_1} = 2 \log \varrho + \log \Gamma$$

sein, wo Γ bei unendlich abnehmendem ϱ endlich bleibt.

1) Dies vorausgeschickt, nehmen wir nun erstens an, dass eine Reihe L der dritten Art, welche einem ambigen Cha-

rakter K entspricht, für $\varrho = 0$ verschwinde. Wir stützen uns dann auf die Formel (33), indem wir in derselben $s = 1 + \varrho$ setzen und ϱ gegen 0 convergiren lassen. Auf der linken Seite nähern sich dann die sämmtlichen Summen endlichen Werthen, ausgenommen die erste, welche nach Nr. 6 des 4. Abschnittes über jede Grenze hinaus wächst, und somit wird die linke Seite positiv unendlich. Rechts haben wir unter den Reihen L

zunächst die Reihe L_0, aber keine ihr gleiche; das entsprechende Glied der Summe wird unendlich gross wie $-\log \varrho$;

sodann die Reihen der zweiten Art, welche gegen endliche, von Null verschiedene Grenzen convergiren; die entsprechenden Glieder zur Rechten bleiben endlich;

schliesslich Reihen der dritten Art. Hätte nun ein solches L mit unendlich abnehmendem ϱ die Null zur Grenze, so würde, da unter den Reihen zur Rechten keine identischen vorhanden sind, neben dem Ausdrucke $\frac{L}{P}$ der Ausdruck $\frac{L_1}{P_1}$, je nachdem der erste oder der zweite der zuvor unterschiedenen Fälle stattfände, nicht auftreten oder auftreten; man hätte im ersteren Falle rechts ein entsprechendes Glied $\log \frac{L}{P}$, welches unendlich gross würde wie $\log \varrho$, im zweiten Falle zwei Glieder, deren Summe $\log \frac{L}{P} + \log \frac{L_1}{P_1}$ unendlich gross würde wie $2 \log \varrho$. Tritt also ein Fall der ersteren Art genau n, ein Fall der zweiten Art genau m Mal ein, so kann die rechte Seite der Gleichung (33) gleich

$$(2m + n - 1) \log \varrho + \log \Gamma$$

gesetzt werden, wo Γ endlich bleibt, sie wird also entweder endlich bleiben oder negativ unendlich, wenn nicht m, n beide gleich Null sind. Da dies dem Verhalten der linken Seite widerspricht, müssen m, n beide Null sein, keine Reihe der dritten Art also, die einem ambigen Charakter K entspricht, kann mit ϱ zugleich verschwinden.

2) Nehmen wir zweitens an, dass eine Reihe der dritten Art, die einem nicht ambigen Charakter K entspricht, für $\varrho = 0$ verschwinde; dann stützen wir uns auf die Gleichung (34).

Auf ihrer rechten Seite finden sich genau $2^{\mu+1}$, nämlich die mit L_0 identischen Reihen von gleichem Werthe mit dem der Reihe L_0, die Summe der ihnen entsprechenden Glieder $\log\frac{L}{P}$ wird bei unendlich abnehmendem ϱ unendlich gross wie $-2^{\mu+1}\log\varrho$. Ferner finden sich die sämmtlichen Reihen der zweiten Art, denen endlich bleibende Glieder $\log\frac{L}{P}$ entsprechen. Endlich die Reihen der dritten Art, von welchen nach dem soeben Bewiesenen diejenigen, welche ambigen Charakteren K entsprechen, endlich bleibende Glieder $\log\frac{L}{P}$ liefern. Hätte nun eine Reihe der dritten Art, die einem nicht ambigen Charakter K entspricht, bei unendlich abnehmendem ϱ die Grenze Null, so würde zunächst dasselbe gelten von allen $2^{\mu+1}$ mit ihr identischen Reihen, welche dem Complexe von K entsprechen. Sei dann L_1 die Reihe, die dem entgegengesetzten Charakter K^{-1} entspricht; dem allgemeinen Ausdrucke (16) für die Reihen L zufolge hat sie nebst allen ihren identischen, dem entgegengesetzten Complexe entsprechenden $2^{\mu+1}$ Reihen den gleichen Werth wie die Reihe L und demnach auch die gleiche Grenze. Sind also die beiden entgegengesetzten Complexe verschieden von einander, so werden die entsprechenden $2^{\mu+2}$ Glieder $\log\frac{L}{P}$ auf der rechten Seite von (34) unendlich gross werden wie $\log\varrho$; sind sie beide mit einander identisch, so entsprechen ihnen zwar nur $2^{\mu+1}$ Glieder $\log\frac{L}{P}$, doch wissen wir nach der zweiten Bemerkung am Schlusse von Nr. 4, dass wenigstens noch $2^{\mu+1}$ andere Glieder vorhanden sind, für welche L denselben Werth und demnach auch dieselbe Grenze hat. Wenn also jener Fall sich m, dieser dagegen sich n Mal ereignete, so würde überhaupt die rechte Seite der Formel (34) gleich

$$2^{\mu+1}(2m+2n-1)\log\varrho+\log\Gamma$$

gesetzt werden dürfen, wo Γ bei unendlich abnehmendem ϱ endlich bleibt. Während aber die linke Seite dieser Formel wesentlich positiv bleibt, wie klein ϱ auch werde, würde hiernach die rechte Seite negativ unendlich, sobald wenig-

stens eine der Zahlen m, n von Null verschieden wäre, ein Widerspruch, aus welchem folgt, dass keine der Reihen der dritten Art die Null zur Grenze haben kann.

7. Nachdem dieser Punkt klargestellt worden ist, macht der Beweis des Dirichlet'schen Satzes keine weitere Schwierigkeit.

Wir haben die Linearform $Mx + N$ als eine primitive d. h. N als gegen M prim vorausgesetzt, dieser Zahl entspricht also für jede Wahl des Charakters χ ein bestimmter Werth $\chi(N)$ desselben. Multipliciren wir nun die Gleichung (18) mit $\chi^{-1}(N)$, wählen χ auf alle zulässige Weise und addiren die $\varphi(M)$ so entstehenden Gleichungen, so finden wir auf Grund der Formeln (11) und (11a) des 4. Abschnittes zunächst folgende Gleichung:

$$\varphi(M)\cdot\left[\sum\frac{K(C_q)+K(C_q^{-1})}{q^s}+\frac{1}{2}\sum\frac{K(C_q^2)+K(C_q^{-2})}{q^{2s}}+\cdots\right] = \sum_\chi \chi^{-1}(N)\cdot\log\frac{L}{P}, \tag{35}$$

wo die erste Summe links auf alle diejenigen der Primzahlen q bezüglich ist, welche $\equiv N \pmod{M}$ sind, die zweite auf alle diejenigen, deren Quadrate es sind u. s. w. Nun sei C eine beliebig gewählte Classe; multipliciren wir vorstehende Gleichung mit $K(C)$, wählen K auf alle zulässige Weise und addiren die so entstehenden h Gleichungen. Beachten wir hierbei, dass, wenn C' irgend eine Classe und C'^{-1} die entgegengesetzte bezeichnet, nach (7) und (7a) die Summen

$$\sum_K K(C)\,K(C'), \qquad \sum_K K(C)\,K(C'^{-1})$$

beide verschwinden, wenn weder CC'^{-1} noch $C'C'$ die Hauptclasse d. h. wenn C von C' und von C'^{-1} verschieden ist, dass dagegen eine jener Summen gleich h, die andere Null wird, wenn C mit einer jener Classen übereinstimmt, und endlich beide Summen den Werth h haben, wenn C sowohl mit C' als mit C'^{-1} übereinstimmt also ambige ist. Mit Rücksicht hierauf führt dann die angegebene Addition zur folgenden Formel:

$$c \cdot h \cdot \varphi(M) \cdot \left[\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{q^{2s}} + \cdots \right] = \sum_{K,\chi} \chi^{-1}(N) K(C) \cdot \log \frac{L}{P}, \tag{36}$$

in welcher $c = 2$ oder $c = 1$ ist, je nachdem C eine ambige Classe ist oder nicht, während die erste Summe links auf alle diejenigen der Primzahlen q bezüglich ist, welche $\equiv N \pmod{M}$ und durch die Classe C darstellbar sind, die zweite auf alle diejenigen, deren Quadrate diese Bedingungen erfüllen, u. s. w.

In der so gewonnenen Gleichung setzen wir nun $s = 1 + \varrho$ und lassen ϱ unendlich klein werden. Rechts bleiben dabei, dem vorher Bewiesenen zufolge, sämmtliche L zweiter und dritter Art von Null verschieden und geben endliche Glieder, die 2^{n+1} Reihen aber, welche mit L_0 identisch sind, geben zusammengenommen ein Glied von der Form

$$\log L_0 \cdot \sum_{K,\chi}{}' \chi^{-1}(N) \cdot K(C),$$

wo die Summation über alle ambigen Charaktere K d. h., wenn n irgend eine durch die Classe C darstellbare zu $2D$ prime Zahl bedeutet, über alle Werthe

$$K(C) = \theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{Q}\right)$$

und über die beiden zugehörigen ambigen Charaktere

$$\chi^{-1}(N) = \chi(N) = \theta^{\frac{N-1}{2}} \eta^{\frac{N^2-1}{8}} \left(\frac{N}{Q}\right)$$

und

$$\chi^{-1}(N) = \chi(N) = (0\delta)^{\frac{N-1}{2}} (\eta\varepsilon)^{\frac{N^2-1}{8}} \left(\frac{N}{PQ}\right)$$

erstreckt werden muss; der Faktor von $\log L_0$ lässt sich daher schreiben:

$$\left[1 + \delta^{\frac{N-1}{2}} \varepsilon^{\frac{N^2-1}{8}} \left(\frac{N}{P}\right)\right] \cdot \sum \theta^{\frac{nN-1}{2}} \eta^{\frac{(nN)^2-1}{8}} \left(\frac{nN}{Q}\right),$$

wenn man die Summe auf alle, den ambigen Charakteren entsprechenden Werthsysteme θ, η, Q ausdehnt.

Ist folglich N mit den Geschlechtscharakteren der Classe C verträglich, d. h. finden die Gleichungen statt

$$\varphi'(N) = \varphi'(n), \quad \varphi''(N) = \varphi''(n), \ldots \psi'(N) = \psi'(n), \ldots,$$

so ist zunächst

$$\delta^{\frac{N-1}{2}} \varepsilon^{\frac{N^2-1}{8}} \left(\frac{N}{P}\right) = 1$$

und die sämmtlichen Grössen

$$\varphi'(nN), \quad \varphi''(nN), \ldots \psi'(nN), \ldots$$

sind der positiven Einheit gleich. Ferner ist dann die Summe

$$\sum \theta^{\frac{nN-1}{2}} \eta^{\frac{(nN)^2-1}{8}} \left(\frac{nN}{Q}\right)$$

zufolge der Schlussbemerkung von Nr. 2 gleich dem Produkte

$$\tfrac{1}{2}\left(1 + \varphi'(nN)\right)\left(1 + \varphi''(nN)\right)\cdots\left(1 + \psi'(nN)\right)\cdots.$$

Der Faktor von $\log L_0$ wird mithin $2^{\mu+1}$. In diesem Falle enthält demnach die rechte Seite der Gleichung (36) das Glied $2^{\mu+1}\log L_0$ und wird mit ihm für $\varrho = 0$ unendlich gross wie $-2^{\mu+1}\log\varrho$; die linke Seite muss folglich auch, wenn ϱ gegen Null convergirt, über alle Grenze hinaus wachsen, und da die Summen von der zweiten an dabei endlichen Grenzen sich nähern, muss die erste Summe unendlich werden also auch aus einer unendlichen Menge von Gliedern bestehen. Die Anzahl der Primzahlen q, welche von der Linearform $Mx + N$ und durch eine Form der Classe C darstellbar sind, ist also unendlich gross, was bewiesen werden sollte. —

8. Damit die vorstehende Beweisführung aber ohne jedes Bedenken bleibt, ist nun der Umstand noch zu beweisen, den wir bisher vorausgesetzt haben: dass die Reihen der dritten Art — und die der zweiten verhalten sich gleichermassen — für $\varrho > 0$ endliche und stetige Funktionen von ϱ sind mit ebensolchen Differentialquotienten. Es ist dies gerade die anfangs erwähnte Lücke in der Darstellung, welche Dirichlet von seiner bezüglichen Arbeit gegeben hat, und die Abhandlung von Weber ist hauptsächlich dazu bestimmt, sie in dem Umfange, wie seine Aufgabe erheischte, zu erledigen; ihre Aus-

füllung in dem weiteren Umfange der hier behandelten Aufgabe aber ist von A. Meyer im wesentlichen auf die Weberschen Resultate zurückgeführt worden. Leider jedoch stützt sich nicht nur der so gewonnene Nachweis theilweise auf ein sehr hoch liegendes Gebiet der Analysis, auf die Transformationslehre der Thetafunktionen von zwei Veränderlichen, sondern er ist auch ausserordentlich umständlich, sodass der Wunsch nicht ungerechtfertigt ist, er möge durch einen einfacheren ersetzt werden können; und so müssen wir uns damit begnügen, die Hauptpunkte desselben hier zu entwickeln, den Leser, der für seine Einzelheiten ein Interesse hat, auf die Originalarbeiten verweisend.

Gehen wir aus von der Summe

$$(37) \qquad \sum{}' \frac{1}{f^s} = \sum{}' \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s},$$

in welcher die Summation auf alle ganzzahligen x, y bezogen sei, welche der quadratischen Form f einen positiven, zu $2D$ primen Werth ertheilen und im Falle $D > 0$ den bekannten Ungleichheiten unterliegen:

$$(37\,a) \qquad y \gtrless 0, \quad x > \frac{T - bU}{aU} y = \gamma y.$$

Setzt man $s = \sigma + s'$, wo σ beliebig wenig über der Einheit liegt, so kann man schreiben:

$$\sum{}' \frac{1}{f^s} = \sum{}' \frac{\alpha}{f^{s'}},$$

wo nun $\sum{}' \alpha = \sum{}' \frac{1}{f^\sigma}$ endlich ist. Mithin ist (37) für jedes $s > \sigma$ d. i. offenbar für jedes $s > 1$ nach Nr. 5 des 3. Abschnitts eine stetige Funktion von s, welche einen gleichfalls für jedes $s > 1$ stetigen Differentialquotienten

$$-\sum{}' \frac{\log f}{f^s}$$

besitzt. Auch wissen wir, dass

$$\varrho \cdot \sum{}' \frac{1}{f^{1+\varrho}}$$

bei unendlicher Abnahme von ϱ gegen einen endlichen

Werth g convergirt, der für alle Formen f derselben Determinante der gleiche ist. Setzen wir hiernach

$$\sum' \frac{1}{f^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho} = \Phi(\varrho)$$

und

$$-\sum' \frac{\log f}{f^{1+\varrho}} + \frac{g}{\varrho^2} = \Phi'(\varrho),$$

so handelt es sich in erster Linie darum, nachzuweisen, dass $\Phi(\varrho)$ und $\Phi'(\varrho)$ bei unendlicher Abnahme von ϱ endlich bleiben. Wir wollen dies nach Weber für den ersteren Ausdruck zeigen, für den zweiten geschieht es durch genau entsprechende Betrachtungen.

Wir dürfen zuvörderst die quadratische Form so wählen, dass a positiv und prim zu $2D$, b aber theilbar durch D und im Falle eines ungeraden D ungerade ist, sodass dann c gleichfalls theilbar durch D aber stets gerade ist. In der That, wären b, c in der Form (a, b, c) nicht so beschaffen, so könnte eine Zahl b' durch die Congruenzen

$$b' \equiv b \pmod{a}, \quad b' \equiv 0 \pmod{D}$$

bestimmt werden, denen sich, wenn D ungerade ist, die dritte

$$b' \equiv 1 \pmod{2}$$

hinzufügen lässt, sodass dann b' eine ungerade durch D theilbare Zahl wird; wegen der Congruenz (mod. a) findet sich $b'^2 \equiv b^2 \equiv D \pmod{a}$, also aus der Gleichung $b'^2 - D = ac'$ ein durch D theilbarer stets gerader Werth für c'; die Form (a, b', c') wäre aber der Form (a, b, c) äquivalent und dürfte statt ihrer gewählt werden. — Bei solcher Wahl der quadratischen Form kommt die bei der Summe (37) geltende Beschränkung der Zahlen x, y, wonach f prim sein sollte zu $2D$, offenbar darauf hinaus, dass x prim zu wählen ist gegen $2D$.

Dies vorausgeschickt, denken wir uns einmal im Gegentheil die Summe

$$\sum' \frac{1}{f^{1+\varrho}}$$

auf sämmtliche ganzzahlige x erstreckt, für welche, falls $D > 0$ ist, $x > \gamma y$ ist. Die Glieder dieser Summe lassen sich dann in Gruppen fassen, je nach dem grössten gemeinsamen

Theiler von x und $2D$, sodass, wenn d sämmtliche Theiler von $2D$ bedeutet,

$$\sum_{\substack{(x>\gamma y)}} \frac{1}{(x,y)^{1+\varrho}} = \sum_{d} \left(\sum_{\substack{(dx>\gamma y)}}' \frac{1}{(dx,y)^{1+\varrho}} \right)$$

wird, falls man zur Abkürzung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y)$$

setzt und durch ein Σ ohne Accent eine Summation bezeichnet, bei welcher x alle mit der für den Fall einer positiven Determinante hinzugefügten Ungleichheit verträglichen ganzen Zahlen, durch das Σ' mit Accent eine solche, bei der x nur die zu $\frac{2D}{d}$ primen, mit der beigefügten Ungleichheit verträglichen ganzen Zahlen durchläuft. Ebenso ist, wenn rechts nur über die zu $\frac{2D}{d\delta}$ primen x summirt wird,

$$\sum_{\substack{(dx>\gamma y)}} \frac{1}{(dx,y)^{1+\varrho}} = \sum_{\delta} \left(\sum_{\substack{(d\delta x>\gamma y)}}' \frac{1}{(d\delta x,y)^{1+\varrho}} \right),$$

wobei d irgend einen Theiler von $2D$ und δ alle Theiler von $\frac{2D}{d}$ bedeutet. Nach dem Umkehrungsprincipe, welches wir in Nr. 4 des folgenden Abschnittes erörtern werden, findet sich hieraus unter Anwendung der dort eingeführten Funktion $\mu(n)$ sogleich die Beziehung:

$$(38) \qquad \sum_{\substack{(x>\gamma y)}}' \frac{1}{(x,y)^{1+\varrho}} = \sum_{d} \left(\mu(d) \cdot \sum_{\substack{(dx>\gamma y)}} \frac{1}{(dx,y)^{1+\varrho}} \right),$$

wo die Summation nach d auf sämmtliche Theiler d von $2D$ erstreckt werden muss. Hier ist

$$(dx, y) = a \cdot d^2x^2 + 2b \cdot dxy + c \cdot y^2 = d^2 \cdot a(x - \alpha' y)(x - \beta' y)$$

und die beigefügte Ungleichheit $dx > \gamma y$ mit

$$x > \gamma' y$$

identisch, wenn α, β dieselben Werthe bezeichnen, wie in Nr. 3 des 5. Abschnittes und

$$\alpha' = \frac{\alpha}{d}, \quad \beta' = \frac{\beta}{d}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{d}$$

gesetzt wird, so dass

$$\alpha' < \beta' < \gamma'$$

ist. Lässt sich also zeigen, dass

$$\sum \frac{1}{[a(x-\alpha' y)(x-\beta' y)]^{1+\varrho}} - \frac{g'}{\varrho} \tag{39}$$

für irgend einen constanten von der Classe, zu der die Form (a, b, c) gehört, unabhängigen Werth g' bei unendlich abnehmendem ϱ endlich bleibt, so wird vermöge der Gleichung (38) der Nachweis für die Differenz $\Phi(\varrho)$ und für eine gewisse Constante g, die dann keine andere sein kann, als die oben angezeigte, gleichfalls erbracht sein.

Nennen wir $a(x-\alpha' y)(x-\beta' y)$ kurz $\psi(x,y)$, benutzen die bekannte Formel

$$\int_0^\infty e^{-t\psi} t^\varrho dt = \frac{\Gamma(1+\varrho)}{\psi^{1+\varrho}}$$

und setzen

$$J_\varrho = \int_0^\infty t^\varrho \, dt \cdot \sum e^{-t\psi(x,y)}, \tag{40}$$

wo die Summe in gleicher Bedeutung zu nehmen ist wie zuvor, so genügt es, wie unschwer zu erkennen, wenn man, statt für den Ausdruck (39), für den Ausdruck

$$J_\varrho - \frac{g'}{\varrho}$$

den Nachweis beibringt, dass er bei unendlich abnehmendem ϱ endlich bleibt. Hierbei muss man aber die Fälle einer positiven und negativen Determinante unterscheiden.

Ist 1) $D < 0$ und

$$\theta(t) = \sum e^{-t\psi(x,y)},$$

wo die Summation auf alle ganzzahligen x, y bezüglich ist, ausgenommen $x = y = 0$, so lässt sich aus einer Rosenhain'schen Formel, die der Transformationslehre der Thetafunktionen zweier Veränderlichen angehört, die Beziehung entnehmen:

$$\theta(t) = -1 + \frac{g'}{t} + \frac{g'}{t} \cdot \theta\left(\frac{g'^2}{t}\right),$$

wo $g' = \frac{\pi}{\sqrt{-D}}$ ist, und mit ihrer Hilfe

$$J_\varrho = \int_0^\infty \theta(t)\, t^\varrho dt \tag{40}$$

in die Form bringen

$$J_\varrho = g'^{1+\varrho}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{1+\varrho} + \int_1^\infty \theta(g't)\,(t^\varrho + t^{-1-\varrho})\,dt\right),$$

wo die Integrale, wie einfach zu übersehen ist, endliche und stetige Funktionen von ϱ sind; man findet demnach

$$\lim_{\varrho=0}\left(J_\varrho - \frac{g'}{\varrho}\right) = \log g' - g' + g'\int_1^\infty \theta(g't)\cdot\left(1 + \frac{1}{t}\right)dt$$

d. i. gleich einem endlichen Werthe.

Ist 2) $D > 0$, so ist

$$\theta(t) = \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x>\gamma' y} e^{-t\alpha(x-\alpha' y)(x-\beta' y)}, \tag{41}$$

während $\alpha' < \beta' < \gamma'$ ist. Da, wenn y einen festen Werth bedeutet, die Funktion

$$e^{-t\alpha(x-\alpha' y)(x-\beta' y)}$$

mit wachsendem x abnimmt, und die Funktion

$$\varphi(y) = \int_{\gamma' y}^{x} e^{-t\alpha(x-\alpha' y)(x-\beta' y)}\,dx = \int_0^\infty e^{-t\alpha\left(x+(\gamma'-\alpha')y\right)\left(x+(\gamma'-\beta')y\right)}\cdot dx$$

eine mit wachsendem y gleichfalls abnehmende Funktion ist, so lässt sich die Doppelsumme (41) mittels des Doppelintegrales

$$\int_0^\infty\int_{\gamma' y}^{x} e^{-t\alpha(x-\alpha' y)(x-\beta' y)}\cdot dx\,dy,$$

dessen Werth ohne Mühe gleich

$$\frac{1}{2t\alpha(\beta'-\alpha')}\log\frac{\gamma'-\alpha'}{\gamma'-\beta'}$$

gefunden wird, in Grenzen schliessen:

$$\theta(t) < \frac{g'}{t} + \int_0^\infty e^{-tax^2}\,dx + \sum_{y=0}^{\infty} e^{-tay^2(\gamma'-\alpha')(\gamma'-\beta')}$$

$$\theta(t) > \frac{g'}{t} - \sum_{y=0}^{\infty} e^{-tay^2(\gamma'-\alpha')(\gamma'-\beta')};$$

hierbei steht g' zur Abkürzung für die — wie durch Substitution der Werthe für α', β', γ' sogleich einzusehen — nur von der Determinante D abhängige Constante

$$\frac{1}{2a\sqrt{(\beta'-\gamma')}} \cdot \log\frac{\gamma'-\alpha'}{\gamma'-\beta'}.$$

Da nach bekannter Formel

$$\int_0^\infty e^{-tax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{ta}},$$

die auf y bezügliche Summe aber eine Thetareihe ist, welche mittels der im 7. Abschnitte hergeleiteten Transformationsgleichung in die Gestalt

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}\sqrt{a(\gamma'-\alpha')(\gamma'-\beta')}} \cdot \vartheta\left(\frac{\pi^2}{ta(\gamma'-\alpha')(\gamma'-\beta')}\right) + \frac{1}{2}$$

gebracht werden kann, darf man statt obiger Ungleichheiten die folgende Gleichung setzen:

$$\theta(t) = \frac{g'}{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \Phi(t), \tag{42}$$

in welcher $\Phi(t)$ für jedes positive endliche t, z. B. für alle Werthe von t von 0 bis 1, in zwei endliche Grenzen eingeschlossen bleibt.

Andererseits wird, wenn λ kleiner ist, als der kleinste positive Werth, den $\psi(x,y)$ für die ganzzahligen x, y annehmen kann, nicht nur die Funktion $\theta(t)$ selbst, sondern auch noch das Produkt $e^{\lambda t}\theta(t)$ eine mit wachsendem t unendlich abnehmende Funktion sein, sodass, wenn

$$\theta(t) = e^{-\lambda t}\,\Psi(t) \tag{43}$$

gesetzt wird, für alle $t > 1$ die Funktion $\Psi(t)$ zwischen den Grenzen 0 und $e^{\lambda}\theta(1)$ verbleibt.

Zerlegt man demnach in (40) das Integrationsintervall in die Theile 0 bis 1 und 1 bis ∞, und ersetzt $\theta(t)$ in diesen

Theilintervallen bezüglich durch die Ausdrücke (42) und (43), so erhält man

$$J_\varrho = \int_0^1 \Big(\frac{g'}{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\,\Phi(t)\Big)\, t^\varrho\, dt + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\,\Psi(t)\, t^\varrho\, dt$$

d. i.

$$J_\varrho = \frac{g'}{\varrho} + \int_0^1 \Phi(t)\, t^{\varrho - \frac{1}{2}}\, dt + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\,\Psi(t)\, t^\varrho\, dt.$$

Nun ist das letzte Integral wieder für jedes positive und negative ϱ, das erste für jeden Werth von $\varrho > -\frac{1}{2}$ endlich und stetig, und somit findet sich sogleich

$$\lim_{\varrho = 0} \Big(J_\varrho - \frac{g'}{\varrho}\Big) = \int_0^1 \Phi(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\,\Psi(t)\, dt$$

d. i. gleich einem endlichen Werthe, w. z. b. w.

9. Nachdem dieser erste Punkt erledigt worden, betrachten wir nun für irgend einen Werth des Charakters χ die Summe

$$\sum \frac{\chi(f)}{f^{1+\varrho}},$$

auf alle ganzzahligen x, y erstreckt, welche der Form

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y)$$

einen gegen M primen Werth verleihen und für den Fall einer positiven Determinante die Ungleichheiten (37a) erfüllen. Diese Systeme x, y können, wie in Nr. 3 des 6. Abschnittes, in eine endliche Anzahl von Gruppen vertheilt werden, wobei die Systeme derselben Gruppe die Form haben:

$$x = Mv + \xi, \qquad y = Mw + \eta,$$

während ξ, η gewisse nicht negative ganze Zahlen $< M$ bedeuten. Da hiernach für alle Systeme derselben Gruppe

$$(x, y) \equiv (\xi, \eta) \pmod{M}$$

ist, so wird

$$(44) \qquad \sum \frac{\chi(x, y)}{(x, y)^{1+\varrho}} = \sum_{\xi, \eta} \chi(\xi, \eta) \sum_{v, w} \frac{1}{(Mv + \xi,\ Mw + \eta)^{1+\varrho}},$$

und die für den Fall einer positiven Determinante hinzuzufügenden Ungleichheiten nehmen die Gestalt an

$$(37\,\mathrm{b}) \qquad w > 0, \quad Mv + \xi > \gamma(Mw + \eta).$$

Die letzte Summe in der vorstehenden Gleichung kann durch diese andere ersetzt werden:

$$\frac{1}{M^{2+2\varrho}} \cdot \sum_{v,w} \frac{1}{(v+\xi_0, w+\eta_0)^{1+\varrho}},$$

wenn

$$\frac{\xi}{M} = \xi_0, \qquad \frac{\eta}{M} = \eta_0$$

gesetzt wird.

Lässt sich nun zeigen, dass der Unterschied

$$\sum_{v,w} \frac{1}{(v+\xi_0, w+\eta_0)^{1+\varrho}} - \sum{}' \frac{1}{(x,y)^{1+\varrho}}$$

$$(w>0, v+\xi_0>\gamma(w+\eta_0)) \quad (y>0, x>\gamma y)$$

mit unendlich abnehmendem ϱ sich einer endlichen Grenze nähert, so muss für denselben Werth der Constanten g, welcher in der voraufgehenden Betrachtung galt,

$$\sum_{v,w} \frac{1}{(v+\xi_0, w+\eta_0)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho}$$

sowie auch

$$\frac{1}{M^{2+2\varrho}} \cdot \sum_{v,w} \frac{1}{(v+\xi_0, w+\eta_0)^{1+\varrho}} - \frac{g}{M^2\varrho}$$

eine Funktion von ϱ sein, die bei unendlich abnehmendem ϱ endlich bleibt, und demnach gilt mit Rücksicht auf (44) dasselbe auch für die Differenz

$$(45) \qquad \mathrm{X}(\varrho) = \sum \frac{\chi(x,y)}{(x,y)^{1+\varrho}} - \frac{g}{M^2\varrho} \cdot \sum_{\xi,\eta} \chi(\xi,\eta).$$

In welcher Weise jener Beweis gewonnen wird, bei welchem wieder die Fälle einer positiven und einer negativen Determinante auseinandergehalten werden müssen, dies weiter auseinanderzusetzen müssen wir uns hier versagen, vielmehr den Leser auf die Meyer'sche Abhandlung selbst verweisen. Nachdem er geliefert, handelt es sich allein noch um die Bestimmung der auf alle zulässigen Systeme ξ, η bezogenen Summe

$$\sum_{\xi,\,\eta} \chi(\xi, \eta) \cdot$$

Es wird daselbst gezeigt, dass diese Summe immer verschwindet, ausgenommen, wenn χ mit einem der ambigen Classencharaktere K' übereinstimmt, in welchem Falle

$$(46) \quad \sum_{\xi,\,\eta} \chi(\xi, \eta) = K'(C) \cdot M\varphi(M) \cdot \prod_{p} \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right)$$

ist, wenn C die Classe bezeichnet, zu welcher die Form

$$(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

gehört, und das Produkt auf alle Primfaktoren p von M bezogen wird, welche nicht in $2D$ aufgehen.

Für solchen Charakter χ geht hiernach aus (45) folgende Gleichung hervor:

$$(47\,\text{a}) \qquad \sum \frac{\chi(f)}{f^{1+\varrho}} = \frac{g \cdot \mathsf{M}}{\varrho} K'(C) + \mathsf{X}(\varrho),$$

wo M zur Abkürzung steht für das Produkt

$$\frac{\varphi(M)}{M} \cdot \prod_{p} \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right)$$

und die Constante g, wie hervorzuheben ist, nur von der Determinante D abhängig also für jede der Formen f dieselbe ist;

für jeden andern Charakter χ ist einfacher

$$(47\,\text{b}) \qquad \sum \frac{\chi(f)}{f^{1+\varrho}} = \mathsf{X}(\varrho).$$

Diese Betrachtung gilt aber für jede der Summen, aus denen die Reihe L zusammengesetzt ist, und demnach wird man folgende Formel erhalten:

im Falle der Gleichung (47a)

$$L = \frac{g\mathsf{M}}{\varrho} \cdot \sum_{C} K(C)\, K'(C) + \sum_{C} K(C)\, \mathsf{X}_C(\varrho),$$

im Falle der Gleichung (47b)

$$L = \sum_{C} K(C)\, \mathsf{X}_C(\varrho),$$

wo die Funktionen $\mathsf{X}(\varrho)$, die den verschiedenen in L auftretenden Formen f entsprechen, durch den Index C, welcher die zugehörige Classe bezeichnet, unterschieden worden sind.

Nun verschwindet aber nach Formel (6) die Summe

$$\sum_C K(C)\, K'(C),$$

wenn nicht $K(C)\, K'(C)$ dem Hauptcharakter, d. h. da $K(C)$ ein ambiger Charakter ist, wenn nicht $K(C) = K'(C) = \chi(f)$ und folglich L eine Reihe der ersten Art ist. Für jede Reihe L der zweiten oder dritten Art ergiebt sich also

$$L = \sum_C K(C)\, \mathsf{X}_C(\varrho)$$

d. h. sie sind stetige Funktionen der positiven Veränderlichen ϱ, welche bei unendlich abnehmendem ϱ gegen eine endliche Grenze convergiren.

Für ihre nach ϱ genommenen Differentialquotienten kann derselbe Umstand auf ganz analoge Weise hergeleitet werden, wenn man statt der Summe

$$\sum' \frac{\chi(f)}{f^{1+\varrho}}$$

die Summe

$$-\sum' \frac{\chi(f)\, \log f}{f^{1+\varrho}}$$

der Betrachtung zu Grunde legt*).

*) Zu diesem Abschnitte sei noch bemerkt, dass der Dirichletsche Satz schon von Schering bewiesen worden ist (s. seine Abh.: Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen, Göttingen 1869 S. 5), sein Beweis ist aber niemals veröffentlicht worden.

Elfter Abschnitt.

Zahlentheoretische Funktionen.

1. Ist $F(n)$ eine Grösse, welche für jeden ganzzahligen Werth von n oder auch nur für alle ganzzahligen Werthe von näher bestimmter Art einen bestimmten Werth hat, so heisst sie eine zahlentheoretische Funktion. Wir sind solchen zahlentheoretischen Funktionen in den vorigen Abschnitten schon mehrfach begegnet, z. B. zählen dahin die Summe aller Theiler einer Zahl, sowie auch die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl durch die quadratischen Formen einer gegebenen Determinante, u. a. m. Die Untersuchung dieser zahlentheoretischen Funktionen und ihres Zusammenhangs unter einander bildet ein besonderes, weites Gebiet der Wissenschaft, das von höchstem Interesse, aber noch längst nicht genügend durchforscht ist*); gleichwohl sind es gerade die analytischen Methoden, welche auch auf diesem Gebiete schon manches interessante Ergebniss geliefert haben, und so wollen wir diesen Abschnitt der Darstellung einiger der wichtigsten Untersuchungen widmen, welche sich auf diesen Gegenstand beziehen.

Wir nehmen dabei unsern Ausgang von einem sehr einfachen Satze der Combinationslehre. Sind nämlich

$$p, p', p'', \ldots \tag{1}$$

irgend welche Elemente in beliebiger Anzahl, so ist stets die

*) Vielleicht nicht mit Unrecht spricht Césaro in seiner später näher bezeichneten Abhandlung die Meinung aus: pour nous l'avenir de l'arithmétique est dans une habile combinaison de fonctions habilement choisies.

Anzahl all' ihrer Combinationen in *gerader* Menge (zu denen auch der Fall gerechnet wird, wo gar kein Element genommen wird) gleich der Anzahl all' ihrer Combinationen in *ungerader* Menge. Denn, ist ϖ die Anzahl der Elemente, so ist die erstere Anzahl

$$1 + \frac{\varpi(\varpi-1)}{1\cdot 2} + \frac{\varpi(\varpi-1)(\varpi-2)(\varpi-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

die zweite Anzahl

$$\frac{\varpi}{1} + \frac{\varpi(\varpi-1)(\varpi-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

und beider Unterschied nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1-1)^{\varpi} = 0.$$

Auf diesem Satze beruht es, dass, welche Zahlen die Zeichen (1) auch bedeuten, in dem entwickelten Produkte

$$(2) \qquad (1-p)(1-p')(1-p'')\ldots$$

die Anzahl der positiven Glieder gleich der Anzahl der negativen ist.

Versteht man nun unter den Elementen (1) verschiedene Primzahlen und setzt dann

$$(3) \qquad P = p\,p'\,p''\ldots,$$

so sind die Glieder des entwickelten Produktes (2) die sämmtlichen Theiler von P, die positiven diejenigen Theiler, welche aus einer geraden, die negativen diejenigen Theiler, welche aus einer ungeraden Menge verschiedener Primfaktoren zusammengesetzt sind.

Wir führen hier eine Funktion ein, die, soviel ich sehe, zuerst von Mertens benutzt worden ist*) und sich bei diesen Untersuchungen als sehr bequem erweist. Wir verstehen nämlich unter $\mu(n)$ die positive oder die negative Einheit, je nachdem n das Produkt aus einer geraden oder aus einer ungeraden Menge verschiedener Primfaktoren ist, wobei wir die Zahl 1 stets zur *ersteren* Kategorie zählen; dagegen setzen wir $\mu(n) = 0$, so oft

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 77 p. 289 „Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie".

n gleiche Primfaktoren, also noch ausser der Eins *quadratische* Theiler enthält.

Aus den voraufgeschickten Bemerkungen folgt dann sofort

$$\sum \mu(d) = 0,$$

wenn diese Summe auf alle Theiler d von P ausgedehnt wird. Setzt man aber

$$N = p^{\alpha}\, p'^{\alpha'}\, p''^{\alpha''} \ldots, \tag{4}$$

so gehören die Theiler von P auch zu denen von N, alle übrigen Theiler d von N aber haben wenigstens zwei gleiche Primfaktoren, für sie also ist $\mu(d) = 0$. Demnach dürfen wir offenbar den allgemeinen Satz aussprechen: Es ist

$$\sum \mu(d) = 0, \tag{5}$$

wenn die Summation über alle Theiler einer von 1 verschiedenen Zahl N, sie selbst und die Einheit unter den Theilern mitgerechnet, erstreckt wird.

2. Auf dieser fundamentalen Eigenschaft der Funktion $\mu(n)$ beruht ein Umkehrungsprincip, welches die mannigfaltigsten Anwendungen gestattet, und aus dem wir hier eine ganze Reihe von Folgerungen herleiten werden.

Seien $f(n)$, $F(n)$ zwei zahlentheoretische Funktionen, welche mit einander in der Art verbunden sind, dass für jede positive ganze Zahl n die Gleichung stattfindet

$$f(n) = F(n) + F(2n) + F(3n) + \cdots$$

abgekürzt:

$$f(n) = \sum_k F(kn), \tag{6}$$

mit anderen Worten, nehmen wir an, es beständen die Gleichungen

$$\begin{array}{lllllllll}
f(1) = & F(1) + & F(2) + & F(3) + & F(4) + & F(5) + & F(6) + \cdots \\
f(2) = & & F(2) & & + F(4) & & + F(6) + \cdots \\
f(3) = & & & F(3) & & & + F(6) + \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Hieraus folgt dann

$$(7) \qquad \sum_n \mu(n) f(n) = \sum_{k,n} \mu(n) F(kn),$$

wo rechts eine Doppelsumme steht, welche auf alle positiven ganzen Werthe sowohl von k als von n sich bezieht. Demnach bedeutet auch kn jede positive ganze Zahl m, und wenn man alle Glieder der Doppelsumme zusammenfasst, in denen $kn = m$ ist, erhält man rechts die einfache Summe

$$\sum_m C_m \cdot F(m),$$

wo $C_m = \sum_n \mu(n)$, ausgedehnt über alle Theiler n von m, und folglich $C_m = 0$ ist, ausser wenn $m = 1$ ist, wo $C_m = 1$ gefunden wird. Dadurch nimmt die Gleichung (7) die Gestalt an:

$$(8) \qquad F(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot f(n),$$

und diese Gleichung stellt das Umkehrungsprincip vor Augen.

Setzen wir im besonderen voraus, dass die Funktionen $f(n)$, $F(n)$ nur dann einen von Null verschiedenen Werth haben, wenn n nicht grösser ist als eine gegebene positive ganze Zahl N, so nimmt die letzte Formel die einfachere Gestalt an:

$$(8\,\text{a}) \qquad F(1) = \sum_{n=1}^{N} \mu(n) \cdot f(n).$$

Als erste Anwendung dieses Princips wollen wir die vier Sätze entwickeln, welche zuerst von Lipschitz*) ausgesprochen worden sind.

1) Sei x ein positiver Werth ≥ 1 und $\varepsilon(z) = 1$, wenn $z \geq 1$, dagegen $\varepsilon(z) = 0$, wenn $z < 1$ ist. Steht ferner $[x]$ zur Abkürzung für die Funktion $E(x)$, welche das grösste in x enthaltene Ganze bezeichnet, so ist offenbar

*) Lipschitz in den Comptes Rendus der Pariser Akademie v. J. 1879 p. 948.

$$\left[\frac{x}{1}\right] = \varepsilon\left(\frac{x}{1}\right) + \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) + \varepsilon\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots,$$

eine Reihe, welche nur soweit fortzusetzen ist, als das Argument von ε noch > 1 ist; und allgemeiner ist

$$\left[\frac{x}{n}\right] = \varepsilon\left(\frac{x}{n}\right) + \varepsilon\left(\frac{x}{2n}\right) + \varepsilon\left(\frac{x}{3n}\right) + \cdots.$$

Versteht man also unter den oben mit $f(n)$, $F(n)$ bezeichneten Funktionen resp. $\left[\frac{x}{n}\right]$ und $\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)$, so ergiebt sich nach dem Umkehrungsprincip sogleich die Formel

$$1 = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \cdot \left[\frac{x}{n}\right]. \tag{9}$$

2) Sei $T(n)$ die Anzahl aller Theiler von n und

$$\tau(N) = \sum_{k=1}^{N} T(k). \tag{10}$$

Diese Gleichung lässt sich zunächst nach Dirichlet folgendermassen umformen. Alle Theiler der Zahlen $1, 2, 3, \ldots N$ sind selbst Zahlen dieser Reihe, und umgekehrt zählt jede Zahl k dieser Reihe auch zu den Theilern, sie zählt aber genau so oft, als es Vielfache von k in derselben giebt, d. h. $\left[\frac{N}{k}\right]$ mal. Hiernach wird offenbar

$$\tau(N) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{N}{k}\right]. \tag{10a}$$

Nun ist

$$\frac{N}{k} = \left[\frac{N}{k}\right] + \frac{r}{k}, \qquad (0 < r < k);$$

bedeutet also N das grösste Ganze, welches in x enthalten ist,

$$N = [x] \quad \text{d. h.} \quad x = N + \varrho \quad (0 < \varrho < 1),$$

so ist

$$\frac{x}{k} = \frac{N}{k} + \frac{\varrho}{k} = \left[\frac{N}{k}\right] + \frac{r+\varrho}{k},$$

wo $\frac{r+\varrho}{k}$ noch kleiner ist als 1, und demnach findet sich

$$\left[\frac{x}{k}\right] = \left[\frac{N}{k}\right],$$

eine Formel, aus welcher, wenn x durch $\frac{x}{n}$ ersetzt wird, die folgende hervorgeht:

$$\left[\frac{x}{kn}\right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{n}\right]}{k}\right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{k}\right]}{n}\right]. \tag{11}$$

Man erhält daher aus (10a) die allgemeinere, für jeden positiven Werth von x giltige Formel

$$\tau[x] = \sum_{k=1}^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] \tag{12}$$

und

$$\tau\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \left[\frac{x}{kn}\right]; \tag{12a}$$

und wenn demnach unter den Zeichen $f(n)$, $F(n)$ resp. die Funktionen $\tau\left[\frac{x}{n}\right]$ und $\left[\frac{x}{n}\right]$ verstanden werden, so ergiebt sich mittels des Umkehrungsprincipes ohne weiteres die Formel

$$[x] = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \cdot \tau\left[\frac{x}{n}\right]. \tag{13}$$

3) Nunmehr sei $S(n)$ die Summe aller Theiler von n und

$$\sigma(N) = \sum_{k=1}^{N} S(k). \tag{14}$$

Da dem zuvor Bemerkten gemäss in dieser Summe jede Zahl k der Reihe $1, 2, 3, \ldots N$ so oft als Theiler zählt, als es Vielfache von k in dieser Reihe giebt, also $\left[\frac{N}{k}\right]$ mal, so liefert sie zu der Summe aller Theiler den Beitrag

$$\left[\frac{N}{k}\right] \cdot k$$

und somit wird man schreiben können

$$\sigma(N) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \left[\frac{N}{k}\right], \tag{14a}$$

und, wenn man $N = [x]$ voraussetzt, allgemeiner

$$\sigma[x] = \sum_{k=1}^{[x]} k \cdot \left[\frac{x}{k}\right] \tag{15}$$

und

$$\sigma\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} k \cdot \left[\frac{x}{kn}\right]; \tag{15a}$$

indem also unter den Zeichen $f(n)$, $F(n)$ jetzt resp. $n\sigma\left[\frac{x}{n}\right]$ und $n\left[\frac{x}{n}\right]$ verstanden werden, liefert das Umkehrungsprincip ohne weiteres die mit (13) analoge Formel

$$[x] = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \cdot n\sigma\left[\frac{x}{n}\right]. \tag{16}$$

4) Sei endlich $\varphi(n)$ die bekannte zahlentheoretische Funktion, welche die Anzahl der zu n primen Zahlen $< n$ angiebt, und

$$\Phi(N) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(k); \tag{17}$$

eine spätere Betrachtung wird zeigen, dass diese Gleichung in die folgende übergeführt werden kann:

$$\delta(N) = \sum_{k=1}^{N} \Phi\left[\frac{N}{k}\right], \tag{17a}$$

in welcher

$$\delta(N) = \frac{N(N+1)}{2} \tag{18}$$

ist. Bedeutet daher wieder N das grösste Ganze, das in x enthalten ist, so kommt man zu den allgemeineren Formeln

$$\delta[x] = \sum_{k=1}^{[x]} \Phi\left[\frac{x}{k}\right] \tag{19}$$

und

$$\delta\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \Phi\left[\frac{x}{kn}\right], \tag{19a}$$

aus denen das Umkehrungsprincip die folgende erschliessen lässt:

(20) $$\Phi[x] = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \cdot \delta\left[\frac{x}{n}\right].$$

3. Das allgemeine Umkehrungsprincip nimmt einige besondere Formen an, welche wichtig genug sind, um sie zu bemerken.

Gesetzt zunächst, die Funktionen $f(n)$, $F(n)$ seien nur dann von Null verschieden, wenn n ungerade ist, mit anderen Worten, es bestehen zwischen ihnen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(1) &= F(1) + F(3) + F(5) + F(7) + F(9) + F(11) + \cdots \\
f(3) &= F(3) + F(9) + F(15) + \cdots \\
f(5) &= F(5) + F(15) + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

oder die Beziehung

(5a) $$f(\nu) = \sum_{\gamma} F(\gamma\nu)$$

nur für alle positiven ungeraden Zahlen ν, γ, so wird daraus die andere

(6a) $$\sum_{\nu} \mu(\nu) f(\nu) = \sum_{\gamma, \nu} \mu(\nu) \cdot F(\gamma\nu)$$

hervorgehen, das Argument von F aber, wenn γ, ν alle ihre Werthe annehmen, jeder ungeraden Zahl gleich werden; man erhält daher mit Rücksicht auf die Fundamentaleigenschaft der Funktion $\mu(n)$ sogleich die Umkehrungsformel

(7 a) $$F(1) = \sum_{\nu} \mu(\nu) f(\nu),$$

die Summation auf alle positiven ungeraden Zahlen ν oder, falls $f(\nu)$ verschwindet, sobald $\nu > N$ ist, nur auf alle diejenigen erstreckt, welche $\overline{\gtrless} N$ sind.

Werden statt der Funktionen $f(\nu)$, $F(\nu)$ durch die Substitutionen

$$f(\nu) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} f_1(\nu), \quad F(\nu) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} F_1(\nu)$$

zwei andere Funktionen $f_1(\nu)$, $F_1(\nu)$ eingeführt, zwischen denen die allgemeine Beziehung

$$(5\,\mathrm{b}) \qquad (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} f_1(\nu) = \sum_{\gamma} (-1)^{\frac{\gamma\nu-1}{2}} \cdot F_1(\gamma\nu)$$

d. i. die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(1) &= F_1(1) - F_1(3) + F_1(5) - F_1(7) + F_1(9) - \cdots \\ -f_1(3) &= \quad - F_1(3) \qquad\qquad + F_1(9) - \cdots \\ f_1(5) &= \qquad\qquad F_1(5) \qquad\qquad - F_1(15) + \cdots \end{aligned}$$

oder auch die allgemeine Beziehung

$$(6\,\mathrm{b}) \qquad f_1(\nu) = \sum_{\gamma} (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} F_1(\gamma\nu)$$

besteht, so ergiebt sich die Umkehrungsformel

$$(7\,\mathrm{b}) \qquad F_1(1) = \sum_{\nu} \mu(\nu) \cdot (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} f_1(\nu).$$

Hier fallen diejenigen Glieder in der Summe aus, bei welchen ν gleiche Primfaktoren enthält; dagegen ist

$$\mu(\nu) \cdot (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} = +1,$$

wenn ν aus einer geraden Anzahl verschiedener Primfaktoren besteht, unter denen eine gerade Anzahl solcher von der Form $4h+3$ also auch eine gerade Anzahl solcher von der Form $4h+1$ vorhanden ist, oder wenn ν aus einer ungeraden Anzahl verschiedener Primfaktoren besteht, unter denen eine ungerade Anzahl solcher von der Form $4h+3$ also eine gerade Anzahl solcher von der Form $4h+1$ vorhanden ist; d. h. es ist

$$\mu(\nu) \cdot (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} = +1,$$

wenn ν aus lauter verschiedenen Primfaktoren besteht, unter denen eine gerade Anzahl von der Form $4h+1$ ist; dagegen ist

$$\mu(\nu) \cdot (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} = -1,$$

wenn unter ihnen eine ungerade Anzahl von der Form $4h + 1$ ist.

Wählen wir beispielsweise $F_1(\nu) = \frac{1}{\nu^s}$, wo $s > 1$ sein soll, so wird

$$f_1(\nu) = \frac{1}{\nu^s}\left(1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots\right)$$

und die Formel (7b) nimmt die Gestalt an

$$1 = \left(1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots\right) \cdot \sum \mu(\nu) \cdot (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu^s},$$

wo die Summe auf der rechten Seite, ausführlich geschrieben:

$$1 + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} - \frac{1}{13^s} - \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \frac{1}{21^s} \cdots,$$

offenbar das entwickelte Produkt

$$\prod_3^\infty \left(1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}\right)$$

darstellt, wenn es auf alle ungeraden Primzahlen p ausgedehnt wird. Somit gelangt man zu der schon von Euler*) angegebenen, in der allgemeinen Formel (18) des 1. Abschn. als specieller Fall enthaltenen Gleichung:

$$\prod_3^\infty \left(\frac{1}{1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}}\right) = \sum_\nu \frac{(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\nu^s}.$$

4. Nehmen wir ferner an, dass $f(n)$, $F(n)$ nur dann von Null verschieden sind, wenn n Theiler einer gegebenen Zahl P ist, d. h. setzen wir voraus, es bestehe die Beziehung

$$f(d) = \sum_k F(kd) \tag{5c}$$

für jeden Theiler d von P, während die Summe auf alle

*) Introductio in analysin infinitorum I p. 241. Vgl. Tschebischeff, note sur différentes séries in Liouville's Journal Bd. 16 p. 387.

Theiler k von $\frac{P}{d}$ sich bezieht. Alsdann folgt

$$\sum_{d} \mu(d) f(d) = \sum_{k,d} \mu(d) \cdot F(kd), \tag{6c}$$

wo nun links über alle Theiler d von P, rechts über eben dieselben und über alle Theiler k von $\frac{P}{d}$ zu summiren ist. Offenbar wird dann kd jedem Theiler von P gleich werden; und wenn alle Glieder der Doppelsumme vereint werden, in welchen kd gleich demselben Theiler δ von P ist, so geht sie über in die einfache, auf alle Theiler von P bezogene Summe

$$\sum_{\delta} C_\delta \cdot F(\delta),$$

wo $C_\delta = \Sigma \mu(d)$ und diese Summe auf alle Theiler von δ erstreckt, also Null ist mit Ausnahme des einzigen Falles $\delta = 1$, wo $C_\delta = 1$ wird. Somit geht die Umkehrungsformel hervor:

$$F(1) = \sum_{d} \mu(d) \cdot f(d), \tag{7c}$$

wo die Summation alle Theiler d von P umfasst.

Offenbar kommt es nur auf eine Vertauschung des Funktionszeichens F hinaus, wenn wir dem vorigen Satze folgenden Ausdruck geben: Besteht für jeden Theiler d von P die Beziehung

$$f(d) = \sum_{k} F\left(\frac{P}{kd}\right), \tag{5d}$$

die Summe über alle Theiler k von $\frac{P}{d}$ erstreckt, so ist umgekehrt

$$F(P) = \sum_{d} \mu(d) f(d), \tag{7d}$$

wenn rechts über alle Theiler d von P summirt wird.

Von diesen Formeln wollen wir nun eine Reihe interessanter Anwendungen machen.

1) Sei zuerst x ein positiver Werth und $[x]$ das darin enthaltene grösste Ganze; seien ferner p, p', p'', ... beliebig gegebene von einander verschiedene Primzahlen und $P = p p' p'' \ldots$ Die ganzen Zahlen

(21) $$1, 2, 3, \ldots [x]$$

können in Gruppen vertheilt werden, indem man stets diejenigen in eine Gruppe vereint, welche mit P ein- und denselben grössten gemeinsamen Theiler haben, und offenbar gehört dann jede ganze Zahl $< x$ zu einer, aber auch nur zu einer dieser Gruppen. Nennen wir also die Anzahl der Zahlen $< x$, welche mit P den grössten gemeinsamen Theiler k haben, $\psi(x, P, k)$, so ergiebt sich sogleich die Beziehung

(22) $$[x] = \sum_k \psi(x, P, k),$$

die Summation auf alle Theiler k von P ausgedehnt. Ist nun d ein bestimmter Theiler von P und k ein Theiler von $\frac{P}{d}$, so ist kd ein Theiler von P. Diejenigen Zahlen $< x$, welche den grössten gemeinsamen Theiler kd mit P haben, befinden sich sämmtlich unter den folgenden Zahlen:

$$1 \cdot d, \quad 2 \cdot d, \quad 3 \cdot d, \ldots \left[\frac{x}{d}\right] \cdot d$$

und ihrer sind soviel, als es unter den Zahlen $< \frac{x}{d}$ solche giebt, welche den grössten gemeinsamen Theiler k mit $\frac{P}{d}$ haben; daraus folgt die Gleichheit

$$\psi(x, P, kd) = \psi\left(\frac{x}{d}, \frac{P}{d}, k\right);$$

und da, entsprechend der Gleichung (22), die folgende besteht:

$$\left[\frac{x}{d}\right] = \sum_k \psi\left(\frac{x}{d}, \frac{P}{d}, k\right),$$

die Summation auf alle Theiler k von $\frac{P}{d}$ erstreckt, so findet sich für jeden Theiler d von P die Beziehung:

(23) $$\left[\frac{x}{d}\right] = \sum_k \psi(x, P, kd),$$

die Summation ausgedehnt auf alle Theiler k von $\frac{P}{d}$. Die Umkehrungsformel (7c) ergiebt als Folgerung dieser Formel ohne weiteres die folgende:

$$\psi(x, P, 1) = \sum_d \mu(d) \cdot \left[\frac{x}{d}\right], \tag{24}$$

wo die Summation sich auf alle Theiler d von P erstreckt, d. h. die Anzahl aller Zahlen $< x$, welche prim zu P d. i. durch keine der gegebenen Primzahlen theilbar sind, ist

$$\sum_d \mu(d) \cdot \left[\frac{x}{d}\right]$$

oder, ausgeführt geschrieben, gleich dem Ausdrucke

$$[x] - \sum\left[\frac{x}{p}\right] + \sum\left[\frac{x}{pp'}\right] - \sum\left[\frac{x}{pp'p''}\right] + \cdots, \tag{25}$$

wo die erste Summe auf alle die gegebenen Primzahlen, die zweite auf alle Combinationen von zweien, die dritte auf alle Combinationen von dreien derselben u. s. w. ausgedehnt werden muss.

Hiernach wird ferner, wenn y ein positiver Werth $> x$ ist, die Anzahl aller Zahlen $> x$ aber $< y$, welche durch keine der gegebenen Primzahlen theilbar sind, durch den Unterschied

$$\begin{aligned} &[y] - \sum\left[\frac{y}{p}\right] + \sum\left[\frac{y}{pp'}\right] - \sum\left[\frac{y}{pp'p''}\right] + \cdots \\ &- \left([x] - \sum\left[\frac{x}{p}\right] + \sum\left[\frac{x}{pp'}\right] - \sum\left[\frac{x}{pp'p''}\right] + \cdots\right) \end{aligned} \tag{26}$$

definirt sein*).

Bedeuten $p, p', p'', \ldots$ die sämmtlichen Primzahlen $< x$, so ist jede Zahl $< x$ bis auf die Einheit aus ihnen zusammengesetzt, unter diesen Zahlen giebt es also nur die Einheit, welche durch keine der gedachten Primzahlen theilbar ist. In diesem Falle wird also der Ausdruck (25) oder (24) gleich:

$$\sum_d \mu(d) \cdot \left[\frac{x}{d}\right] = 1, \tag{27}$$

wenn die Summation auf alle Theiler von $pp'p'' \ldots$ oder auch auf alle Zahlen $\leqq x$, welche nur aus verschiedenen Prim-

*) Zsigmondy: Zur Verallgemeinerung der Funktion $\varphi(n)$ in der Zahlentheorie, im Journ. f. d. r. u. a. Mathematik Bd. 111, p. 344.

faktoren bestehen, ausgedehnt wird. Da aber für jede andere Zahl $n \leqq x$ die Funktion $\mu(n)$ verschwindet, darf man offenbar auch schreiben

$$\sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \cdot \left[\frac{x}{n}\right] = 1,$$

und gelangt auf solche Weise zu der Formel (9) von Lipschitz wieder zurück.

Nehmen wir an, in der Formel (26) bedeute x eine Primzahl q und $p, p', p'', \ldots$ die sämmtlichen Primzahlen 2, 3, 5, ... bis q, so wird dem soeben Gesagten gemäss der Subtrahendus gleich 1; bedeutet dann y die nächstfolgende Primzahl ϖ, so giebt es nur eine Zahl, eben diese Primzahl ϖ, welche $> x$ und $< y$ und durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, ... q theilbar ist. Demnach ergiebt sich aus (26) folgende merkwürdige Formel

$$\varpi - \sum\left[\frac{\varpi}{p}\right] + \sum\left[\frac{\varpi}{pp'}\right] - \sum\left[\frac{\varpi}{pp'p''}\right] + \cdots = 2,$$

oder, abgekürzt, die auf alle Theiler d von $2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots q$ bezogene Summe

$$\sum \mu(d) \cdot \left[\frac{\varpi}{d}\right] = 2, \tag{28}$$

durch welche die auf q folgende Primzahl ϖ charakterisirt ist.

2) Ist ferner N eine gegebene positive ganze Zahl und $p, p', p'', \ldots$ die verschiedenen Primfaktoren, aus denen sie zusammengesetzt ist:

$$N = p^{\alpha} p'^{\alpha'} p''^{\alpha''} \cdots,$$

so stimmen diejenigen Zahlen $\leqq N$, welche prim sind zu P, mit denjenigen von ihnen, welche prim sind zu N, überein. In diesem Falle ist also

$$\psi(N, P, 1) = \varphi(N),$$

wenn, wie üblich, $\varphi(N)$ diese letztere Anzahl bezeichnet. Da zugleich jeder Theiler d von P auch in N aufgeht, so giebt in diesem Falle die allgemeine Formel (24) den bekannten Ausdruck für die Funktion $\varphi(N)$, nämlich die Gleichung:

$$(29)\quad \varphi(N) = N - \sum \frac{N}{p} + \sum \frac{N}{pp'} - \sum \frac{N}{pp'p''} + \cdots$$
$$= N\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p'}\right)\left(1 - \frac{1}{p''}\right)\cdots$$

3) Ist q eine der Primzahlen, welche $\leqq x$, p, p', p'', ... die übrigen, und ist

$$q^k \leqq x < q^{k+1},$$

so gilt die Formel

$$(30)\quad k + 1 = [x] - \sum \left[\frac{x}{p}\right] + \sum \left[\frac{x}{pp'}\right] - \cdots;$$

denn unter den Zahlen $\leqq x$ sind die einzigen, welche durch keine der Primzahlen p, p', p'', ... theilbar sind, die Potenzen 1, q, q^2, ... q^k, deren Anzahl gleich $k + 1$.

Bei gleicher Bezeichnung sei z die Menge der Primzahlen $> x$ aber $< qx$, dann ist nach (26), wenn darin $y = qx$ gewählt wird, mit Rücksicht auf das eben ausgesprochene Resultat

$$(31)\quad z + k + 2 = [qx] - \sum \left[\frac{qx}{p}\right] + \sum \left[\frac{qx}{pp'}\right] - \cdots.$$

Denn unter den Zahlen $> x$ und $\leqq qx$ sind die einzigen durch keine der Primzahlen p, p', p'', ... theilbaren Zahlen zunächst die Potenz q^{k+1}, während wegen

$$q^{k+1} \leqq qx < q^{k+2}$$

q^{k+2} schon über qx liegt, ausserdem die z Primzahlen zwischen den angegebenen Grenzen, sonst aber keine Zahl; denn jede andere Zahl zwischen diesen Grenzen, welche durch keine der Primzahlen p, p', p'', ... theilbar ist, würde, weil zusammengesetzt, nur aus q und jenen z Primzahlen zusammengesetzt sein können, aber schon jedes Produkt aus zweien solcher Faktoren würde $> qx$ sein; die Anzahl der gedachten Zahlen zwischen x und qx ist also $z + 1$.

Die beiden Formeln (30) und (31) gab Césaro*).

4) Aus derselben Quelle fliesst ein Satz, welchen im Anschluss an Legendre (théorie des nombres 4. partie

*) Césaro, sur diverses questions d'arithmétique, in den Mém. de la Société Royale des Sciences de Liège, 2. série t. 10 p. 285.

§ XI) Jonquières und demnächst Lipschitz gegeben haben*). Sind nämlich in (26) $x = \sqrt{y}$ und $p, p', p'', \ldots$ alle Primzahlen $\leqq x$, so ist zunächst der Subtrahendus gleich 1, ferner aber sind alle Zahlen $> x$ d. i. $> \sqrt{y}$ und $< y$, welche durch keine jener Primzahlen theilbar sind, nur die zwischen $\sqrt{y}$ und y enthaltenen Primzahlen, denn jede andere solche Zahl müsste nur aus den letzteren zusammengesetzt sein, aber schon jedes Produkt von zweien derselben wäre grösser als y. Hieraus folgt, dass der Ausdruck (26) im vorliegenden Falle gleich der Anzahl der letzteren Primzahlen ist; wird diese mit v bezeichnet, so ist also

$$(32) \qquad v + 1 = [y] - \sum \left[\frac{y}{p}\right] + \sum \left[\frac{y}{pp'}\right] - \cdots .$$

Bei dem Interesse, welches diese Formel darbietet, wollen wir sie auf's neue auf dem Wege herleiten, welchen Lipschitz, auf seine Formel (9) sich stützend, dazu eingeschlagen hat. Der letztern gemäss ist

$$(33) \qquad 1 = \sum_{n=1}^{[y]} \mu(n) \cdot \left[\frac{y}{n}\right].$$

Bezeichnen nun $2, 3, \ldots p$ die Primzahlen, welche $\leqq \sqrt{y}$, $q_1, q_2, \ldots q_v$ diejenigen, welche $> \sqrt{y}$ und $\leqq y$ sind, so kann man sämmtliche Zahlen $\leqq y$ in zwei Classen theilen: in die Classe K' derjenigen, die nur aus Primfaktoren $2, 3, \ldots p$ bestehen, und in die Classe K'' der übrigen, welche auch Primfaktoren $q_1, q_2, \ldots q_v$ enthalten. Da aber die Zahlen der zweiten Kategorie nicht gemeinsame Vielfache zweier dieser Primzahlen sein können, weil sie sonst grösser als y wären, so sind die Zahlen der Classe K'' die folgenden:

*) Jonquières, Formule pour déterminer, combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné, Comptes Rendus Bd. 95 p. 1144 und Anmerkung dazu p. 1343. Lipschitz ebendas. p. 1344 sur une communication de Mr. de Jonquières rel. aux nombres premiers. Lipschitz C. R. 96 p. 114 addition à une note sur les nombres premiers; Jonquières ebend. unter dem gleichen Titel. Vgl. dazu auch Sylvester ebendas. p. 463 note sur le théorême de Legendre cité dans une note insérée dans les Comptes Rendus.

$$1 \cdot q_1, \quad 2q_1, \cdots \left[\frac{y}{q_1}\right] \cdot q_1$$

$$1 \cdot q_2, \quad 2q_2, \cdots \left[\frac{y}{q_2}\right] \cdot q_2$$

. . . . . .

Die Gleichung (33) lässt sich demnach folgendermassen schreiben:

$$(33a) \quad 1 = \sum_{n'} \mu(n') \cdot \left[\frac{y}{n'}\right] + \sum_{q} \left(\sum_{n=1}^{\left[\frac{y}{q}\right]} \mu(nq) \left[\frac{y}{nq}\right] \right),$$

wo die erstere Summation auf alle Zahlen n' der Classe K', die zweite auf alle Primzahlen $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ sich bezieht. Nun ist aber, der Definition der Funktion μ gemäss,

$$\mu(nq) = -\mu(n);$$

denn n kann dem zuvor Bemerkten zufolge nicht durch q theilbar sein; enthält n quadratische Faktoren, so werden beide Seiten Null, im entgegengesetzten Falle wird die Anzahl verschiedener Primfaktoren für nq um 1 grösser als für n, die Funktionen $\mu(nq)$ und $\mu(n)$ also entgegengesetzte Einheiten sein. Andererseits ist nach (11)

$$\left[\frac{y}{nq}\right] = \left[\frac{\left[\frac{y}{q}\right]}{n}\right]$$

und daher ergiebt sich aus (9), wenn $\frac{y}{q}$ statt x gewählt wird,

$$\sum_{n=1}^{\left[\frac{y}{q}\right]} \mu(nq) \left[\frac{y}{nq}\right] = -\sum_{n=1}^{\left[\frac{y}{q}\right]} \mu(n) \left[\frac{\left[\frac{y}{q}\right]}{n}\right] = -1.$$

In Folge dieser Bemerkung verwandelt sich nun die Formel (33a), wenn man in der ersten Summation rechts die verschwindenden Glieder auslässt, d. i. nur auf diejenigen Zahlen $n' \leqq y$ sich beschränkt, die aus verschiedenen Primfaktoren $2, 3, \ldots p$ zusammengesetzt sind, in die Gleichung (31).

Auf genau demselben Wege gewinnt man aus den drei andern Lipschitz'schen Gleichungen (13), (16) und (20) die folgenden Formeln:

$$|y| + \left[\frac{y}{q_1}\right] + \left[\frac{y}{q_2}\right] + \cdots + \left[\frac{y}{q_\upsilon}\right]$$

$$= \tau[y] - \sum \tau\left[\frac{y}{p}\right] + \sum \tau\left[\frac{y}{pp'}\right] - \cdots \tag{34}$$

$$= \sigma[y] - \sum p \cdot \sigma\left[\frac{y}{p}\right] + \sum pp' \cdot \sigma\left[\frac{y}{pp'}\right] - \cdots \tag{35}$$

und

$$\Phi[y) + \Phi\left[\frac{y}{q_1}\right) + \Phi\left[\frac{y}{q_2}\right] + \cdots + \Phi\left[\frac{y}{q_\upsilon}\right]$$

$$= \delta[y) - \sum \delta\left[\frac{y}{p}\right] + \sum \delta\left[\frac{y}{pp'}\right] - \cdots \text{ *).} \tag{36}$$

5. Die Funktion $\mu(n)$, welche uns bei den voraufgehenden Betrachtungen so werthvolle Dienste geleistet, steht nun auch im allernächsten Zusammenhange mit der analytischen Funktion $\zeta(s)$, welche wir schon im 1. Abschnitte eingeführt und für alle s, deren reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, durch die Formel (5) daselbst, nämlich durch die Gleichung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{37}$$

oder, nach Formel (20) ebendaselbst, auch durch die folgende:

$$\zeta(s) = \prod_q \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}}\right), \tag{37a}$$

in welcher die Multiplikation auf sämmtliche Primzahlen q ausgedehnt werden muss, definirt haben. Bilden wir nämlich hiernach den reciproken Werth

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q^s}\right),$$

so wird der entwickelte Ausdruck dieses Produktes offenbar nichts anderes sein, als folgende Summe:

*) Lipschitz hat in einer weiteren Arbeit: sur une communication de Mr. de Jonquières rel. aux nombres premiers C. R. 96 p. 58 seine Untersuchung verallgemeinert, indem er die Primzahlen $< y$ statt durch Einschaltung der Grenze $\sqrt{y}$, durch Einschaltung der Grenze $\sqrt[n]{y}$ in zwei Classen theilt.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_1^\infty \mu(n) \cdot \frac{1}{n^s}. \tag{38}$$

Mit dieser fundamentalen Funktion $\zeta(s)$ lassen sich aber auch die verschiedensten andern zahlentheoretischen Funktionen in Verbindung bringen. Dies hat Lipschitz für die von uns mit $T(n)$, $S(n)$ und $\varphi(n)$ bezeichneten Funktionen gezeigt*), indem er die folgenden drei Formeln gab:

$$\zeta(s) \cdot \zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{T(n)}{n^s} \tag{39}$$

$$\zeta(s) \cdot \zeta(s-1) = \sum_1^\infty \frac{S(n)}{n^s} \tag{40}$$

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^s}, \tag{41}$$

deren beide letzten voraussetzen, dass der reelle Bestandtheil von s grösser als 2 ist. Diese Formeln sind leicht zu bestätigen. Zunächst hat man

$$\zeta(s) \cdot \zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{n'^s} = \sum_{n,n'} \frac{1}{(nn')^s},$$

und wenn nun in der Doppelsumme alle Glieder vereint werden, für welche nn' ein und denselben ganzzahligen Werth m hat, so wird man solcher Glieder so viele erhalten, als m Zerlegungen in zwei Faktoren gestattet oder als die Anzahl ihrer Theiler beträgt, d. i. $T(m)$. Dies bestätigt die Formel (39).

Ferner ist

$$\zeta(s) \cdot \zeta(s-1) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{n'^{s-1}} = \sum_{n,n'} \frac{n'}{(nn')^s};$$

vereint man daher in der Doppelsumme alle Glieder, für welche $nn' = m$ ist, so geben sie zusammen

*) Lipschitz in Comptes Rendus de l' Acad. de France 1879 p. 985.

$$\frac{1}{m^s}\sum' n' \quad \text{d. i.} \quad \frac{S(m)}{m^s},$$

und damit die Bestätigung der Formel (40).

Endlich ergiebt sich mittels (38)

$$\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\zeta(s-1)=\sum_1^\infty\frac{\mu(n)}{n^s}\cdot\sum_1^\infty\frac{1}{n'^{s-1}}=\sum_{n,n'}\frac{\mu(n)\cdot n}{(nn')^s}.$$

Werden hier die Glieder der Doppelsumme vereinigt, in denen $nn'=m$ ist, so erhält man als ihre Summe

$$\frac{1}{m^s}\cdot\sum'\mu(n)\,n'=\frac{m}{m^s}\cdot\sum'\frac{\mu(n)}{n},$$

die Summe ausgedehnt über alle Theiler n von m; denkt man sich aber m in Primfaktoren zerlegt:

$$m=p^a p'^{a'} p''^{a''}\ldots,$$

so kommt sogleich

$$\sum'\frac{\mu(n)}{n}=1-\sum\frac{1}{p}+\sum\frac{1}{pp'}+\cdots=\frac{\varphi(m)}{m},$$

folglich $\frac{\varphi(m)}{m^s}$ als Gesammtheit der gedachten Glieder, und damit die Bestätigung der Formel (41). —

Aehnliches hat G. Cantor*) bezüglich verschiedener anderer zahlentheoretischer Funktionen nachgewiesen.

Wenn n, in Primfaktoren zerlegt,

$$n=p^a p'^{a'} p''^{a''}\ldots \tag{42}$$

ist, so definiren wir die zahlentheoretischen Funktionen

$$\alpha(n),\quad \beta(n),\quad \gamma(n)$$

durch folgende Gleichungen:

$$\alpha(n)=aa'a''\ldots \tag{43}$$

$$\beta(n)=(-1)^{a+a'+a''+\cdots} \tag{44}$$

$$\gamma(n)=\frac{3+(-1)^a}{2}\cdot\frac{3+(-1)^{a'}}{2}\cdot\frac{3+(-1)^{a''}}{2}\cdots. \tag{45}$$

---

*) G. Cantor Math. Annalen 16 p. 583: zur Theorie der zahlentheoretischen Funktionen.

Man überzeugt sich nach diesen Definitionen sofort, dass die Funktionen den Beziehungen

$$\alpha(nn') = \alpha(n) \cdot \alpha(n')$$
$$\beta(nn') = \beta(n) \cdot \beta(n')$$
$$\gamma(nn') = \gamma(n) \cdot \gamma(n')$$

genügen, so oft n, n' relative Primzahlen sind. Demnach liefert uns die Euler'sche Formel (17) des 1. Abschnittes, wenn wir sie zunächst auf die Funktion $\alpha(n)$ anwenden, indem wir $f(n) = \frac{\alpha(n)}{n^s}$ setzen, das Resultat:

$$\sum_1^\infty \frac{\alpha(n)}{n^s} = \prod_q \left(1 + \frac{\alpha(q)}{q^s} + \frac{\alpha(q^2)}{q^{2s}} + \cdots\right)$$

d. i. gleich

$$\prod_q \left(1 + \frac{1}{q^s} + \frac{2}{q^{2s}} + \frac{3}{q^{3s}} + \cdots\right).$$

Der allgemeine Faktor dieses Produktes ist aber gleich

$$1 + \frac{1}{q^s} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^2} = \frac{1 + \frac{1}{q^{2s}}}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{q^s}\right)}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{q^{6s}}}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)\left(1 - \frac{1}{q^{2s}}\right)\left(1 - \frac{1}{q^{3s}}\right)}$$

und demnach

$$\sum_1^\infty \frac{\alpha(n)}{n^s} = \prod_q \frac{1 - \frac{1}{q^{6s}}}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)\left(1 - \frac{1}{q^{2s}}\right)\left(1 - \frac{1}{q^{3s}}\right)},$$

wofür man mit Rücksicht auf die Bedeutung (37a) der Funktion $\zeta(s)$ als unendliches Produkt die folgende Beziehung setzen kann:

$$\sum_1^\infty \frac{\alpha(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(2s)\,\zeta(3s)}{\zeta(6s)}. \tag{43a}$$

In gleicher Weise findet sich

$$\sum_1^{\infty} \frac{\beta(n)}{n^s} = \prod_q \left(1 + \frac{\beta(q)}{q^s} + \frac{\beta(q^2)}{q^{2s}} + \cdots\right)$$

d. i. gleich

$$\prod_q \left(1 - \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{2s}} - \cdots\right) = \prod_q \frac{1}{1 + \frac{1}{q^s}} = \prod_q \frac{1 - \frac{1}{q^s}}{1 - \frac{1}{q^{2s}}}$$

also

$$\sum_1^{\infty} \frac{\beta(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}. \tag{44a}$$

Und ebenso drittens

$$\sum_1^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n^s} = \prod_q \left(1 + \frac{\gamma(q)}{q^s} + \frac{\gamma(q^2)}{q^{2s}} + \cdots\right)$$

d. i. gleich

$$\prod_q \left(1 + \frac{1}{q^s} + \frac{2}{q^{2s}} + \frac{1}{q^{3s}} + \frac{2}{q^{4s}} + \cdots\right);$$

der allgemeine Faktor dieses Produktes ist aber gleich

$$\left(1 + \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{q^{3s}} + \cdots\right) + \frac{1}{q^{2s}}\left(1 + \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{q^{4s}} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}} + \frac{1}{q^{2s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2s}}} = \frac{1 - \frac{1}{q^{3s}}}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)\left(1 - \frac{1}{q^{2s}}\right)}$$

und so kommt

$$\sum_1^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s)}{\zeta(3s)}. \tag{45a}$$

Jede solche Beziehung liefert einen Satz, durch welchen eine charakteristische Eigenschaft der betreffenden zahlentheoretischen Funktion ausgesprochen wird. Aus (44a) z. B. folgt bei Rücksicht auf die Formeln (37) und (38)

$$\sum_1^{\infty} \frac{\beta\, n)}{n^s} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\mu(m')}{m'^s} \tag{46}$$

d. i. gleich der Doppelsumme

$$\sum_{m,\,m'} \frac{\mu(m')}{(m^2 m')^s};$$

fasst man aber in der letztern alle Glieder zusammen, für welche $m^2 m'$ den gleichen Werth n hat, und bedenkt, dass, wenn m, m' alle ihre Werthe durchlaufen, $m^2 m'$ jeder positiven ganzen Zahl n gleich wird, so kann man sie folgendermassen schreiben:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n^s} \sum_m \mu\left(\frac{n}{m^2}\right)\right),$$

wo die zweite Summation auf alle quadratischen Theiler m^2 von n auszudehnen ist, und durch Vergleichung mit der linken Seite von (46) ergiebt sich nach dem Satze in Nr. 6 des 3. Abschnittes

$$\beta(n) = \sum_m \mu\left(\frac{n}{m^2}\right).$$

Der hierin ausgesprochene Satz ist übrigens sehr leicht zu bewahrheiten, denn, da die Funktion μ gleich 0 ist, so oft das Argument quadratische Theiler enthält, wird jedes Glied der Summe verschwinden bis auf dasjenige, bei welchem m^2 das grösste in n aufgehende Quadrat bezeichnet, und für dieses ist $\mu\left(\frac{n}{m^2}\right) = (-1)^\nu$, wenn ν die Anzahl der Primfaktoren von $\frac{n}{m^2}$ ist, d. i. $\mu\left(\frac{n}{m^2}\right) = \beta\left(\frac{n}{m^2}\right)$; zugleich aber lehrt die Definition (44), dass $\beta(n)$ sich nicht verändert, wenn die Exponenten a, a', a'', ... um gerade Zahlen vermindert d. h. wenn aus n ein quadratischer Faktor weggehoben wird; das einzige übrigbleibende Glied der Summe ist also gleich $\beta(n)$.

Zu den Formeln und Sätzen dieser Art zählen u. a. auch diejenigen, welche Gegenbauer in seiner Abhandlung „Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie“ in den Denkschriften der Wiener Academie Bd. 49 S. 37 mitgetheilt hat. Aus der Gleichheit

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(rs)} = \prod_q \frac{1-\frac{1}{q^{rs}}}{1-\frac{1}{q^s}} = \prod_q \left(1 + \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{2s}} + \cdots + \frac{1}{q^{(r-1)s}}\right),$$

in welcher r irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, ergiebt sich sogleich die andere:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(rs)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_r(n)}{n^s},$$

wenn man unter dem Zeichen $\mu_r(n)$ die Null versteht, so oft n durch eine r^{te} Potenz (ausser der Einheit) theilbar ist, sonst aber die Eins.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man mit $\zeta(rs)$ multiplicirt,

$$\sum \frac{1}{n^s} = \sum \frac{1}{n^{rs}} \cdot \sum \frac{\mu_r(n)}{n^s}$$

d. i. gleich

$$\sum_{n', n''} \frac{\mu_r(n')}{(n' n''^r)^s}$$

oder, wenn man in dieser Doppelsumme diejenigen Glieder vereint, in denen $n' n''^r$ denselben Werth n hat,

$$\sum \frac{1}{n^s} = \sum \frac{C_n}{n^s},$$

worin

$$C_n = \sum \mu_r(n')$$

ist, wenn die Summe auf alle diejenigen Theiler n' von n erstreckt wird, deren complementäre Theiler $\frac{n}{n'}$ r^{te} Potenzen sind. Man erhält für diese Summe also den Werth

$$\sum \mu_r(n') = 1$$

d. h. unter den Theilern einer Zahl, deren complementäre Theiler r^{te} Potenzen sind, ist nur ein einziger vorhanden, der durch keine r^{te} Potenz aufgeht.

Schreibt man die obige Gleichung aber folgendermassen:

$$\sum \frac{\mu_r(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \frac{1}{\zeta(rs)} = \sum \frac{1}{n'^s} \cdot \sum \frac{\mu(n'')}{(n'')^{rs}}$$

d. i. gleich

$$\sum_{n', n''} \frac{\mu(n'')}{(n' n''^r)^s},$$

so findet man durch Vereinigung derjenigen Glieder dieser Doppelsumme, in denen $n'n''^r$ denselben Werth n hat, die Gleichung

$$\sum \frac{\mu_r(n)}{n^s} = \sum \frac{C_n}{n^s},$$

wo

$$C_n = \sum \mu(n'') = \sum \mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{n'}}\right)$$

und die Summe wieder über alle diejenigen Theiler n' von n zu erstrecken ist, deren complementäre Theiler $\frac{n}{n'}$ r^{te} Potenzen sind. Mithin besteht für diese Summe die Beziehung:

$$\sum_{n'} \mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{n'}}\right) = \mu_r(n).$$

6. Hat man umgekehrt Beziehungen, wie die hier besprochenen, direkt gewonnen, wie z. B. die Formeln (39), (40), (41), so wird die Anwendung des Euler'schen Satzes dazu führen, charakteristische Eigenschaften der betreffenden zahlentheoretischen Funktionen zu gewinnen. So liefert uns die Formel (39) zunächst die Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{T(n)}{n^s} = \prod_q \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}}\right)^2, \tag{39 a}$$

d. i. nach der für jedes $z < 1$ giltigen Formel

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots$$

gleich dem Produkte

$$\prod_q \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{q^s} + 3 \cdot \frac{1}{q^{2s}} + 4 \cdot \frac{1}{q^{3s}} + \cdots\right);$$

bei der Entwicklung des letztern entsteht aber im Nenner offenbar jede positive ganze Zahl m in ihre Primfaktoren zerlegt:

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3} \cdots, \tag{47}$$

und sie führt den Coefficienten

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots,$$

die Gleichung (39a) nimmt demnach die Gestalt an:

$$\sum_1^\infty \frac{T(n)}{n^s} = \sum_1^\infty \frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots}{m^s}$$

und da sie für jeden Werth $s>1$ besteht, giebt der allgemeine Satz in Nr. 6 des 3. Abschnitts die Beziehung

$$T(m) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots \tag{48}$$

d. h. den Satz: Ist eine Zahl m, in Primzahlfaktoren zerlegt, durch die Formel (47) dargestellt, so ist die Anzahl ihrer Theiler gleich

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots.$$

Die rechte Seite der Formel (39a) kann aber auch auf folgende Weise umgeformt werden. Man darf zuerst den allgemeinen Faktor des Produkts durch

$$\frac{1+\frac{1}{q^s}}{1-\frac{1}{q^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}}$$

ersetzen; nun ist

$$\prod_q \frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2s}}.$$

und, wenn man den ersten Faktor nach der für jedes $z<1$ giltigen Formel

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \cdots$$

umwandelt, so wird

$$\prod_q \frac{1+\frac{1}{q^s}}{1-\frac{1}{q^s}} = \prod_q \left(1 + 2\cdot\frac{1}{q^s} + 2\cdot\frac{1}{q^{2s}} + \cdots\right);$$

die Entwicklung dieses Produktes liefert aber offenbar im Nenner jede positive ganze Zahl m in ihre Primfaktoren zerlegt (47), und sie führt den Coefficienten $2^{\varpi(m)}$, wenn man mit $\varpi(m)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren bezeichnet, welche in dieser Zerlegung auftreten. Auf solche Weise nimmt die Gleichung (39a) die Gestalt an:

$$\sum_1^\infty \frac{T(n)}{n^s} = \sum_1^\infty \frac{2^{\varpi(m)}}{m^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2s}}$$

d. i. gleich der Doppelsumme

$$\sum_{m,n} \frac{2^{\varpi(m)}}{(mn^2)^s},$$

welche, wenn diejenigen Glieder vereint werden, für welche mn^2 derselben Zahl M gleich ist, auch so geschrieben werden kann:

$$\sum_M \left(\frac{1}{M^s} \sum_n 2^{\varpi\left(\frac{M}{n^2}\right)} \right),$$

wobei die auf n bezügliche Summation alle quadratischen Theiler n^2 von M umfasst. Die Anwendung des allgemeinen Satzes in Nr. 6 des 3. Abschnitts führt dann zu der zweiten Formel für die Funktion T:

$$T(M) = \sum_n 2^{\varpi\left(\frac{M}{n^2}\right)}. \tag{49}$$

Nun bezeichnet $2^{\varpi(m)}$, der Formel (48) zufolge, die Anzahl der Theiler der Zahl

$$q_1 q_2 q_3 \cdots$$

d. h. die Anzahl ihrer Zerlegungen in zwei Faktoren, und folglich auch die Anzahl der Zerlegungen von m in zwei relativ prime Faktoren. Führt man diese Anzahl als besondere zahlentheoretische Funktion $P(m)$ durch die Definitionsgleichung

$$P(m) = 2^{\varpi(m)} \tag{50}$$

ein, so lautet die vorige Gleichung:

$$T(M) = \sum_n P\left(\frac{M}{n^2}\right) \tag{49a}$$

und spricht den Satz aus: Die Anzahl *aller* Zerlegungen einer Zahl in zwei Faktoren ist gleich der Gesammtmenge der Zerlegungen all' derjenigen Zahlen, welche aus der ersteren durch Unterdrückung ihrer quadratischen Theiler entstehen, in zwei relative Primfaktoren.

Zweitens erhalten wir aus der Formel (40), wenn wir darin s in $s+1$ verwandeln, sodass sie dann für jedes $s>1$ Bestand haben wird,

$$\sum_1^\infty \frac{S(n)}{n^{s+1}} = \prod_q \frac{1}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{1}{q^{s+1}}\right)}.$$

Um die rechte Seite zu entwickeln, stellen wir den allgemeinen Faktor des Produktes folgendermassen dar:

$$\frac{1}{q-1}\left(\frac{q}{1-\frac{1}{q^s}} - \frac{1}{1-\frac{1}{q^{s+1}}}\right)$$

$$= \frac{1}{q-1}\left[q\left(1+\frac{q}{q^{s+1}}+\frac{q^2}{q^{2s+2}}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{q^{s+1}}+\frac{1}{q^{2s+2}}+\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{q-1}\left[q-1+(q^2-1)\cdot\frac{1}{q^{s+1}}+(q^3-1)\cdot\frac{1}{q^{2(s+1)}}+\cdots\right];$$

das Produkt wird dann gleich

$$\prod_q\left(1+\left(\frac{q^2-1}{q-1}\right)\frac{1}{q^{s+1}}+\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)\frac{1}{q^{2(s+1)}}+\cdots\right)$$

und giebt, entwickelt, die reciproke $(s+1)^{\text{te}}$ Potenz jeder positiven ganzen Zahl m (47), in ihre Primfaktoren zerlegt, mit dem Coefficienten

$$\frac{q_1^{\alpha_1+1}-1}{q_1-1}\cdot\frac{q_2^{\alpha_2+1}-1}{q_2-1}\cdot\frac{q_3^{\alpha_3+1}-1}{q_3-1}\cdots$$

multiplicirt, sodass die Anwendung des schon mehrfach benutzten Hilfssatzes uns sogleich zu der bekannten Formel führt:

$$(51)\qquad S(m)=\frac{q_1^{\alpha_1+1}-1}{q_1-1}\cdot\frac{q_2^{\alpha_2+1}-1}{q_2-1}\cdot\frac{q_3^{\alpha_3+1}-1}{q_3-1}\cdots,$$

durch welche die Summe aller Theiler einer Zahl m mittels ihrer Zerlegung in Primfaktoren bestimmt wird.

Schreiben wir endlich die Gleichung (41), wie folgt:

$$\sum_1^\infty \frac{m}{m^s} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}\cdot\sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

d. i. gleich der Doppelsumme

$$\sum_{n.n'} \frac{\varphi(n')}{(nn')^s},$$

so kann die letztere auch durch die einfache Summe

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{m^s} \sum_d \varphi(d)\right),$$

wo der Summationsbuchstabe d alle Theiler der Zahl m zu durchlaufen hat, ersetzt werden, und nunmehr folgt mittels des obgenannten Hilfssatzes sogleich die Formel

$$m = \sum_d \varphi(d), \tag{52}$$

welche eine bekannte Fundamentaleigenschaft der Funktion $\varphi(n)$ zum Ausdrucke bringt, und aus welcher umgekehrt der bei dem Beweise der Formel (41) benutzte Ausdruck (29) für $\varphi(n)$ mittels des Umkehrungsprincipes herfliessen würde. —

7. G. Cantor hat gezeigt, wie die Formel (52) einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig ist. Setzen wir in (41) statt s successive $s+1$, $s+2$, $\ldots$ $s+r-1$ und multipliciren dann die Gleichungen

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)} = \sum_1^\infty \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\zeta(s+r-2)}{\zeta(s+r-1)} = \sum_1^\infty \frac{\varphi(n_{r-1})}{n_{r-1}^{s+r-1}}$$

unter sich sowie mit der Gleichung

$$\zeta(s+r-1) = \sum_1^\infty \frac{1}{n_r^{s+r-1}},$$

so lässt sich das Resultat in folgender Form geben:

$$\sum_1^\infty \frac{m^r}{m^{s+r-1}} = \sum \frac{\varphi(n)\, n^{r-1} \cdot \varphi(n_1)\, n_1^{r-2} \cdots \varphi(n_{r-2})\, n_{r-2} \cdot \varphi(n_{r-1})}{(n n_1 n_2 \ldots n_{r-1} n_r)^{s+r-1}},$$

ein Resultat, welches für jedes $s > 2$ giltig ist und in welchem die Summe zur Rechten eine vielfache Summe ist, die alle positiven ganzzahligen Werthe von $n, n_1, n_2, \ldots n_r$ umfasst. Denkt man sich nun in dieser Summe alle diejenigen Glieder zusammengefasst, in welchen das Produkt $n \cdot n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$, welches jeden positiven ganzzahligen Werth annimmt, derselben Zahl m gleich ist:

$$n\, n_1 n_2 \ldots n_{r-1} n_r = m, \tag{53}$$

so ergiebt die Anwendung des obigen Hilfssatzes sogleich die Verallgemeinerung der Formel (52) in der Gleichung:

$$\sum \varphi(n)\varphi(n_1)\ldots\varphi(n_{r-1}) \cdot n^{r-1} n_1^{r-2} \ldots n_{r-2} = m^r, \tag{52a}$$

wenn die Summation auf alle Lösungen der Gleichung (53) erstreckt wird.

Ist m' eine zu m prime Zahl, und

$$n' n_1' n_2' \ldots n_{r-1}' n_r' = m' \tag{54}$$

eine Zerlegung von m' in $r+1$ Faktoren, so ist

$$\mu\, \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{r-1} \mu_r = mm' \tag{55}$$

eine solche Zerlegung des Produktes mm', wenn man setzt:

$$\mu = nn', \quad \mu_1 = n_1 n_1', \quad \ldots \quad \mu_r = n_r n_r'; \tag{56}$$

aber auch umgekehrt gewinnt man aus jeder Auflösung der Gleichung (55) ein System von Gleichungen wie (56), in denen die ersten Faktoren Theiler von m, die zweiten Theiler von m' sind, welche die Gleichungen (53) resp. (54) befriedigen.

Nennt man daher $f_r(m)$ die Anzahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung (53), so genügt diese Funktion der Bedingung

$$f_r(m) \cdot f_r(m') = f_r(mm'), \tag{57}$$

so oft m, m' relative Primzahlen sind. Durch Anwendung der Euler'schen Formel gewinnt man also die Gleichung

$$\prod_q \left(1 + \frac{f_r(q)}{q^s} + \frac{f_r(q^2)}{q^{2s}} + \cdots\right) = \sum_1^\infty \frac{f_r(n)}{n^s}. \tag{58}$$

Nun ist aber, wie unmittelbar einleuchtet, $f_r(q^k)$ d. i. die Anzahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung

$$n\, n_1 n_2 \ldots n_r = q^k$$

gleich der Anzahl $\psi_r(k)$ der Zerfällungen von k in $r+1$ nicht negative Summanden oder der Lösungen der Gleichung

$$h + h_1 + h_2 + \cdot \cdot + h_r = k$$

in nicht negativen ganzen Zahlen. Da ferner offenbar

$$(59) \qquad (1 + z + z^2 + \cdots)^{r+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_r(k)\, z^k$$

ist, so ist $\psi_r(k)$ nichts anderes, als der Coefficient von z^k in der Entwicklung von $\frac{1}{(1-z)^{r+1}}$ nach steigenden Potenzen von z, d. h.

$$(60) \quad \psi_r(k) = \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}.$$

Hieraus folgt

$$1 + \frac{f_r(q)}{q^s} + \frac{f_r(q^2)}{q^{2s}} + \cdots = 1 + \frac{\psi_r(1)}{q^s} + \frac{\psi_r(2)}{q^{2s}} + \cdots$$

und also mit Rücksicht auf (59) gleich

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^{r+1}};$$

und durch solche Vereinfachung gewinnt man aus der Gleichung (58) folgende interessante Formel:

$$(61) \qquad \zeta(s)^{r+1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{f_r(n)}{n^s},$$

in welcher der Werth des Coefficienten $f_r(n)$ nach den Gleichungen (57) und (60) leicht angebbar ist.

8. Die Funktion $\zeta(s)$, welche wir von Anbeginn an eine fundamentale Rolle in der analytischen Zahlentheorie spielen sahen, hat diese Rolle in den zuletzt dargestellten Untersuchungen vollauf behauptet und auch fernerhin werden wir sie als besonders wichtig erkennen, insbesondere bei den Untersuchungen

von Riemann*) über die Häufigkeit der Primzahlen, die wir im nächsten Abschnitte auseinandersetzen wollen. Wir beschliessen daher diese Betrachtungen mit der näheren Erörterung der analytischen Natur dieser Funktion. Wir haben sie im ersten Abschnitte durch jede der beiden Formeln (37) oder (37a) für alle diejenigen Werthe von s definirt, deren reeller Bestandtheil grösser ist als 1, aber auch nur für solche, da die unendlichen Ausdrücke in diesen Formeln nur für solche convergent sind. Hätten wir uns bei den bisherigen Untersuchungen auf reelle Werthe von s beschränken dürfen, so wird dasselbe in der Folge nicht mehr der Fall sein, wo wir $\zeta(s)$ als Funktion der beliebig veränderlichen complexen Grösse s aufzufassen haben. Wir müssen also vor allem eine Definition von $\zeta(s)$ suchen, welche auch für die bisher ausgeschlossenen Werthe besteht, d. i. wir müssen zeigen, wie diese Funktion nach dem Gesetze der Stetigkeit über das bisherige Gebiet von s hinaus auf die ganze unendliche Ebene der complexen Veränderlichen fortgesetzt werden kann.

Riemann hat dies in der obengenannten Abhandlung gethan und ist auf diesem Wege zu der charakteristischen Eigenschaft der Funktion $\zeta(s)$ gelangt, welche in der folgenden Formel:

$$2 \sin s\pi \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s) = 2 \cdot (2\pi)^s \sin \frac{s\pi}{2} \cdot \zeta(1-s)$$

d. i.

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot \cos \frac{s\pi}{2} \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s) \tag{62}$$

sich ausspricht. Zwei ähnliche Formeln hatte bereits 1849 Schlömilch**) gegeben. Setzt man nämlich

$$f(s) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s},$$

*) Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, in den Monatsber. d. Berliner Acad. Nov. 1859 oder auch in den ges. Werken p. 136.

**) Zeitschrift für Mathematik und Physik Jahrg. 3 p. 130.

so bestehen die analogen Beziehungen

$$(63) \qquad f(1-s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \cdot \sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\cdot f(s)$$

$$(64) \qquad \varphi(1-s) = \frac{2^s-1}{2^{1-s}-1}\cdot\frac{2}{(2\pi)^s}\cdot\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\cdot\varphi(s).$$

Unmittelbar erkennt man die Uebereinstimmung der letztern von ihnen mit Riemann's Formel, wenn man bedenkt, dass, solange der reelle Bestandtheil von s grösser als 1 ist, die positiven Glieder in $\varphi(s)$ getrennt von den negativen convergiren, man also schreiben darf:

$$\varphi(s) = \left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots\right)$$

$$= \zeta(s) - 2\cdot\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots\right)$$

oder

$$\varphi(s) = \zeta(s)(1-2^{1-s});$$

die stetige Fortsetzung der Funktionen, wie wir sie geben werden, gestattet hieraus die Gleichung

$$\varphi(1-s) = \zeta(1-s)\cdot(1-2^s)$$

zu erschliessen, und somit erhält man (64) aus (62).

Später haben Hurwitz*) und Lerch**) die Riemann'sche Untersuchung auf allgemeinere Funktionen ausgedehnt und sind zu den entsprechend allgemeineren Grundformeln geführt worden; alle diese Formeln aber umfasst eine Transformationsgleichung, welche von Lipschitz gegeben worden ist***). In der sehr interessanten Abhandlung, in der er sie entwickelt, wendet er sie auch an auf die sämmtlichen von Dirichlet in seiner Arbeit über die arithmetische Progression

---

*) Hurwitz, einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen $F(s) = \sum\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Classenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten, in Zeitschr. f. Mathematik u. Physik. Jahrg. 27 p. 86.

**) Lerch, sur la fonction $\mathfrak{R}(w,x,s)$, Acta Math. 11 p. 19.

***) Lipschitz, Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, Journal f. d. r. u. a. Math. 105 p. 127, sowie auch ebendas. 54 p. 313.

benutzten Reihen und bringt sie so in eine charakteristische Beziehung zur Kreistheilung, welche ihm dann ein Princip an die Hand giebt, um sämmtliche Zahlen, insbesondere alle Primzahlen in gewisse Classen zu theilen. Leider ist es unmöglich, an dieser Stelle von seinen bemerkenswerthen Untersuchungen, die wohl noch der Vereinfachung fähig sind, nähere Rechenschaft zu geben. Wir müssen uns darauf beschränken, denjenigen besonderen Fall der genannten Dirichlet'schen Reihen zu betrachten, welchem die Abhandlung von Hurwitz gewidmet ist; indem wir seine Untersuchung recapituliren, umfassen wir zugleich die Riemann'sche, deren Methode sie sich aufs engste anschliesst und deren Resultat sie als einfachen Fall in sich begreift.

9. Unter a, m verstehen wir positive ganze Zahlen, deren letztere nicht kleiner sein soll als die erstere, und unter dem Zeichen $\zeta(s, a, m)$ die für jeden Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, convergente Reihe

$$\zeta(s, a, m) = \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+m)^s} + \frac{1}{(a+2m)^s} + \cdots . \tag{65}$$

Diese können wir zunächst mittels der bekannten Integralformel

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx$$

unter der Form eines bestimmten Integrales darstellen; in der That ergiebt sich so

$$\zeta(s, a, m) = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^\infty \sum_0^\infty{}_k e^{-(a+km)x} x^{s-1} dx$$

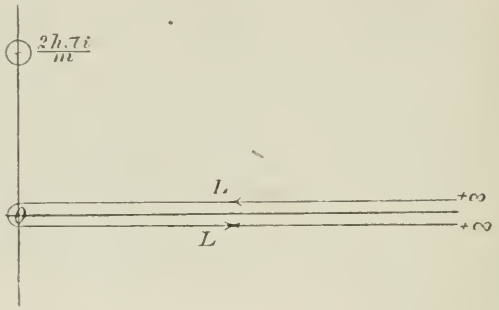
d. i.

$$\zeta(s, a, m) = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1} \cdot x^{s-1} dx . \tag{66}$$

Betrachten wir nun nach dem Vorgange von Riemann das complexe Integral

$$\int \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1} (-z)^{s-1} dz , \tag{67}$$

wenn es längs einer Linie genommen wird, die sich beliebig enge der positiven x-Axe anschliesst und den Nullpunkt beliebig nahe umschliesst, wie in beistehender Figur die Linie L



Dies Integral ist in Folge der Potenz $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$ unendlich vieldeutig; damit es eindeutig werde, wählen wir den $\log(-z)$ so, dass er für ein negatives z reell wird; in Folge davon wird, wenn $-z = re^{\psi i}$ gesetzt wird, während $-\pi < \psi < \pi$ ist, $\log(-z) = \log r + \psi i$, folglich für ein positives z auf der oberen Seite der x-Axe $\psi = -\pi$, auf der unteren $\psi = \pi$ sein. Alsdann hat das Integral (67) für jeden complexen Werth von s einen ganz bestimmten endlichen Werth, da die Funktion auf der Linie L nirgends unstetig wird. Wird aber zunächst der reelle Bestandtheil von s wieder grösser als 1 vorausgesetzt, so darf die Integration auch unendlich nahe an den Nullpunkt geführt werden, da alsdann

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)} = e^{(s-1)(\log r + \psi i)}$$

für $r = 0$ unendlich klein wird. Wir werden in diesem Falle also das Integral (67) auf folgende zwei Bestandtheile zurückführen dürfen:

$$e^{-(s-1)\pi i} \cdot \int_{\infty}^{0} \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1} e^{(s-1)\log x}\, dx + e^{(s-1)\pi i} \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1} e^{(s-1)\log x}\, dx$$

und finden somit, indem wir

$$e^{(s-1)\pi i} - e^{-(s-1)\pi i} = -2i \sin s\pi$$

setzen,

$$\int^{\bullet} \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1}(-z)^{s-1}\,dz = -2i\sin s\pi \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{(m-a)x}}{e^{mx}-1} x^{s-1}\,dx,$$

folglich mit Rücksicht auf (66) und auf die bekannte Formel

$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi} \tag{68}$$

die Gleichung:

$$\zeta(s,a,m) = \frac{i\,\Gamma(1-s)}{2\pi} \cdot \int^{\bullet} \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1} \cdot (-z)^{s-1}\,dz. \tag{69}$$

Wird nun diese, für jedes s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, aus der ursprünglichen Definition der Funktion $\zeta(s,a,m)$ hergeleitete Formel zur Definitionsgleichung dieser Funktion auch für alle übrigen Werthe von s genommen, so erhalten wir damit eine Funktion, welche in der ganzen unendlichen Ebene der complexen Veränderlichen überall endlich bestimmt ist, mit Ausnahme des Punktes $s=1$, wo sie unendlich wird. In der That bleibt, wie bemerkt, das Integral zur Rechten für jedes s endlich, und demnach hat auch $\zeta(s,a,m)$ für jedes s einen bestimmten endlichen Werth, ausgenommen etwa die Werthe von s, bei denen $\Gamma(1-s)$ unendlich wird, d. h. die Werthe $s=1,2,3,4,\ldots$ Ist aber n einer dieser Werthe, so kann man setzen

$$\Gamma(1-s) = \frac{\Delta(s)}{s-n},$$

wo $\Delta(s)$ für $s=n$ endlich bleibt. Mittels (68) findet man nämlich

$$(s-n)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\Gamma(s)} \cdot \frac{s-n}{\sin s\pi}$$

also

$$\lim_{s=n}(s-n)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{\pi\cos n\pi}$$

d. i.

$$\Delta(n) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}.$$

Demnach wird

$$\lim_{s=n}\zeta(s,a,m) = \frac{(-1)^n i}{2\pi\,\Gamma(n)} \cdot \lim_{s=n} \frac{1}{s-n} \int^{\bullet} \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1}(-z)^{s-1}\,dz.$$

Nun ist

$$(-z)^{s-1} = (-z)^{n-1} \cdot e^{(s-n)\log(-z)}$$

und man kann demnach das mit $\frac{1}{s-n}$ multiplicirte Integral, nach den steigenden Potenzen von $s-n$ entwickelt, folgendermassen schreiben:

$$\frac{1}{s-n}\int \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1}(-z)^{n-1}dz + \int \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1}(-z)^{n-1}\log(-z)dz + \cdots.$$

Da hierbei n eine positive ganze Zahl bedeutet, so ist die unter dem ersten dieser Integralzeichen stehende Funktion überall eindeutig und mit Ausnahme des Nullpunktes auch endlich, man darf daher dem Cauchy'schen Fundamentalsatze zufolge die Integration, statt sie über die Linie L auszudehnen, auf einen den Nullpunkt nahe umgebenden Kreis erstrecken. Dann wird für $n = 1$

$$\int \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1}dz = \left(e^{(m-a)z} \cdot \frac{z}{e^{mz}-1}\right)_{z=0} \int \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{m};$$

man erhält demnach

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s, a, m) = \frac{1}{m}$$

d. h. $\zeta(s, a, m)$ ist im Punkte $s = 1$ unendlich von der ersten Ordnung.

Für jeden ganzzahligen Werth $n > 1$ aber verschwindet das Integral

$$\int \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1}(-z)^{n-1}dz = \left(e^{(m-a)z} \cdot \frac{z}{e^{mz}-1}(-z)^{n-1}\right)_{z=0} \cdot 2\pi i$$

und folglich hat $\zeta(s, a, m)$ dann für $s=n$ einen endlichen, durch das zweite Glied der Entwicklung gegebenen Werth.

Nachdem dies festgestellt ist, denken wir nun unter s einen Werth, dessen reeller Bestandtheil negativ ist, so dass derjenige von $1-s$ grösser als 1 ist, und betrachten jetzt das Integral

$$\int \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1} \cdot (-z)^{s-1}dz \tag{70}$$

ausgedehnt über die gesammte Begrenzung des Flächenstücks

F, welches von der unendlichen Kreisfläche um den Nullpunkt nach Ausscheidung des von L begrenzten Streifens übrig bleibt. Innerhalb dieses Flächenstücks ist die Funktion überall endlich, mit Ausnahme der Punkte, in denen der Nenner Null wird d. h. der Punkte $\frac{2h\pi i}{m}$ für alle ganzen Zahlen h ausser Null. Auf der unendlichen Peripherie aber verschwindet das Integral; denn der Modulus des Integralelementes ist, wenn $s = \sigma + \tau i$ gesetzt wird,

$$d\psi\, r\, e^{(\sigma-1)\log r - \tau\psi} \cdot \frac{e^{-(m-a)r\cos\psi}}{\sqrt{(e^{-mr\cos\psi}-1)^2 + 4e^{-mr\cos\psi}\cdot\sin^2\frac{mr\sin\psi}{2}}},$$

wo dem zweiten Faktor auch die Gestalt gegeben werden kann:

$$\frac{e^{ar\cos\psi}}{\sqrt{(1-e^{mr\cos\psi})^2 + 4e^{mr\cos\psi}\cdot\sin^2\frac{mr\sin\psi}{2}}};$$

je nachdem nun $\cos\psi > 0$ oder < 0 ist, zeigt der erste oder der zweite dieser Ausdrücke, dass mit unendlich wachsendem r der zweite Faktor endlich bleibt oder gar, wenn $m > a$ ist, unendlich klein wird, welches letztere für den ersten Faktor immer der Fall ist, der Modulus wird also für $r = \infty$ verschwinden. Aus dieser Rücksicht folgt mittels des Fundamentalsatzes von Cauchy, dass das über die Linie L erstreckte Integral (70) auch gleich der Summe all' derjenigen Integrale gesetzt werden kann, welche — und zwar im negativen Sinne — unendlich nahe um die Punkte $z = \frac{2h\pi i}{m}$ erstreckt werden. Da aber das um $\frac{2h\pi i}{m}$ so erstreckte Integral gleich

$$\left(e^{(m-a)z}(-z)^{s-1}\cdot\frac{z-\frac{2h\pi i}{m}}{e^{mz}-1}\right)_{z=\frac{2h\pi i}{m}} \cdot \int \frac{dz}{z-\frac{2h\pi i}{m}}$$

$$= -2\pi i\cdot e^{-\frac{2ah\pi i}{m}}\left(-\frac{2h\pi i}{m}\right)^{s-1}\cdot\frac{1}{m}$$

d. i. gleich

$$-i\cdot\left(\frac{2\pi}{m}\right)^s(-h)^{s-1}\cdot e^{\left(\frac{s-1}{2}\pi-\frac{2ah\pi}{m}\right)i}$$

ist, so findet man

$$\int \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1}(-z)^{s-1}dz = -i\cdot\left(\frac{2\pi}{m}\right)^s\cdot\sum_h(-h)^{s-1}\cdot e^{\left(\frac{s-1}{2}\pi-\frac{2ah\pi}{m}\right)i}.$$

Nach der von uns getroffenen Bestimmung ist aber

$$(-h)^{s-1} = h^{s-1}\cdot e^{-(s-1)\pi i};$$

fasst man daher je zwei Glieder der Summe, welche gleichen aber entgegengesetzten Werthen von h entsprechen, zusammen, so findet man einfacher

$$\int \frac{e^{(m-a)z}}{e^{mz}-1}(-z)^{s-1}dz = -2i\cdot\left(\frac{2\pi}{m}\right)^s\cdot\sum_1^\infty h^{s-1}\cos\left(\frac{s-1}{2}\pi+\frac{2ah\pi}{m}\right).$$

Hier dürfen wir endlich, damit h alle angezeigten Werthe durchlaufe, $h = km + n$ setzen, wenn wir n alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$, k aber alle ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ annehmen lassen; da

$$\cos\left(\frac{s-1}{2}\pi+\frac{2ah\pi}{m}\right) = \cos\left(\frac{s-1}{2}\pi+\frac{2an\pi}{m}\right)$$

gefunden wird, so ergiebt sich die rechte Seite obiger Gleichung dann gleich

$$-2i\cdot\left(\frac{2\pi}{m}\right)^s\cdot\sum_n\left[\cos\left(\frac{s-1}{2}\pi+\frac{2an\pi}{m}\right)\cdot\sum_k\frac{1}{(n+km)^{1-s}}\right],$$

wo die auf k bezügliche Summe, da der reelle Bestandtheil von $1-s$ grösser als 1 ist, nichts anderes ist als die Funktion $\zeta(1-s, n, m)$.

Durch Vergleichung mit der Definitionsgleichung (69) findet man also endlich für jedes s, dessen reeller Bestandtheil negativ ist, die folgende beachtenswerthe Beziehung:

$$(71)\quad \zeta(s,a,m) = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^s\cdot\frac{\Gamma(1-s)}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^m\zeta(1-s,n,m)\cdot\cos\left(\frac{s-1}{2}\pi+\frac{2an\pi}{m}\right).$$

Vertauscht man hier s mit $1-s$, so lässt sich diese Beziehung auch folgendermassen fassen: Für jedes s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, hat man

$$(72)\quad \zeta(1-s,a,m) = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{1-s}\cdot\frac{\Gamma(s)}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^m\zeta(s,n,m)\cdot\cos\left(\frac{2an\pi}{m}-\frac{s\pi}{2}\right).$$

Für $a = m = 1$ wird $\zeta(s, a, m)$ mit der Funktion $\zeta(s)$ identisch, vorstehende allgemeine Formel aber verwandelt sich in die specielle Gleichung (62), welche Riemann für diese Funktion aus gleichen Betrachtungen hergeleitet hat.

10. Machen wir nunmehr die Anwendung dieser Resultate auf die Funktionen, welche bei der Bestimmung der Classenanzahl auftreten, und zwar zunächst für den Fall, dass die Determinante, die wir ohne quadratischen Theiler voraussetzen, $D = \pm P \equiv 1 \pmod 4$ ist.

Wir haben schon in Nr. 5 des 8. Abschnittes die Gleichung bemerkt:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2^s}} \cdot \sum \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s} = \sum \left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m^s},$$

wenn links die Summation auf alle positiven zu $2P$, rechts auf alle solche zu P primen Zahlen erstreckt wird. Setzen wir also für den vorliegenden Fall

$$F(s, D) = \frac{1}{1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2^s}} \cdot \sum \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

so können wir dafür auch schreiben

$$F(s, D) = \sum \left(\frac{m}{P}\right) \cdot \frac{1}{m^s};$$

m aber durchläuft alle seine Werthe, wenn man in der Formel $m = \lambda + kP$ für λ die relativen Primzahlen zu P, welche $< P$ sind, für k alle nicht negativen ganzen Zahlen setzt. Demnach kann man auch schreiben:

$$F(s, D) = \sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \cdot \zeta(s, \lambda, P) \tag{73}$$

und erhält dann durch unmittelbare Anwendung der Formel (72), sobald der reelle Theil von s grösser als 1 ist, die Gleichung

$$F(1-s, D) = \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} \cdot \sum_{n} \xi(s, n, P) \sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \cos\left(\frac{2\lambda n \pi}{P} - \frac{s\pi}{2}\right), \tag{74}$$

wo die Summation bezüglich n auf alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots P$ zu erstrecken ist. Nun folgt aber aus der Gaussischen Summenformel

$$\sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) e^{\frac{2n\lambda\pi i}{P}} = \left(\frac{n}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P},$$

wenn zunächst $D > 0$ also $P \equiv 1 \pmod 4$ ist,

$$\sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \cos \frac{2n\lambda\pi}{P} = \left(\frac{n}{P}\right) \sqrt{P}, \qquad \sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \sin \frac{2n\lambda\pi}{P} = 0$$

und daher

$$\sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \cos \left(\frac{2n\lambda\pi}{P} - \frac{s\pi}{2}\right) = \left(\frac{n}{P}\right) \sqrt{P} \cdot \cos \frac{s\pi}{2};$$

dagegen, wenn $D < 0$ also $P \equiv 3 \pmod 4$ ist, umgekehrt

$$\sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \cos \frac{2n\lambda\pi}{P} = 0, \qquad \sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \sin \frac{2n\lambda\pi}{P} = \left(\frac{n}{P}\right) \sqrt{P}$$

und daher

$$\sum_{\lambda} \left(\frac{\lambda}{P}\right) \cos \left(\frac{2n\lambda\pi}{P} - \frac{s\pi}{2}\right) = \left(\frac{n}{P}\right) \sqrt{P} \cdot \sin \frac{s\pi}{2}.$$

Die rechte Seite der Gleichung (74) nimmt also je nach diesen beiden Fällen die Gestalt

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} \sqrt{P} \cdot \cos \frac{s\pi}{2} \cdot \sum_{n}' \left(\frac{n}{P}\right) \zeta(s, n, P)$$

oder die Gestalt

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} \sqrt{P} \cdot \sin \frac{s\pi}{2} \cdot \sum_{n}' \left(\frac{n}{P}\right) \zeta(s, n, P)$$

an, wo die Summation nach n auch nur über die zu P primen Zahlen $< P$ ausgedehnt zu werden braucht, da $\left(\frac{n}{P}\right)$ für die übrigen verschwindet. Mit Rücksicht auf (73) erhält man demnach die Beziehungen:

Wenn $D > 0$ ist:

$$(75a)\quad F(1-s, D) = \frac{\Gamma(s)}{\pi} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} \sqrt{P} \cdot \cos \frac{s\pi}{2} \cdot F(s, D),$$

wenn $D < 0$ ist:

$$(75b)\quad F(1-s, D) = \frac{\Gamma(s)}{\pi} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1-s} \sqrt{P} \cdot \sin \frac{s\pi}{2} \cdot F(s, D).$$

Ganz analoge Betrachtungen finden aber statt in den drei übrigen Fällen, welche die Determinante D darbieten kann. In ihnen verstehen wir unter $F(s, D)$ den Ausdruck

$$F(s, D) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

ausgedehnt über alle positive relative Primzahlen zu $2D$. Im Falle $D = \pm P \equiv 3 \pmod 4$ kommen wir auf die Funktion $\zeta(s, a, m)$ zurück, wenn wir $n = 4Pk + \lambda$ setzen und λ die zu $4P$ primen Zahlen $< 4P$ durchlaufen lassen, in den beiden andern Fällen, wenn $n = 8Pk + \lambda$ gesetzt wird und λ die zu $8P$ primen Zahlen $< 8P$ durchläuft; statt auf die Gaussischen Summen haben wir uns in diesen Fällen resp. auf die Formeln (29), (30) oder (31) des 8. Abschn. zu berufen. Die Formeln, zu welchen wir so in diesen drei Fällen geführt werden, sind den Formeln (75) vollkommen analog und sie können zugleich mit diesen letzteren in zwei Gleichungen zusammengefasst werden, welche demnach für jede Determinante D ohne quadratische Theiler (einschliesslich $D = 1$) Giltigkeit haben.

Sei Δ der Absolutwerth der Determinante D und bedeute k den Werth 1 im ersten der vier Fälle, den Werth 4 in den drei übrigen, so ist

wenn $D > 0$ ist

$$(76a)\quad F(1-s, D) = \frac{\Gamma(s)}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k\Delta}\right)^{1-s}\sqrt{k\Delta}\cdot\cos\frac{s\pi}{2}\cdot F(s, D),$$

wenn $D < 0$ ist

$$(76b)\quad F(1-s, D) = \frac{\Gamma(s)}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k\Delta}\right)^{1-s}\sqrt{k\Delta}\cdot\sin\frac{s\pi}{2}\cdot F(s, D).$$

Die zweite dieser Formeln umfasst die erste der Schlömilch'schen als einen speciellen, der Annahme $D = -1$ entsprechenden Fall, wie sogleich daraus zu ersehen, dass $f(s)$ auch

$$f(s) = \sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s}$$

geschrieben werden kann, wenn die Summe auf alle ungeraden positiven Zahlen erstreckt wird.

Dem allgemeinen Ergebnisse kann jedoch eine bemerkenswerthe andere Form gegeben werden. Erinnern wir zu diesem Zwecke an zwei bekannte Formeln aus der Lehre der Γ-Funktionen:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

und

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}-2x}\cdot\Gamma(2x),$$

welche letztere nur einen besonderen Fall des Gaussischen Multiplikationssatzes ausmacht. Setzen wir in letzterer $x = s/2$, so kommt

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = (2\pi)^{1/2} \cdot 2^{1/2 - s} \cdot \Gamma(s),$$

und die erstere Formel liefert die folgenden zwei:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{s\pi}{2}}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos \frac{s\pi}{2}}.$$

Mit Benutzung der ersten und dritten dieser Hilfsformeln überzeugt man sich ohne Mühe, dass

wenn $D > 0$ ist, wegen (76a) der Ausdruck

$$F(s, D) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \left(\frac{k\Delta}{\pi}\right)^{s/2}, \tag{77a}$$

mit Benutzung der ersten und zweiten der Hilfsformeln, dass, wenn $D < 0$ ist, wegen (76b) der Ausdruck

$$F(s, D) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left(\frac{k\Delta}{\pi}\right)^{s/2} \tag{77b}$$

bei der Vertauschung von s mit $1 - s$ ungeändert bleibt.

Insbesondere also ergiebt sich für den Fall $D = 1$, in welchem $F(s, D)$ mit $\zeta(s)$ identisch ist, der schon von Riemann ausgesprochene Satz, dass das Produkt

$$\zeta(s) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \pi^{-s/2} \tag{77c}$$

bei der Vertauschung von s mit $1 - s$ sich nicht ändert.

Wir fügen diesen Sätzen über die Funktion $F(s, D)$ noch die Bemerkung hinzu, dass den analytischen Eigenschaften zufolge, welche wir für die Funktionen $\zeta(s, a, m)$ nachgewiesen haben, für jede Determinante D, welche von 1 verschieden und frei von quadratischen Theilern ist, die Funktion $F(s, D)$ für jedes s eindeutig und auch für jeden endlichen Werth von s endlich ist. Denn der einzige Werth, für welchen letzteres bezweifelt werden könnte, wäre der Werth $s = 1$, in welchem wir fanden

$$\lim_{s=1} (s-1)\,\zeta(s, a, m) = \frac{1}{m};$$

dementsprechend fände man hier, wenn wir zuerst den Fall $D = +P \equiv 1 \pmod 4$ behandeln, nach (73)

$$\lim_{s=1} (s-1)\,F(s, D) = \frac{1}{P}\sum_{\lambda}\left(\frac{\lambda}{P}\right)$$

d. h. aber, wenn D nicht 1 ist, gleich Null (s. Formel (3) des 3. Abschnitts). In gleicher Weise fänden wir für diesen Grenzwerth im zweiten Falle

$$\frac{1}{4P}\cdot\sum\left(\frac{D}{\lambda}\right),$$

und in den beiden andern Fällen

$$\frac{1}{8P}\cdot\sum\left(\frac{D}{\lambda}\right),$$

diese Summen in demselben Umfange genommen, wie in der Formel (6) ebendaselbst, entsprechend den hier betrachteten speciellen Formen von D, und folglich gleich Null. Hieraus ist also ersichtlich, dass $F(s, D)$, solange D von 1 verschieden ist, auch für $s = 1$ endlich bleibt. Da somit $F(s, D)$ überall endlich ist, so folgt aus den Beziehungen (76), dass die Werthe von s, für welche $\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}$ resp. $\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}$ unendlich sind, Nullpunkte der Funktion $F(s, D)$ sind.

Ist also $D > 0$, so verschwindet $F(s, D)$, wenn $s = 0$ oder eine negative *gerade* Zahl ist,

ist dagegen $D < 0$, so verschwindet $F(s, D)$, wenn s eine negative *ungerade* Zahl ist.

Dagegen wird für $D = 1$

$$F(s, D) = \zeta(s)$$

und man weiss nach Abschnitt 3, dass diese Funktion für $s = 1$ unendlich wird in der Weise, dass

$$\lim_{s=1} (s-1)\,\zeta(s) = 1$$

ist.

Zwölfter Abschnitt.

Die Häufigkeit der Primzahlen.

1. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Ergebnisse um so zuverlässiger zu sein pflegen, je grösser die Anzahl der Fälle oder Ereignisse ist, aus denen sie erschlossen werden, hat längst schon das Bedürfniss empfunden, die mit jener Anzahl immer wachsende Complicirtheit der Ausdrücke, mittels deren die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen sind, vermeiden, diese nämlich durch einfachere ersetzen zu können, welche den angenäherten Werth der ersteren ergeben. Damit dies zulässig sei, müssen sie ihnen mit der wachsenden Anzahl der Fälle stets näher und näher kommen, ganz ähnlich wie die Asymptote einer Curve sich unendlich der letzteren annähert, wenn man immer weiter auf ihr fortschreitet. Man darf daher diese einfacheren Ausdrücke auch als asymptotische Ausdrücke oder Gesetze für die zusammengesetzteren bezeichnen, muss dies aber im allgemeinen in etwas weiterem Sinne thun als in der Geometrie: denn die Annäherung besteht hier im allgemeinen nicht sowohl darin, das der Unterschied zwischen den Ausdrücken und ihren asymptotischen Gesetzen gegen die Null, sondern meist nur darin, dass das Verhältniss zwischen beiden gegen die Einheit convergirt.

Bei den Berechnungen dieser Art spielen zwei berühmte Formeln eine grosse Rolle, die wir hier als bekannt voraussetzen müssen. Die erste ist die Euler'sche Summenformel, von welcher wir jedoch nur den speciellen Fall gebrauchen, der in nachstehender Gleichung sich ausspricht:

$$(1) \qquad f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = C+\int f(n)\,dn+\tfrac{1}{2}f(n)+\tfrac{1}{12}f'(n)\cdots$$

wo C eine, von der Natur der Funktion f abhängige Constante bezeichnet. Ist insbesondere $f(x)=\frac{1}{x}$, so nimmt sie die besondere Gestalt an

$$(1\,a) \qquad \sum_1^n \frac{1}{m} = E+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\cdots,$$

worin E die sogenannte Euler'sche Constante ist, welche den Werth des Integrales

$$E=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=-\Gamma'(1)$$

ergiebt. Ist ferner $f(x)=\frac{1}{x^2}$, so erhält man die Gleichung

$$(1\,b) \qquad \sum_1^n \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+\cdots$$

Von diesen zwei Formeln werden wir mehrfach Gebrauch machen.

Die andere der gedachten Formeln ist die aus der Eulerschen ableitbare Formel von Stirling, welche selbst als ein asymptotisches Gesetz angesehen werden darf. Die Stirlingsche Formel*) besagt, dass, wenn n eine positive ganze Zahl ist,

$$(2) \qquad \log 1\cdot 2\cdot 3\cdots n=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}+\frac{\theta}{12n}$$

gesetzt werden kann; unter θ verstehen wir hier und in allem Folgenden einen positiven echten Bruch, dessen

*) Serret hat die Stirling'sche Formel auf sehr einfache Weise nur durch Umformung der bekannten Gleichung, durch welche Wallis die Zahl π als unendliches Produkt definirt (in seinem Handbuch der höheren Algebra, deutsch von Wertheim, 2. Bd. S. 151, oder auch Lehrbuch der Differenzial- u. Integral-Rechnung, deutsch von Harnack, 2. Th. S. 198 ff.) hergeleitet.

Werth aber von einer Gleichung zur anderen wechseln kann.

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich z. B. sogleich der Coefficient des mittelsten Gliedes in der binomischen Entwicklung von $(a+b)^{2n}$, nämlich

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots 2n}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots n)^2},$$

dessen unmittelbare Berechnung mit wachsendem n auf unüberwindliche Schwierigkeiten stossen würde, sehr einfach mit beliebiger Annäherung berechnen. Denn aus (2) folgt

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\log 1.2.3.\ \ldots\ 2n - 2.\log.1.2.3.\ \ldots\ n \\ &= 2n\log 2 - \frac{1}{2}\log \pi n + \frac{\theta - 4\theta'}{24n},\end{aligned}$$

(θ, θ' zwei echte Brüche), also bis auf ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{n}$ genau

$$\log \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots 2n}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots n)^2} = 2n\log 2 - \frac{1}{2}\log n\pi$$

d. i.

$$(4)\qquad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots 2n}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots n)^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}},$$

ein offenbar sehr viel einfacherer asymptotischer Ausdruck.

2. Zu solchen asymptotischen Gesetzen giebt nun auch die Zahlentheorie ganz besonders reichliche Veranlassung, wie wir dies im folgenden Abschnitte bei der Betrachtung der sogenannten mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen näher ersehen werden; für den Augenblick beschränken wir uns auf die Frage nach dem Vorkommen der Primzahlen in der natürlichen Zahlenreihe. Die Abzählung der Primzahlen d. i. die Ermittelung ihrer Anzahl unterhalb einer gegebenen Grenze weist sehr grosse Unregelmässigkeiten auf; während im allgemeinen die Dichtigkeit derselben immer geringer werden muss, da, je mehr Primzahlen schon angetroffen worden, die Menge der dazwischen tretenden zusammengesetzten Zahlen sich häuft, so folgen sich doch immer wieder zwei Primzahlen in sehr nahem Abstande, z. B. nur um zwei Einheiten entfernt; und es ist schwer ein Gesetz erkennbar, nach welchem

ihre Häufigkeit sich bestimmt. Bevor ein solches gefunden, sah man sich naturgemäss zur Aufstellung eines Ausdruckes aufgefordert, welcher wenigstens annähernd und je weiter man zählt, um so angenäherter die Menge der vorhandenen Primzahlen anzugeben vermag. Legendre hat zuerst durch Induction ein solches asymptotisches Gesetz für die Häufigkeit der Primzahlen ausfindig gemacht und ihre Menge unterhalb der Grenze x durch die Formel

$$(5) \qquad \Pi(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}$$

bestimmt. Dirichlet hat sodann in einer Arbeit, welche für die Untersuchung der asymptotischen Gesetze in der Zahlentheorie den eigentlichen Ausgangspunkt bezeichnet, von der aber nur eine kurze Notiz erschienen ist*), u. a. auch die Legendre'sche Formel, wie er angiebt, hergeleitet. Unabhängig von ihm hat Tschebischeff sich mit der gleichen Frage beschäftigt**). In seiner bezüglichen Arbeit leitet er zunächst aus Integralbetrachtungen folgenden Hauptsatz her:

Ist $\Pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen unterhalb der Grenze x, so werden die Ungleichheiten

$$\Pi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x} \quad \text{und} \quad \Pi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

jede für unzählige Werthe von x zwischen 2 und ∞ erfüllt, wie klein das positive α und wie gross die positive ganze Zahl n gedacht werden.

Aus diesem Satze zieht Tschebischeff sodann den Schluss, dass $\frac{x}{\Pi x} - \log x$ für $x = \infty$ keine von -1 verschiedene Constante zur Grenze haben und hiernach Legendre's Formel nicht unbegrenzt zulässig sein könne. Wenn man sagt, eine Grösse A sei von der Ordnung $\frac{x}{\log^n x}$, wenn bei unendlich wachsendem x das Verhältniss von A zu $\frac{x}{\log^m x}$

*) Dirichlet in den Monatsber. der Berl. Acad. v. J. 1838.

**) Tschebischeff, sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, in Liouville's Journal Bd. 17 p. 341.

für $m > n$ unendlich gross, dagegen für $m < n$ unendlich klein wird, so lässt sich zeigen, dass Legendre's Ausdruck nicht genau ist bis zu den Grössen von der Ordnung $\frac{x}{\log^2 x}$ einschliesslich, dass vielmehr unter allen Funktionen von der Form $\frac{x}{A \log x + B}$ dies nur die Funktion $\frac{x}{\log x - 1}$ ist. Man bemerke, dass zufolge der, durch partielle Integration leicht zu erhaltenden Gleichung

$$\int \frac{dx}{\log x} = \frac{x}{\log x} + \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)x}{\log^n x}$$

$$+ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \int \frac{dx}{\log^{n+1} x}$$

die Ausdrücke $\frac{x}{\log^m x}$ die successiven Entwicklungsglieder des Integrals

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x} \tag{6}$$

sind. Dieser Umstand in Verbindung mit dem vorher gegebenen Satze veranlassen Tschebischeff, statt des Legendreschen Ausdruckes das Integral (6) als asymptotisches Gesetz für $\Pi(x)$ einzuführen. In der That zeigen die Tafeln der Primzahlen, wie schon Gauss bemerkt hatte*), dass es zu solchem Zwecke sich annähernd mit gleichem Erfolge eignet, wie die von Legendre vorgeschlagene Formel. Zwar weicht die Legendre'sche Formel innerhalb der drei ersten Millionen weniger von der wahren Anzahl der Primzahlen ab, als das Integral, aber die Zählung innerhalb dieser Grenzen ist zur Feststellung, welche der beiden Formeln der andern überlegen ist, nicht zureichend; erst eine Vergleichung weit genug über diese Grenzen hinaus könnte darüber entscheiden. Es ergiebt sich dies aus der einfachen Bemerkung, welche Tschebischeff macht, dass der Unterschied

*) Gauss' Brief an Encke v. 24. 12. 1849, s. ges. Werke Bd. II p. 444.

$$\Delta(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}$$

mit der Ableitung

$$\Delta'(x) = \frac{0{,}08366 \log x - (1{,}08366)^2}{\log x\,(\log x - 1{,}08366)^2},$$

welche für

$$\log x = \frac{(1{,}08366)^2}{0{,}08366} \quad \text{d. i. für } x = e^{\frac{(1{,}08366)^2}{0{,}08366}} = 1\,247\,646, \ldots$$

verschwindet, während $\Delta''(x)$ alsdann positiv ist, für diesen Werth von x ein Minimum ist und von ihm an bei wachsendem x fortdauernd zunimmt, da $\Delta'(x)$ dann positiv bleibt. Neuerdings hat Meissel*) die Anzahl der Primzahlen nach einer besonderen Methode sehr viel weiter, nämlich bis an die Grenzen der ersten Milliarde berechnet, es scheint aber, dass er der eben besprochenen Frage dabei keine Erörterung gewidmet hat. —

Vermittelst der Formel

$$\Pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\log x}$$

hat Tschebischeff zwei asymptotische Ausdrücke bestätigt, welche auch schon Legendre aus seiner Formel für die beiden Ausdrücke

$$\sum \frac{1}{q} \quad \text{und} \quad \prod \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q}}\right),$$

wenn sie über alle Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grenze erstreckt werden, hergeleitet hatte. Diese interessanten asymptotischen Gesetze wollen wir hier ohne jede Annahme eines Ausdruckes für $\Pi(x)$ auf völlig strengem Wege beweisen, indem wir uns einer Arbeit von Mertens**) an-

*) Meissel: Ueber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen; Berechnung der Menge der Primzahlen, welche innerhalb der 1. Million natürlicher Zahlen vorkommen; Berechnung der Menge der Primzahlen, welche innerhalb der ersten Milliarde natürlicher Zahlen vorkommen, in Math Annalen Bd. 2, 3, 25, s. auch Bd. 21 u. 23.

**) Mertens, ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 78 S. 46.

schliessen, die auch noch andere beachtenswerthe Resultate enthält. Sie beruht auf derselben Grundformel, wie eine zweite, die Menge der Primzahlen betreffende Abhandlung von Tschebischeff*), von der wir zu sprechen haben. Diese Grundformel wollen wir demnach zuerst beweisen, indem wir dabei eine Funktion zu Hilfe nehmen, welche Césaro eingeführt hat**).

3. Wir schicken einen allgemeinen Satz voraus, den wir auch später gebrauchen werden.

Sei x ein positiver Werth und $[x]$ das grösste darin enthaltene Ganze, $f(x)$ und $F(x)$ seien Funktionen, zwischen denen für jedes positive x die Beziehung besteht:

$$F(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f[x] \quad (7)$$

***).

Aus dieser Annahme folgt für jede positive ganze Zahl i

$$F\left(\frac{x}{i}\right) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f\left[\frac{x}{i}\right]$$

und daher auch

$$\sum_{i=1}^{[x]} F\left(\frac{x}{i}\right) = \sum_{i=1}^{[x]} \left(f(1) + f(2) + \cdots + f\left[\frac{x}{i}\right] \right).$$

Ist nun k eine Zahl $< [x]$, so kommt in der Summe rechts offenbar das Glied $f(k)$ so oft vor, als $k \leqq \frac{x}{i}$ d. h. $i < \frac{x}{k}$ ist, also $\left[\frac{x}{k}\right]$ Mal, und die Gleichung lässt sich demnach auch folgendermassen schreiben:

$$\sum_{1}^{[x]} F\left(\frac{x}{i}\right) = \sum_{1}^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] \cdot f(k). \quad (8)$$

In dieser zuerst von Dirichlet gegebenen Formel besteht der gedachte allgemeine Satz.

---

*) Tschebischeff, mémoire sur les nombres premiers, Liouville's Journal Bd. 17 p. 366.

**) Césaro, sur une fonction ν, in seiner bereits erwähnten Schrift sur diverses questions d'arithmétique.

***) $f[x]$ steht hier, wie im Folgenden in ähnlichen Fällen, kürzer für $f([x])$.

Nunmehr bezeichnen wir mit Tschebischeff durch das Zeichen $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen $q < x$. Sei alsdann für eine solche Primzahl q^a die höchste Potenz, welche noch nicht grösser ist als x, also

$$q^a < x < q^{a+1}$$

und folglich

$$x^{\frac{1}{a+1}} < q < x^{\frac{1}{a}},$$

so findet sich $\log q$ einmal als Summande vor in jeder der Funktionen $\vartheta(x)$, $\vartheta\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$, $\ldots$ $\vartheta\left(x^{\frac{1}{a}}\right)$, aber nicht mehr in den Funktionen $\vartheta\left(x^{\frac{1}{a+1}}\right)$, $\vartheta\left(x^{\frac{1}{a+2}}\right)$, $\ldots$; $\log q$ findet sich demnach in der Summe

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \vartheta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots, \tag{9}$$

welche fortzusetzen ist, bis das Argument der Funktion ϑ kleiner als 2 wird, wo dann die Funktion den Werth 0 hat, genau a Mal als Summande vor.

Ferner setzen wir mit Césaro $\nu(n) = 0$, so oft n eine aus mehreren Primzahlen zusammengesetzte ganze Zahl ist, dagegen $\nu(n) = \log q$, wenn $n = q^k$ eine Primzahlpotenz ist; $\nu(1)$ wird entsprechend gleich $\log 1$ d. i. gleich 0 gesetzt. Da nun in der Reihe $1, 2, 3, \ldots [x]$ von q nur die Potenzen $q, q^2, q^3, \ldots q^a$ vorkommen, so findet sich in der Summe

$$\nu(1) + \nu(2) + \nu(3) + \cdots + \nu[x]$$

$\log q$ genau a Mal vor.

Da dieses, wie das vorige Resultat, für jede der Primzahlen $q < x$ gilt und alle Zahlen $\leqq x$ nur aus solchen zusammengesetzt sind, so ergiebt sich sogleich die Uebereinstimmung der bezeichneten beiden Summen, nämlich

$$\psi(x) = \nu(1) + \nu(2) + \nu(3) + \cdots + \nu[x] \tag{10}$$

für jeden positiven Werth von x. Hiernach folgt aber aus dem voraufgeschickten Hilfssatze die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{[x]} \psi\left(\frac{x}{i}\right) = \sum_{k=1}^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] \nu(k),$$

in welcher man die linke Seite auch durch die Summe

$$\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots$$

fortgesetzt, bis sie abbricht, was geschehen wird, sobald das Argument von ψ unter 2 herabsinkt, und die rechte Seite durch

$$\sum_{q \leq x} \log q \left(\left[\frac{x}{q}\right] + \left[\frac{x}{q^2}\right] + \left[\frac{x}{q^3}\right] + \cdots \right)$$

ersetzen kann, da $\nu(k)$ nur für solche Werthe von k, welche Primzahlpotenzen sind, von 0 verschieden, für alle Potenzen derselben Primzahl q aber gleich $\log q$ ist. Somit nimmt die vorige Gleichung die Gestalt an:

$$(11) \quad \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots = \sum_{q \leq x} c(x, q) \cdot \log q,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$(12) \qquad c(x, q) = \left[\frac{x}{q}\right] + \left[\frac{x}{q^2}\right] + \left[\frac{x}{q^3}\right] + \cdots,$$

die Reihe fortgesetzt, bis sie abbricht.

Nun bezeichnet aber der letztere Ausdruck genau, wie oft die Primzahl q in dem Produkte

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots [x]$$

aufgeht oder wie oft $\log q$ in dem entwickelten Logarithmus

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots [x]$$

als Summande auftritt; und da andere Primzahlen als die mit q bezeichneten in diesem Produkt nicht enthalten sind, so findet sich offenbar die Beziehung

$$(13) \quad \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots [x] = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots.$$

Dies ist die Grundformel von Tschebischeff. —

Diese Grundformel benutzt nun Tschebischeff in der eben genannten Abhandlung, um für die Menge der Primzahlen in einem gegebenen Intervall der natürlichen Zahlenreihe zwei Grenzen aufzustellen. Er leitet zunächst aus ihr für $\psi(x)$ zwei Ungleichheiten her:

$$\psi(x) > T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) \geqq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right),$$

in denen zur Abkürzung

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots [x] = T(x)$$

gesetzt ist. Schliesst man aber $T(x)$ selbst durch die Stirling'sche Formel in Grenzen ein (s. folgende Nr.), so nehmen diese Ungleichheiten die Form an:

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2}\log x - 1$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < Ax + \frac{5}{2}\log x,$$

wo

$$A = \log \frac{2^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot 5^{1/5}}{30^{1/30}}$$

ist. Aus ihnen leitet Tschebischeff für die Funktion $\theta(x)$ die beiden Grenzen her:

$$\theta_2(x) < \theta(x) < \theta_1(x), \tag{14}$$

wobei

$$\begin{cases} \theta_1(x) = \frac{6}{5}Ax - Ax^{1/2} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2 \\ \theta_2(x) = Ax - \frac{12}{5}Ax^{1/2} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3 \end{cases} \tag{15}$$

ist. Sind aber l, $L > l$ gegebene positive Werthe und m die Anzahl der Primzahlen $> l$ und $\leqq L$, so wird

$$m \log l < \theta(L) - \theta(l) < m \log L$$

d. h.

$$\frac{\theta(L) - \theta(l)}{\log L} < m < \frac{\theta(L) - \theta(l)}{\log l} \tag{16}$$

sein. Durch Umformung dieser Ungleichheiten mittels der Ungleichheiten (14) erhält man die zwei Grenzen, in welche Tschebischeff die Anzahl der innerhalb des Intervalls l bis L enthaltenen Primzahlen beschlossen hat. Ihre Ausdrücke sind aber so arg complicirt, dass sich aus ihnen irgend welcher Schluss auf die Häufigkeit der Primzahlen nicht ableiten lässt. —

4. Indem wir uns daher nun den Untersuchungen von Mertens zuwenden, ziehen wir zuvörderst aus der Grundformel von Tschebischeff in Verbindung mit der Stirlingschen Gleichung den ersten der beiden Mertens'schen Hilfssätze.

Durch eine leichte Umformung nimmt nämlich letztere Gleichung die Gestalt an:

$$\log 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \log\sqrt{2\pi} + \tfrac{1}{2} + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)(\log n - 1) + \frac{\theta}{12\,n}$$

und, wenn man n in $n+1$ verwandelt, auch die folgende Gestalt:

$$\log 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \log\sqrt{2\pi} - \tfrac{1}{2} + \left(n+1-\tfrac{1}{2}\right)\Big(\log(n+1)-1\Big) + \frac{\theta}{12\,(n+1)}.$$

Bedeutet nun wieder x einen positiven Werth und $[x]$ das grösste darin enthaltene Ganze, so folgen aus diesen beiden Gleichungen die folgenden Ungleichheiten:

$$\log 1\cdot 2\cdot 3\cdots [x] < \log\sqrt{2\pi} + \tfrac{1}{2} + \left(x+\tfrac{1}{2}\right)(\log x - 1) + \tfrac{1}{12}$$

d. i.

$$< \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x + \tfrac{1}{2}\log x + \tfrac{1}{12}$$

und

$$\log 1\cdot 2\cdot 3\cdots [x] > \log\sqrt{2\pi} - \tfrac{1}{2} + \left(x-\tfrac{1}{2}\right)(\log x - 1)$$

d. i.

$$> \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x - \tfrac{1}{2}\log x.$$

Durch Verwandlung von x in $\frac{x}{2}$ in der letzteren und durch zwiefache Subtraction der so entstehenden Ungleichheit von der ersteren geht die nachfolgende hervor:

$$\log 1\cdot 2\cdot 3\cdots [x] - 2\log 1\cdot 2\cdot 3\cdots \left[\tfrac{x}{2}\right]$$

$$< x\log 2 + \tfrac{3}{2}\log x - \log\sqrt{2\pi} - \log 2 + \tfrac{1}{12}$$

d. i. $< x$, wenn x gross genug gedacht wird; eine genauere Rechnung zeigt, dass dies schon der Fall ist, wenn $x > 4$ ist. Man findet daher alsdann die Ungleichheit

$$\psi(x) - \psi\left(\tfrac{x}{2}\right) + \psi\left(\tfrac{x}{3}\right) - \psi\left(\tfrac{x}{4}\right) + \cdots < x$$

und da die Funktion $\theta(x)$ und somit offenbar auch $\psi(x)$ zugleich mit x abnimmt, einfacher noch

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) < x.$$

In gleicher Weise aber ist

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) < \frac{x}{2}$$

$$\psi\left(\frac{x}{4}\right) - \psi\left(\frac{x}{8}\right) < \frac{x}{4}$$

. . . . . .

woraus durch Addition endlich

$$\psi(x) < x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \cdots,$$

wo die Reihe unendlich fortgesetzt werden darf, d. h. $\psi(x) < 2x$ hervorgeht. Umsomehr also findet die Ungleichheit statt:

(17) $$\theta(x) < 2x$$

oder

(18) $$\frac{1}{x}\sum_{q \leq x} \log q < 2.$$

Nachdem wir dies festgestellt haben, kehren wir zur Definitionsgleichung (12) zurück, in welcher wir jetzt unter x eine positive ganze Zahl n verstehen wollen. Zufolge der Bedeutung der Symbole zur Rechten ergeben sich aus ihr unmittelbar die Ungleichheiten

(19) $$\frac{n}{q} - 1 < e(n, q) < n\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots\right)$$

und nun weiter die folgenden:

$$n\,\frac{\log q}{q} - \log q < e(n, q)\log q < n\left(\frac{\log q}{q} + \frac{\log q}{q^2} + \cdots\right)$$

also auch, wenn über alle Primzahlen $q \leq n$ summirt und (11) wie (13) beachtet wird,

$$n\sum\frac{\log q}{q} - \sum \log q < \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$
$$< n\left(\sum\frac{\log q}{q} + \sum\frac{\log q}{q^2} + \cdots\right).$$

Ersetzt man nach der Stirling'schen Formel das mittlere Glied durch

$$\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{\vartheta}{12n}$$

und theilt die Ungleichheiten durch n, so führt man sie ohne Mühe in die folgenden über:

$$(20)\quad \begin{cases} 1 - \frac{1}{2n}\log 2\pi n - \frac{\theta}{12n^2} - \frac{1}{n}\sum \log q < \log n - \sum \frac{\log q}{q} \\ \log n - \sum \frac{\log q}{q} < 1 - \frac{1}{2n}\log 2\pi n - \frac{\theta}{12n^2} + \sum \frac{\log q}{q^2} \\ \qquad\qquad + \sum \frac{\log q}{q^3} + \cdots \end{cases}$$

Nun ist $1 - \frac{1}{2n}\log 2\pi n - \frac{\theta}{12n^2} > 0$, wie sich ergiebt, wenn man erwägt, dass, da $n \geqq 2$ gedacht ist,

$$\frac{\log 2\pi n}{2n} = \frac{\log 2n}{2n} + \frac{\log \pi}{2n} < \frac{\log 4}{4} + \frac{\log 4}{4} < \log 2$$

und

$$\frac{\theta}{12n^2} < \frac{1}{48}$$

also

$$\frac{\log 2\pi n}{2n} + \frac{\theta}{12n^2} < \log 2 + \frac{1}{48} < 1$$

ist*). Andererseits ist

$$\sum \frac{\log q}{q^2} + \sum \frac{\log q}{q^3} + \sum \frac{\log q}{q^4} + \cdots$$
$$< \frac{3}{4}\left(\sum_2^\infty \frac{\log q}{q^2} + \sum_2^\infty \frac{\log q}{q^4} + \cdots\right);$$

aus der Euler'schen Formel

$$\prod_2^x \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}} = \sum_1^x \frac{1}{n^s}$$

aber folgt durch logarithmische Differenzirung nach s

$$\frac{\sum_1^x \frac{\log n}{n^s}}{\sum_1^x \frac{1}{n^s}} = \sum_2^x \frac{\frac{\log q}{q^s}}{1 - \frac{1}{q^s}} = \sum_2^x \frac{\log q}{q^s}\left(1 + \frac{1}{q^s} + \cdots\right),$$

also für $s = 2$

*) Diese Bemerkung, durch welche die Beschränkung auf die Werthe $n \geqq 5$, die in der Mertens'schen Arbeit seinen Resultaten auferlegt wird, aufgehoben wird, verdanke ich einer brieflichen Mittheilung von seiner Seite.

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{\log q}{q^2}+\sum_{2}^{\infty}\frac{\log q}{q^4}+\cdots=\frac{\sum_{1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}}{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

und hier ist endlich

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

während

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}=0{,}9375482543\ldots$$

ist*). Aus alle diesem geht hervor, dass den Ungleichheiten (20) die einfachere Gestalt gegeben werden kann

$$-\frac{1}{n}\sum_{q<n}\log q<\log n-\sum_{q<n}\frac{\log q}{q}<2$$

und da nach dem ersten Mertens'schen Hilfssatze die linke Seite numerisch kleiner als 2 ist, findet man so den zweiten Mertens'schen Hilfssatz: Es ist immer, wenn δ einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet,

$$\log n=\sum_{q<n}\frac{\log q}{q}+2\delta \quad (21)$$ **).

*) S. Gauss Disqu. Arithm. p. 364.

**) In seiner Abhandlung sur diverses questions d'arithmétique, Note 20 (sowie auch in der Vorrede) meint Herr Césaro, dass das hier — nur mit einigen unwesentlichen Veränderungen — wiedergegebene Räsonnement von Hrn. Mertens einen Fehler enthalte, der es gänzlich umwerfe. Er schliesst nämlich folgendermassen: Aus (12) gehen, wenn

$$q^a<n<q^{a+1}$$

gesetzt wird, die Ungleichheiten hervor

$$n\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots\right)-a<e(n,q)<n\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots\right)$$

oder, da $a=\left[\frac{\log n}{\log q}\right]$ ist, umsomehr die folgenden:

$$n\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots\right)-\frac{\log n}{\log q}<e(n,q)<n\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots\right) \quad (19a)$$

5. Von diesen Sätzen ausgehend kann man nun nach Mertens die Summe

$$\sum_{q<x}\frac{1}{q}$$

ermitteln, indem man hierzu die Summe

$$f(x)=\sum_{q<x}\frac{\log q}{q}$$

zu Hilfe nimmt. Das Princip dieser Mertens'schen Ermittlung besteht in einer eigenthümlichen Umformung, welche mittels der einfachen Bemerkung, dass

$$\frac{f(n)-f(n-1)}{\log n}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n}$$

ist, je nachdem n eine zusammengesetzte oder eine Primzahl ist, vorgenommen werden kann. Aus der oben benutzten Euler'schen Formel folgt nämlich zunächst, wenn $s=1+\varrho$ gesetzt und der im 3. Abschnitte gegebene Dirichlet'sche Satz vom Grenzwerthe der Summe $\varrho\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}}$ für $\varrho=0$ in Erinnerung genommen wird,

$$\prod_{2}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{q^{1+\varrho}}}=\frac{1+(\varrho)}{\varrho},$$

unter (ϱ) eine Grösse verstanden, welche zugleich mit ϱ unendlich klein wird. Durch Uebergang zu den Logarithmen erhält man also diese Gleichung:

Indem er nun genau folgert, wie wir es gethan haben, kommt er zu Grenzen für den Unterschied

$$\log n-\sum_{q<n}\frac{\log q}{q},$$

welche das störende Glied

$$\frac{\Pi(n)\log n}{n}$$

enthalten, und schliesst hieraus, dass bei Hrn. Mertens dies störende Glied durch einen fehlerhaften Schluss eliminirt werde. In Wahrheit aber liegt die Schuld, dass es überhaupt auftritt, nur in dem Umstande, dass Hr. Césaro statt der Ungleichheiten (19), die wir benutzt haben, von den ungeeigneten Ungleichheiten (19a) Gebrauch macht.

$$(22) \qquad \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varrho}} = \log \frac{1}{\varrho} + (\varrho) - H,$$

wenn zur Abkürzung

$$(23) \qquad \frac{1}{2} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{q^2} + \frac{1}{3} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{q^3} + \cdots = H$$

gesetzt wird. — Mit Hilfe der voraufgeschickten Bemerkung aber kann man die auf alle Primzahlen $q > g + 1$ erstreckte Summe

$$\sum_{g+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varrho}} = \sum_{g+1}^{\infty} \frac{f(n) - f(n-1)}{n^\varrho \log n}$$

d. i. gleich

$$- \frac{f(g)}{(g+1)^\varrho \log (g+1)} + \sum_{g+1}^{\infty} f(n) \left(\frac{1}{n^\varrho \log n} - \frac{1}{(n+1)^\varrho \log (n+1)} \right)$$

setzen, wobei g die positive ganze Zahl $[x]$ sei. Dieser Ausdruck kann mit Rücksicht auf (21) durch den andern

$$\frac{-f(g)}{(g+1)^\varrho \log (g+1)} + \sum_{g+1}^{\infty} \log n \left(\frac{1}{n^\varrho \log n} - \frac{1}{(n+1)^\varrho \log (n+1)} \right)$$
$$+ 2\Delta \sum_{g+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\varrho \log n} - \frac{1}{(n+1)^\varrho \log (n+1)} \right)$$

d. i.

$$(24) \quad \frac{2(\Delta - \delta) - \log g}{(g+1)^\varrho \log (g+1)} + \sum_{g+1}^{\infty} \log n \left(\frac{1}{n^\varrho \log n} - \frac{1}{(n+1)^\varrho \log (n+1)} \right)$$

ersetzt werden, in welchem Δ, δ positive oder negative echte Brüche sind. Hier ist

$$\log n \left(\frac{1}{n^\varrho \log n} - \frac{1}{(n+1)^\varrho \log (n+1)} \right) = \frac{1}{n^\varrho} - \frac{1}{(n+1)^\varrho}$$
$$- \frac{\log \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{(n+1)^\varrho \log (n+1)}$$

und mit Rücksicht auf die für jedes $x < 1$ giltige Formel

$$- \log (1 - x) = x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{(1 - \vartheta x)^2}$$

darf man für jedes positive ϱ bis $\varrho = 0$ hin

$$\frac{-\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{(n+1)^{\varrho}\log(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^{\varrho+1}\log(n+1)} + \frac{\theta}{n^2\log n}$$

schreiben, wenn θ, wie immer, einen positiven echten Bruch bezeichnet, der mit dem vorigen θ nicht identisch zu sein braucht und in den folgenden Gleichungen wieder ein anderer sein kann. Hiernach wird

$$\sum_{g+1}^{\infty}\log n\left(\frac{1}{n^{\varrho}\log n}-\frac{1}{(n+1)^{\varrho}\log(n+1)}\right)$$
$$=\frac{1}{(g+1)^{\varrho}}+\sum_{g+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\varrho+1}\log(n+1)}+\theta\cdot\sum_{g+1}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}$$

oder, da man sich leicht überzeugt, dass

$$\frac{1}{n^2\log n} < \frac{1}{(n-1)\log(n-1)} - \frac{1}{n\log n} \tag{25}$$

ist, gleich

$$\frac{1}{(g+1)^{\varrho}}+\frac{\theta}{g\log g}+\sum_{g+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\varrho+1}\log(n+1)}.$$

Hiernach wird der Ausdruck (24) sich in den folgenden verwandeln:

$$\frac{\theta}{g\log g}+\frac{2(\Delta-\delta)+\log(g+1)-\log g-\frac{1}{g+1}}{(g+1)^{\varrho}\log(g+1)}+\sum_{g+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\varrho+1}\log n}, \tag{26}$$

dessen beide erste Glieder zusammengenommen für jedes positive ϱ bis $\varrho = 0$ hin die numerische Grenze

$$\frac{1}{g\log g}+\frac{5}{\log(g+1)} \tag{27}$$

nicht überschreiten. Man erhält demnach endlich

$$\sum_{g+1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\varrho}}=\sum_{g+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\varrho+1}\log n}+R, \tag{28}$$

wo R numerisch kleiner ist als der Ausdruck (27), der mit wachsendem g unendlich abnimmt.

Weiter aber erinnern wir an die Ungleichheiten (39a) und (39b) des dritten Abschnittes:

$$\frac{1}{\varrho g^{\varrho}} < \sum_{g}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}} < \frac{1}{g^{1+\varrho}} + \frac{1}{\varrho g^{\varrho}},$$

aus welchen

$$\sum_{g}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho g^{\varrho}} + \frac{\theta}{g^{1+\varrho}}$$

hervorgeht. Wird diese Gleichung nach ϱ zwischen den Grenzen ϱ und 1 integrirt, so findet sich

$$\sum_{g}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho} \log n} - \sum_{g}^{\infty} \frac{1}{n^{2} \log n} = \int_{\varrho}^{1} \frac{d\varrho}{\varrho g^{\varrho}} + \theta \left(\frac{1}{g^{1+\varrho} \log g} - \frac{1}{g^{2} \log g} \right)$$

oder auch, wenn das $n = g$ entsprechende Glied der Summe von links nach rechts geschafft und (25) beachtet wird,

$$(29) \quad \sum_{g+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho} \log n} = \int_{\varrho}^{1} \frac{d\varrho}{\varrho g^{\varrho}} + \frac{\theta}{g \log g} - \theta' \left(\frac{1}{g^{1+\varrho} \log g} - \frac{1}{g^{2} \log g} \right).$$

Hier kann aber endlich das Integral, dessen Integrationsvariable lieber nun x genannt werde, durch die Differenz

$$\int_{\varrho}^{\infty} \frac{dx}{x g^{x}} - \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x g^{x}}$$

zweier Integrale ersetzt werden, deren erstes, wenn statt $x \log g$ einfach x eingeführt wird, in

$$\int_{\varrho \log g}^{\infty} \frac{dx}{e^{x} - 1} - \int_{\varrho \log g}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{x} - 1} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx$$

verwandelt werden kann. Nun ist

$$\int_{1}^{x} \frac{dx}{x g^{x}} < \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{g^{x}} \quad \text{d. i. gleich} \quad \frac{\theta}{g \log g},$$

$$\int_{\varrho \log g}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{x} - 1} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = E + (\varrho)$$

$$\int_{\varrho \log g}^{\infty} \frac{dx}{e^{x} - 1} = \int_{\varrho \log g}^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} = - \log (1 - g^{-\varrho})$$

und da $\log \varrho - \log(1 - g^{-\varrho}) = \log \frac{\varrho}{1 - g^{-\varrho}}$ für $\varrho = 0$ gleich $\log\left(\frac{1}{\log g}\right)$ wird,

$$- \log(1 - g^{-\varrho}) = \log \frac{1}{\varrho} - \log(\log g) + (\varrho).$$

Durch alle diese Bemerkungen nimmt die Gleichung (29) zuletzt folgende Gestalt an:

$$(30) \quad \sum_{g+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho} \log n} = \log \frac{1}{\varrho} - \log(\log g) - E + \frac{3\delta - 1}{2 g \log g} + (\varrho),$$

wo δ ein positiver oder negativer echter Bruch ist. Durch Verbindung dieser Formel mit der Formel (28) kommt nunmehr

$$(31) \quad \sum_{g+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varrho}} = \log \frac{1}{\varrho} - \log(\log g) - E + \gamma + (\varrho),$$

wo γ eine leicht angebbare, mit unendlich wachsendem g unendlich abnehmende Grenze nicht überschreitet*). Wird diese Gleichung aber schliesslich von der Gleichung (22) subtrahirt und dann ϱ seiner Grenze unendlich genähert, so findet man die Summe, welche ermittelt werden sollte:

$$(32) \quad \sum_{q < x} \frac{1}{q} = \log \cdot \log [x] + E - H - \gamma.$$

Ferner ist aber

$$\log \prod_{q \leqq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \sum_{q < x} \frac{1}{q} + \frac{1}{2} \sum_{q \leqq x} \frac{1}{q^2} + \frac{1}{3} \sum_{q < x} \frac{1}{q^3} + \cdots$$

$$= \sum_{q \leqq x} \frac{1}{q} + H - \frac{1}{2} \sum_{g+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} - \frac{1}{3} \sum_{g+1}^{\infty} \frac{1}{q^3} - \cdots,$$

wo $g = [x]$ gedacht ist, und ganz analog den Betrachtungen der Nr. 6 des 4. Abschnittes findet man

$$\frac{1}{2} \sum_{g+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} + \frac{1}{3} \sum_{g+1}^{\infty} \frac{1}{q^3} + \cdots < \frac{1}{2g}.$$

*) Die hier gegebenen Grenzen weichen in etwas von den genaueren ab, welche Mertens gegeben hat; zur Vermeidung complicirterer Betrachtungen haben wir hier auf die grössere Genauigkeit verzichten zu sollen gemeint.

Folglich wird

$$\log \prod_{q < x} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \log \cdot \log [x] + E - \gamma', \tag{33}$$

wo auch γ' eine mit unendlich wachsendem q unendlich abnehmende angebbare Grenze nicht überschreiten kann, oder, wenn von den Logarithmen zu den Zahlen übergegangen wird, entsteht die folgende Gleichung:

$$\prod_{q < x} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = e^{E - \gamma'} \cdot \log [x]. \tag{34}$$

Die Formeln (32) und (34) treten als genau erwiesene Gleichungen an die Stelle derjenigen, welche Legendre aus seiner Formel für die Häufigkeit der Primzahlen abgeleitet hat*), nämlich der Formeln:

$$\sum_{q < x}' \frac{1}{q} = \log (\log [x] - 0{,}08366) + C$$

$$\prod_{q < x} \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{A}{\log [x] - 0{,}08366},$$

in denen A und C Constanten bezeichnen. —

6. Diese Mertens'sche Untersuchung gestattet eine interessante Erweiterung, vermittelst deren es gelingt, die Summe

$$\sum_{q \equiv x}' \frac{1}{q}$$

auch unter der Voraussetzung zu ermitteln, dass die Summe sich nicht über sämmtliche Primzahlen $< x$, sondern nur über diejenigen erstreckt, welche eine vorgeschriebene Linearform haben, beispielsweise in der im 4. Abschnitte untersuchten arithmetischen Progression $Mx + N$ enthalten sind.

Wir behalten dieselben Bezeichnungen bei, wie in jenem Abschnitte, verstehen also insbesondere unter dem Zeichen a_n den Charakter $\chi(n)$ oder die Null, je nachdem n prim ist zu M oder nicht. Nach den dort entwickelten Eigenschaften der Charaktere wird dann

*) Legendre, théorie des nombres, 2. édition p. 396 u. 397.

(35a) $$a_n = a_{n'}, \quad \text{wenn} \quad n \equiv n' \pmod{M}$$

ist, und

(35b) $$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+M} = 0,$$

wenn $\chi(n)$ vom Hauptcharakter verschieden, dagegen

(35c) $$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+M} = \varphi(M),$$

wenn $\chi(n)$ dem Hauptcharakter gleich ist; ferner ist

(35d) $$a_n \cdot a_{n'} = a_{nn'}$$

und endlich wird die auf alle Charaktere bezogene Summe

(35e) $$\sum_{\chi} a_n$$

gleich Null sein für jede Zahl n, mit Ausnahme derjenigen Zahlen n, welche $\equiv 1 \pmod{M}$ sind, für welche sie den Werth $\varphi(M)$ hat.

Wir verstehen nun unter $\chi(n)$ einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter. Von jeder Reihe von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varrho}}$$

gilt dann wegen (35b), was dort bezüglich der Reihen der dritten Kategorie hervorgehoben wurde, offenbar aber auch auf die der zweiten Kategorie anwendbar ist, dass sie sowohl, wie auch ihre nach $s = 1 + \varrho$ genommene Ableitung, nämlich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^{1+\varrho}}$$

für jeden positiven Werth von s endlich und stetig ist. Demnach convergiren auch die beiden Reihen

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n}$$

und es ist leicht, dies auch direkt zu zeigen. Z. B. lässt sich für die erste Reihe schreiben:

$$\sum_{1}^{g} \frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + (a_1 + a_2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + (a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$
$$+ \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{g-1})\left(\frac{1}{g-1} - \frac{1}{g}\right) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_g)\frac{1}{g};$$

wegen der Gleichung (35 b) wird aber der Modulus von beliebig vielen aufeinanderfolgenden a_n, da zudem mod. a_n gleich 1 oder 0 ist, je nachdem n prim ist zu M oder nicht, niemals die Grenze $\varphi(M)$ überschreiten, aus der vorigen Gleichung folgt also die andere:

$$\text{mod.} \sum_{1}^{g} \frac{a_n}{n} < \varphi(M); \tag{36}$$

und auf gleiche Weise findet sich

$$\text{mod.} \sum_{g+1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \frac{\varphi(M)}{g+1}. \tag{37}$$

Aus der Convergenz der Reihe $\sum_{2}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n}$ folgern wir jetzt die Convergenz der nur auf Primzahlen beschränkten Reihe $\sum_{2}^{\infty} \frac{a_q \log q}{q}$. In der That, betrachten wir zunächst die endliche Reihe

$$\sum_{2}^{g} \frac{a_n \log n}{n} \tag{38}$$

und verstehen unter q jede Primzahl $< g$, so lassen sich durch Auflösung des $\log n$ in seine Summanden diejenigen Glieder zusammenfassen, welche in $\log q$ multiplicirt sind. Diese entstehen aus den Vielfachen

$$1 \cdot q, \quad 2 \cdot q, \quad 3 \cdot q, \quad \cdots \left[\frac{g}{q}\right] \cdot q$$

der Reihe $1, 2, 3, \ldots g$, aber diejenigen dieser Vielfachen, welche durch q^2 theilbar sind, nämlich die Zahlen

$$1 \cdot q^2, \quad 2 \cdot q^2, \quad 3 \cdot q^2, \quad \cdots \left[\frac{g}{q^2}\right] \cdot q^2,$$

geben den Summanden $\log q$ zweimal, diejenigen der letztern, welche durch q^3 theilbar sind, nämlich die Zahlen

$$1 \cdot q^3, \quad 2 \cdot q^3, \quad 3 \cdot q^3, \quad \cdots \left[\frac{g}{q^3}\right] \cdot q^3,$$

noch einmal öfter u. s. f. Vereinigt man also diejenigen Glie-

der der Summe (38), welche $\log q$ zum Faktor haben, so erhält man $\log q$ multiplicirt in die Summe:

$$\frac{a_q}{q}\sum_1^{\left[\frac{y}{q}\right]}\frac{a_m}{m}+\frac{a_{q^2}}{q^2}\sum_1^{\left[\frac{y}{q^2}\right]}\frac{a_m}{m}+\cdots$$

oder auch in die Summe

$$\frac{a_q}{q}\sum_1^{\infty}\frac{a_m}{m}+R,$$

wenn

$$R=-\frac{a_q}{q}\sum_{\left[\frac{y}{q}\right]+1}^{\infty}\frac{a_m}{m}+\frac{a_{q^2}}{q^2}\sum_1^{\left[\frac{y}{q^2}\right]}\frac{a_m}{m}+\cdots$$

gesetzt wird. Folglich ist

$$(39)\qquad \sum_2^y\frac{a_n\log n}{n}=\sum_1^{\infty}\frac{a_m}{m}\cdot\sum_{q\leqq y}\frac{a_q\log q}{q}+\sum_q R\log q\,.$$

Aus den Ungleichheiten (36), (37) aber, nach deren zweiter

$$\text{mod.}\sum_{\left[\frac{y}{q}\right]+1}^{\infty}\frac{a_m}{m}<\frac{\varphi(M)}{\left[\frac{y}{q}\right]+1}<\frac{q\,\varphi(M)}{y}$$

ist, wird mod. R kleiner als

$$\varphi(M)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots\right)=\varphi(M)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{q(q-1)}\right),$$

folglich

$$\text{mod.}\sum_q R\log q<\varphi(M)\left(\frac{1}{y}\sum_q\log q+\sum_q\frac{\log q}{q(q-1)}\right).$$

Hier ist nach dem ersten Hilfssatze $\sum_q\log q<2y$, ferner ist

$$\sum_2^y\frac{\log q}{q(q-1)}<\sum_2^{\infty}\frac{\log q}{q(q-1)}$$

d. i. kleiner als

$$\sum_2^{\infty}\frac{\log q}{q^2}+\sum_2^{\infty}\frac{\log q}{q^3}+\cdots<1$$

und demnach

$$\text{mod.} \sum_{q} R \log q < 3\,\varphi(M).$$

Da in (39) also das letzte Glied rechts und die Reihe zur Linken, wenn y unendlich wächst, endlich bleibt, während den Sätzen des 4. Abschnitts zufolge $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_m}{m}$ ein von Null verschiedener endlicher Werth ist, so folgt, dass auch der Modulus der Summe

$$F(x) = \sum_{q < x} \frac{a_q \log q}{q} \tag{40}$$

bei unendlich wachsendem x eine endliche Grenze G nicht überschreitet, oder dass, was bewiesen werden sollte, die Reihe

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{a_q \log q}{q}$$

convergirt.

7. Nunmehr verwenden wir wieder die Summe (40) zu einer analogen Umformung, wie in voriger Nr., indem wir bemerken, dass

$$\frac{F(n) - F(n-1)}{\log n} = \frac{a_q}{q} \text{ oder } 0$$

sein wird, je nachdem n eine der nicht in M aufgehenden Primzahlen q oder eine von diesen verschiedene positive ganze Zahl ist. Aus diesem Grunde darf man, wenn $\gamma > y + 1$ ist, schreiben:

$$\sum_{y+1}^{\gamma} \frac{a_q}{q} = \sum_{y+1}^{\gamma} \frac{F(n) - F(n-1)}{\log n}$$

$$= -\frac{F(y)}{\log(y+1)} + \frac{F(\gamma)}{\log(\gamma+1)} + \sum_{y+1}^{\gamma} F(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right),$$

also ist

$$\text{mod.} \sum_{y+1}^{\gamma} \frac{a_q}{q} < G\left(\frac{1}{\log(y+1)} + \frac{1}{\log(\gamma+1)} + \sum_{y+1}^{\gamma}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right)\right)$$

d. i.

$$< \frac{2G}{\log(y+1)}$$

also, wie weit γ auch über y hinaus liege, für ein hinreichend

grosses g beliebig klein, mit andern Worten: die unendliche auf alle Primzahlen q sich erstreckende Reihe

$$\sum_2^{\infty}{}' \frac{a_q}{q}$$

ist convergent und man darf schreiben:

$$\sum_2^{\infty}{}' \frac{a_q}{q} = \sum_2^{g}{}' \frac{a_q}{q} + \frac{\lambda \cdot 2G}{\log(g+1)}, \tag{41}$$

wo mod. $\lambda < 1$ ist.

Nebenbei schliessen wir hieraus, dass gleicherweise für jedes $\varrho > 0$ die Gleichung gilt

$$\sum_2^{\infty}{}' \frac{a_q}{q^{1+\varrho}} = \sum_2^{g}{}' \frac{a_q}{q^{1+\varrho}} + \frac{\lambda' \cdot 2G}{\log(g+1)},$$

aus deren Verbindung mit der vorigen offenbar die folgende hervorgeht:

$$\lim_{\varrho=0} \sum_2^{\infty}{}' \frac{a_q}{q^{1+\varrho}} = \sum_2^{\infty}{}' \frac{a_q}{q}. \tag{42}$$

Und da nach der Euler'schen Formel

$$\prod_2^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{a_q}{q^{1+\varrho}}} = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varrho}}$$

also auch

$$\sum_2^{\infty}{}' \frac{a_q}{q^{1+\varrho}} + \frac{1}{2} \sum_2^{\infty}{}' \frac{a_{q^2}}{q^{2+2\varrho}} + \frac{1}{3} \sum_2^{\infty}{}' \frac{a_{q^3}}{q^{3+3\varrho}} + \cdots = \log \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varrho}}$$

ist, so findet man beim Uebergange zur Grenze $\varrho = 0$ mit Rücksicht auf die Ergebnisse des 3. und 4. Abschnitts

$$\sum_2^{\infty}{}' \frac{a_q}{q} + \frac{1}{2} \sum_2^{\infty}{}' \frac{a_{q^2}}{q^2} + \frac{1}{3} \sum_2^{\infty}{}' \frac{a_{q^3}}{q^3} + \cdots = \log \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

oder

$$\prod_2^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{a_q}{q}} = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n}. \tag{43}$$

Kehren wir aber zu unserm Gegenstande zurück, so dürfen wir die Gleichung (41) auch so deuten: Für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ besteht die Beziehung:

$$\sum_2^g \frac{a_q}{q} = \mathsf{X} - \frac{\lambda \cdot 2G}{\log(g+1)}, \tag{44}$$

wenn wir die nur vom Charakter χ abhängige Summe

$$\sum_2^\infty \frac{a_q}{q} = \mathsf{X}$$

setzen.

Ist aber χ der Hauptcharakter 1, so ist $a_q = 1$ für jede der nicht in M enthaltenen, $a_q = 0$ für jede der in M aufgehenden Primzahlen und demnach ist — sobald g grösser als die grösste der in M aufgehenden Primzahlen gedacht wird —

$$\sum_2^g \frac{a_q}{q} = \sum_2^g \frac{1}{q} - \sigma,$$

unter σ die Summe der reciproken Werthe aller in M aufgehenden Primzahlen verstanden, was, mit Rücksicht auf (32) sich auch so aussprechen lässt: Ist χ der Hauptcharakter, so ist

$$\sum_2^g \frac{a_q}{q} = \log(\log g) + E - H - \sigma - \gamma. \tag{44a}$$

Nun sei $\nu N \equiv 1 \pmod{M}$; wird dann (44) mit a_ν multiplicirt, darauf über alle vom Hauptcharakter verschiedenen Charaktere summirt und endlich die Gleichung (44a), in welcher mit Rücksicht auf (35d) und darauf, dass für den Hauptcharakter $a_\nu = 1$ ist, $a_{q\nu}$ statt a_q gesetzt werden darf, hinzugefügt, so ergiebt sich

$$\sum_2^g \frac{1}{q} \sum a_{q\nu} = \log(\log g) + E - H - \sigma - \gamma + \sum a_\nu \mathsf{X} + \Gamma,$$

wo Γ eine mit unendlich wachsendem g unendlich abnehmende Grösse bedeutet; die Summe

$$\sum a_{qr}$$

bezieht sich dabei auf sämmtliche Charaktere und ist wegen (35e) für alle Primzahlen q gleich Null, mit Ausnahme derjenigen, welche der Congruenz

$$\nu q \equiv 1 \quad \text{oder} \quad q \equiv N \pmod{M}$$

genügen d. h. in der arithmetischen Progression $Mx + N$, enthalten sind, für welche letztere sie gleich $\varphi(M)$ ist. Und somit erhalten wir das Resultat:

Die auf alle in der arithmetischen Progression $Mx + N$ enthaltenen Primzahlen $q < y$ erstreckte Summe

$$\sum_{2}^{y} \frac{1}{q}$$

ist gleich

$$\frac{\log(\log y)}{\varphi(M)} + \frac{E - H - \sigma - \gamma + \Sigma a_r \chi + \Gamma}{\varphi(M)}. \tag{45}$$

Heben wir den Fall hervor, in welchem $M = 4$ ist. Wir haben zwar im 4. Abschnitt die Annahme festgehalten, dass M durch 8 theilbar oder die dort mit c bezeichnete Zahl > 3 sei, jedoch bleiben die Eigenschaften der Charaktere, welche unter dieser Annahme dort entwickelt worden sind, auch für den Fall $c = 2$ oder in der Annahme, dass M nur durch 4 theilbar sei, wie leicht einzusehen, in Giltigkeit; die gemachte Annahme kam nur zur Verwendung bei der Umformung der Reihen der zweiten Kategorie, von letzterer können wir aber in dem besonderen Falle $M = 4$ gänzlich absehen, da der hier allein in Betracht kommende Umstand, dass $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ von Null verschieden sei, ohne weiteres einleuchtet. Im Falle $M = 4$ sind nämlich nur zwei Charaktere vorhanden, der Hauptcharakter $\chi(n) = 1$ und der Charakter $\chi(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$; und demnach ist

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

d. i. grösser als Null. Die vorige Formel ist also auf den besonderen Fall $M = 4$ anwendbar.

Für die arithmetische Progression $4x + 1$ aber wird $\nu \equiv 1 \pmod 4$ also $a_\nu = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} = 1$, für die arithmetische Progression $4x - 1$ wird $\nu \equiv 3 \pmod 4$ also $a_\nu = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} = -1$ sein; ferner ist $\sigma = \frac{1}{2}$ und

$$\chi = \sum_2^\infty \frac{a_q}{q} = \sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}.$$

Die obige Formel giebt also, wenn man mit q' die Primzahlen von der Form $4x + 1$, mit q'' diejenigen von der Form $4x - 1$ bezeichnet,

$$(46)\quad \begin{cases} \sum_2^y \frac{1}{q'} = \frac{1}{2}\log(\log y) + \frac{E - H - \frac{1}{2} + Q}{2} + G' \\ \sum_2^y \frac{1}{q''} = \frac{1}{2}\log(\log y) + \frac{E - H - \frac{1}{2} - Q}{2} + G'', \end{cases}$$

wo

$$(47)\quad Q = \sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q},$$

G', G'' aber zwei Grenzen bezeichnen, welche mit unendlich wachsendem y unendlich klein werden.

Aus der allgemeinen Euler'schen Formel folgt für jede positive ganze Zahl $m > 1$

$$\prod_3^\infty \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{m\cdot\frac{q-1}{2}}}{q^m}} = \sum_{h=0}^\infty \frac{(-1)^{mh}}{(2h+1)^m}$$

und diese Gleichung besteht auch noch für $m = 1$, da sie alsdann mit der Gleichung (43) für den hier betrachteten Fall $M = 4$ identisch ist. Setzt man nun

$$s_m = \sum_{h=0}^\infty \frac{(-1)^{mh}}{(2h+1)^m}, \qquad \sigma_m = \sum_3^\infty \frac{(-1)^{m\cdot\frac{q-1}{2}}}{q^m},$$

so findet man durch Logarithmirung der voraufgehenden Gleichung für jede positive ganze Zahl m

$$\log s_m = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k} \sigma_{km}$$

also auch

$$\frac{1}{n} \log s_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{kn} \sigma_{knm} .$$

Durch Vergleichung mit der Formel (6) vorigen Abschnittes und mittels des Umkehrungsprincips (8) daselbst ergiebt sich hieraus

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n} \log s_{nm}$$

d. i. entwickelt:

$$\sigma_m = \log s_m - \frac{1}{2} \log s_{2m} - \frac{1}{3} \log s_{3m} - \frac{1}{5} \log s_{5m} + \frac{1}{6} \log s_{6m} - \cdots \tag{48}$$

insbesondere für $m = 1$:

$$Q = \sum_{3}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} = \log s_1 - \frac{1}{2} \log s_2 - \frac{1}{3} \log s_3 - \cdots . \tag{48a}$$

Nun haben die successiven s folgende Werthe:

$$s_1 = \frac{\pi}{4} , \quad s_2 = \frac{\pi^2}{8} , \quad s_3 = \frac{\pi^3}{32} ,$$
$$s_4 = \frac{\pi^4}{96} , \quad s_5 = \frac{5\pi^5}{1536} , \quad s_6 = \frac{\pi^6}{960} , \ \ldots$$

und daraus berechnet sich der Werth der Constanten Q gleich

$$-0{,}33498132529 \ldots *) .$$

8. Wir beschliessen die Folge dieser Betrachtungen mit einem Reihensatze, welcher sich bei Tschebischeff findet**). Dieser Satz lautet: Wenn $f(x)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen x ist, die für jedes über einen positiven Werth hinausliegende x positiv bleibt, während

*) S. Tschebischeff, note sur différentes séries, in Liouville's Journal Bd. 16 p. 337.

**) S. die oben angeführte Arbeit mémoire sur les nombres premiers.

$\frac{xf(x)}{\log x}$ mit unendlich wachsendem x unendlich abnimmt, so ist die Convergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{\log n} \tag{49}$$

nothwendig und hinreichend zur Convergenz der über alle Primzahlen q ausgedehnten Reihe

$$\sum_{2}^{\infty} f(q). \tag{50}$$

Ist nämlich

$$U = \sum_{l}^{L} f(q)$$

die auf alle Primzahlen q zwischen l und $L > l$ inclusive ausgedehnte Reihe, so kann man diesen Ausdruck wieder umformen durch die einfache Bemerkung, dass

$$\frac{\theta(n) - \theta(n-1)}{\log n} = 1 \quad \text{oder} \quad 0$$

ist, je nachdem n eine Primzahl ist oder nicht; denn sonach kann man schreiben:

$$U = \sum_{l}^{L} \frac{\theta(n) - \theta(n-1)}{\log n} \cdot f(n)$$

$$= -\theta(l-1) \cdot \frac{f(l)}{\log l} + \theta(L) \frac{f(L+1)}{\log(L+1)} + \sum_{l}^{L} \left(\frac{f(n)}{\log n} - \frac{f(n+1)}{\log(n+1)} \right) \theta(n).$$

Wendet man hierauf aber die Ungleichheiten (14) an, so findet man nach den über $f(x)$ gemachten Annahmen sogleich

$$(51) \quad \begin{cases} U > \theta_2(l-1) \cdot \frac{f(l)}{\log l} - \theta_1(l-1) \cdot \frac{f(l)}{\log l} + \sum_{l}^{L} \frac{f(n)}{\log n} \left(\theta_2(n) - \theta_2(n-1) \right) \\ U < \theta_1(l-1) \cdot \frac{f(l)}{\log l} - \theta_2(l-1) \cdot \frac{f(l)}{\log l} + \sum_{l}^{L} \frac{f(n)}{\log n} \left(\theta_1(n) - \theta_1(n-1) \right). \end{cases}$$

Ist nun erstens die Reihe (49) convergent, so wird, wie weit L auch l übersteige, für ein hinreichend grosses l

$$\sum_{l}^{L} \frac{f(n)}{\log n}$$

beliebig klein sein; da andererseits die Differenzen

$$x^{1/2} - (x-1)^{1/2}, \quad \log x - \log(x-1), \quad \log^2 x - \log^2(x-1)$$

mit unendlich wachsendem x unendlich abnehmen, so nähern sich nach (15) die Differenzen

$$\theta_2(x) - \theta_2(x-1), \quad \theta_1(x) - \theta_1(x-1)$$

alsdann unendlich den Grenzen A resp. $\frac{6}{5}A$; daher werden wegen der unendlichen Abnahme von $\frac{x f(x)}{\log x}$ mit wachsendem x die Grenzen für U und somit U selbst für hinreichend grosses l beliebig klein d. h. die unendliche Reihe (50) convergent sein.

Ist aber zweitens die Reihe (49) divergent, so muss sie, da ihre Glieder von einer hinreichend grossen Stelle $n = l$ an positiv sind, über alle Grösse hinaus wachsen, also

$$\sum_{l}^{L} \frac{f(n)}{\log n}$$

mit L unendlich werden; dies gilt dann aber nach der ersten der Ungleichheiten (51) auch von U d. h. die Reihe (50) divergirt auch. —

9. Die im Vorigen angeführten Untersuchungen von Tschebischeff, soweit sie sich auf die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grenze beziehen, sind, so interessant sie an sich sein mögen, doch überholt worden durch die — nach einem Ausspruche von Lipschitz „an neuen Aufschlüssen und an neuen Räthseln reiche" Untersuchung, welche Riemann derselben Frage gewidmet hat und mit der wir uns nunmehr näher beschäftigen müssen. Riemann ist es gelungen, das verwickelte Gesetz für die Häufigkeit der Primzahlen wirklich in eine strenge analytische Formel zu fassen, die freilich, was nur natürlich ist, in entsprechender Weise verwickelt ist.

Heisst wieder $\Pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, welche kleiner sind als der positive Werth x, so wird diese Funktion jedesmal unstetig, sobald x durch eine Primzahl p hindurchgeht, und der Sprung

$$\Pi(p+0) - \Pi(p-0)$$

ist gleich 1. Wird hiernach die Funktion $F(x)$ mit $\Pi(x)$ gleich gewählt, so oft x von einer Primzahl verschieden, dagegen für jeden Primzahlwerth $x = p$

$$F(p) = \frac{\Pi(p+0) + \Pi(p-0)}{2},$$

so ist für jeden solchen Werth

$$F(p) = \Pi(p) + \frac{1}{2}$$

und es besteht allgemein die Gleichung

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}. \tag{52}$$

Wir setzen alsdann für jedes positive x

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2}F(x^{1/2}) + \frac{1}{3}F(x^{1/3}) + \cdots; \tag{53}$$

die vorige Eigenschaft der Funktion $F(x)$ überträgt sich augenscheinlich auf die Funktion $f(x)$, und die eine wie die andere verschwindet, sobald das Argument x kleiner als 2 ist.

Diese Funktionen stehen nun wieder in nächster Beziehung zu der in der ganzen analytischen Zahlentheorie herrschenden Funktion $\zeta(s)$. In der That, ihrer Definition als ein unendliches Produkt gemäss, findet sich für jeden Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist,

$$\log \zeta(s) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots,$$

wo die Summen auf sämmtliche Primzahlen p bezüglich sind, und diese Gleichung verwandelt sich, wenn man sich der Integralformeln

$$p^{-s} = s\int_p^\infty x^{-s-1}\,dx$$

$$p^{-2s} = s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\,dx$$

. . . . . .

bedient, in die folgende:

$$(54)\quad \frac{\log \zeta(s)}{s} = \sum_p \left(\int_p^\infty x^{-s-1}\,dx + \frac{1}{2}\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\,dx + \frac{1}{3}\int_{p^3}^\infty x^{-s-1}\,dx \cdots \right).$$

Betrachten wir hier zuerst die Summe

$$\sum_p \int_p^\infty x^{-s-1}\,dx\,,$$

und denken uns das Integral durch Einschaltung aller Primzahlen, welche grösser als p sind, zerlegt, so wird ersichtlich die Summe gleich

$$1\cdot\int_2^3 x^{-s-1}\,dx + 2\cdot\int_3^5 x^{-s-1}\,dx + \cdots + A(p)\cdot\int_p^q x^{-s-1}\,dx + \cdots$$

sein, wenn q die auf p folgende Primzahl und $A(p)$ bezeichnet, die wievielte Primzahl p ist; für die Werthe x zwischen p und q wird also $F(x) = A(p)$, also

$$A(p)\cdot\int_p^q x^{-s-1}\,dx = \int_p^q F(x)\,x^{-s-1}\,dx$$

und jene Summe gleich

$$\int_2^\infty F(x)\,x^{-s-1}\,dx$$

sein, wofür man auch, da $F(x)$ für $x < 2$ verschwindet, unbedenklich

$$\int_0^\infty F(x)\,x^{-s-1}\,dx$$

setzen darf.

In gleicher Weise ist

$$\sum_p \int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\,dx$$

$$= 1\cdot\int_{2^2}^{3^2} x^{-s-1}\,dx + 2\cdot\int_{3^2}^{5^2} x^{-s-1}\,dx + \cdots + A(p)\cdot\int_{p^2}^{q^2} x^{-s-1}\,dx + \cdots$$

oder, da $A(p) = F(x^{1/2})$ ist, solange $x^{1/2}$ zwischen p und q also x zwischen p^2 und q^2 liegt, gleich

$$\int_{2^2}^{\infty} F(x^{1/2})\, x^{-s-1}\, dx\,,$$

wofür auch wieder

$$\int_{0}^{\infty} F(x^{1/2})\, x^{-s-1}\, dx$$

gesetzt werden darf, u. s. w.

Man findet mithin zuletzt

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_{0}^{\infty} f(x)\, x^{-s-1}\, dx. \tag{55}$$

Diese Formel lässt sich leicht umkehren, nämlich $f(x)$ ausdrücken durch $\zeta(s)$. Multipliciren wir sie zu diesem Zwecke, indem wir unter y einen positiven Werth verstehen, beiderseits mit $y^s\, d\log s$ und integriren bezüglich s längs der zur imaginären Axe parallelen Geraden, welche den positiven Abstand $a > 1$ von ihr hat, oder zwischen den Grenzen $a - \infty \cdot i$ und $a + \infty \cdot i$, so entsteht die Gleichung

$$\int_{a-\infty\cdot i}^{a+\infty\cdot i} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot y^s\, d\log s = \int_{0}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx \int_{a-\infty\cdot i}^{a+\infty\cdot i} \left(\frac{y}{x}\right)^s d\log s.$$

Hier tritt aber die Integralformel in Kraft, die wir im 7. Abschnitte (S. 174) hergeleitet haben: für jeden Werth von x, welcher $> y$ ist, verschwindet rechts das innere, nach s genommene Integral, während es für jedes $x < y$ den Werth $2\pi i$ hat. Demnach geht die rechte Seite in den einfachen Ausdruck

$$2\pi i \cdot \int_{0}^{y} \frac{f(x)}{x}\, dx$$

über, und die Differenzirung der so entstehenden Gleichung nach y ergiebt weiter

$$\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot y^{s-1}\, ds = 2\pi i \cdot \frac{f(y)}{y}$$

d. h., wenn wieder x statt y gesetzt wird,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot x^s \, ds. \tag{56}$$

Durch partielle Integration erhält man für das unbestimmte Integral den Ausdruck

$$\frac{\log \zeta(s)}{\log x} \cdot \frac{x^s}{s} - \frac{1}{\log x} \cdot \int \frac{d\frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} \cdot x^s \, ds;$$

da $\zeta(s)$ für $s = a \pm yi$ einen endlichen Werth behält, wie gross y auch gedacht werde, dagegen

$$\text{mod.} \frac{x^s}{s} = \frac{x^a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

mit wachsendem y unendlich klein wird, so giebt der Uebergang zur bestimmten Integration die Formel

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i \log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} \cdot x^s ds, \tag{57}$$

mit deren weiterer Umformung wir uns beschäftigen wollen.

10. In dieser Absicht erinnern wir uns des Riemann-schen Satzes (Formel 77c vor. Abschnitts): das Produkt

$$\zeta(s) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}}$$

ändert sich nicht bei der Vertauschung von s mit $1 - s$. Der Definition der Γ-Funktionen gemäss lässt sich

$$\frac{1}{n^s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x} \cdot x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

setzen und demzufolge für jeden Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, für jeden Werth von s also, der bei der Integration in (57) in Betracht kommt,

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx, \tag{58}$$

wenn man zur Abkürzung schreibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \psi(x). \tag{59}$$

Hier greift noch einmal die Jacobi'sche Transformationsgleichung aus der Theorie der elliptischen Funktionen, die wir im 7. Abschnitte, Formel (55), hergeleitet haben, in unsere Betrachtungen ein: ihr zufolge ist

$$x^{1/2} \cdot \frac{1 + 2\psi(x)}{1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$$

also

$$\psi(x) = x^{-1/2}\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}. \tag{60}$$

Mit Hilfe dieses Resultates aber lässt sich das Integral in Gleichung (58) folgendermassen schreiben:

$$\int_1^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right) dx;$$

und, wenn nun das mittlere Integral durch Einführung von $\frac{1}{x}$ an Stelle von x transformirt, das letzte berechnet und der entstehende Ausdruck statt des ganzen Integrales in (58) eingeführt wird, so erhält diese Gleichung folgenden Ausdruck

$$\xi(s) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right) dx, \tag{61}$$

einen Ausdruck, der in der That ungeändert bleibt, wenn man s in $1 - s$ verwandelt.

Dasselbe gilt von der Funktion

$$\frac{s(s-1)}{2} \cdot \xi(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}};$$

führt man also durch die Substitution

$$s = \frac{1}{2} + ti \tag{62}$$

eine neue Veränderliche t ein, nennt den eben geschriebenen Ausdruck, als eine Funktion der letztern aufgefasst, $\xi(t)$ und

bemerkt, dass der Vertauschung von s mit $1-s$ die Vertauschung von t mit $-t$ entspricht, so verändert sich die Funktion

$$\xi(t) = \frac{s(s-1)}{2} \cdot \xi(s)\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \tag{63}$$

nicht bei der Verwandlung von t in $-t$, was durch ihren aus (61) hervorgehenden Ausdruck

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right) dx \tag{64}$$

bestätigt wird. Man überzeugt sich endlich leicht mittels partieller Integration, indem man

$$t^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right) = -4x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right) - 4x \cdot \frac{d}{dx} \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right)$$

setzt und zugleich die Beziehung

$$4\psi'(1) + \psi(1) + \frac{1}{2} = 0$$

verwendet, welche durch Differenzirung der Gleichung (60) zu gewinnen ist, dass man die voraufgehende Formel auch durch diese andere ersetzen kann:

$$\xi(t) = 4 \cdot \int_1^\infty \frac{d}{dx}\left(\psi'(x) x^{\frac{3}{2}}\right) \cdot x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right) dx \cdot \tag{63a}$$

Bei der Herleitung dieser Formel war der reelle Bestandtheil von s grösser als 1 oder, da s mit $1-s$ vertauscht werden darf, negativ vorauszusetzen. Denkt man daher, gemäss der Substitutionsformel (62), in der Ebene der complexen Veränderlichen t die zwei Parallellinien zur reellen Axe, welche den Abstand $\pm \frac{1}{2}$ von ihr haben, so wird das letzte Integral in dem Theile der Ebene, der nach Absonderung des Parallelstreifens übrig bleibt, überall die durch (63) definirte Funktion $\xi(t)$ darstellen, aber auch ihre stetige Fortsetzung über den Parallelstreifen, da

das Integral, wie unschwer zu erkennen, für jeden endlichen Werth von t endlich und stetig ist. Die Nullpunkte dieser Funktion $\xi(t)$ liegen sämmtlich in dem bezeichneten Parallelstreifen; denn, bildet man

$$\log \xi(t) = \log \frac{s(s-1)}{2} + \log \zeta(s) + \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{s}{2} \log \pi,$$

so bleiben die einzelnen Bestandtheile zur Rechten für jedes s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, endlich, und $\xi(t)$ kann für keinen dieser Werthe also auch für keinen der entsprechenden Werthe $1 - s$ verschwinden.

Riemann berechnet nun die Anzahl dieser Nullpunkte, deren reeller Bestandtheil zwischen 0 und T liegt, bis auf einen Bruchtheil von der Grösse $\frac{1}{T}$ genau auf

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

und folgert alsdann hieraus, dass man setzen dürfe

$$\log \xi(t) = \log \xi(0) + \sum \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

wenn die Summe auf die sämmtlichen Nullpunkte α der Funktion $\xi(t)$ mit positivem reellen Bestandtheil erstreckt wird. Das nur sehr andeutungsweise gegebene Räsonnement Riemann's versuchen wir durch die nachfolgende Betrachtung zu ersetzen.

Denken wir uns um den Anfangspunkt durch Parallelen zu den Koordinatenaxen im Abstande T von denselben ein Quadrat mit der Seite $2T$ abgegrenzt, indem wir dabei Sorge tragen wollen, dass die zur reellen Axe senkrechten Seiten durch keinen Nullpunkt der Funktion $\xi(t)$ hindurchgehen, so bleibt $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$ auf der ganzen Begrenzung dieses Quadrates überall endlich. Da ferner im Endlichen liegende Unendlichkeitspunkte der Funktion $\xi(t)$ nicht vorhanden sind, so ergiebt sich mittels des Cauchy'schen Fundamentalsatzes leicht folgende Formel:

$$\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} \cdot \frac{dz}{z-t} - \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha - t},$$

in welcher die Integration in positiver Richtung über die Seite des Quadrates und die Summation auf alle in demselben enthaltenen Nullpunkte der Funktion $\xi(t)$ zu erstrecken ist, jeder von diesen und zugleich mit ihm das entsprechende Glied $\frac{1}{\alpha - t}$ der Summe so oft gezählt, als seine Ordnungszahl beträgt. Wie gross nun auch t sei, man wird das eben bezeichnete Quadrat so gross wählen können, dass in jedem Punkte der Begrenzung mod. $z >$ mod. t ist und demnach

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\,\frac{dz}{z-t} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\cdot\frac{dz}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{2\pi i}\int \frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\cdot\frac{dz}{z^{k+1}}$$

gesetzt werden darf. Hier verschwindet aber das erste Integral, denn $\xi(z)$ und folglich auch $\frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\cdot\frac{1}{z}$ ist eine gerade Funktion, die in symmetrisch zum Anfangspunkt liegenden Punkten der Begrenzung gleichen Werth hat; da in solchen aber die Integrationsrichtungen einander entgegengesetzt sind, heben die zwei entsprechenden Integralelemente einander auf. Um das Integral

$$\int \frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\cdot\frac{dz}{z^{k+1}} = \int \frac{\xi'(z)}{\xi(z)}\,\frac{1}{z^k}\cdot\frac{dz}{z}$$

zu untersuchen, leiten wir aus der Gleichung (63) durch logarithmische Differenzirung nach s die folgende her:

$$-i\cdot\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \frac{2s-1}{s(s-1)} - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

und lassen s und damit auch t unendlich werden. Da hierbei

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\sum n^{-s}\log n}{\sum n^{-s}}$$

ebenso wie die beiden ersten Glieder zur Rechten endlich bleibt, während

$$\Gamma(s) = e^{\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s - s}\cdot\varphi(s)$$

gesetzt werden kann, wo $\varphi(s)$ für $s = \infty$ endlich und von Null verschieden bleibt (vgl. Stirling'sche Formel, oder Hankel:

die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes, Leipzig 1863, auf Seite 20), also

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} + \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}$$

mit s unendlich gross wird wie $\log s$, so schliesst man sogleich, dass $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$ mit t unendlich gross wird wie $\log t$ und dass folglich

$$\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} \cdot \frac{1}{t^k}$$

bei unendlich wachsendem t gegen Null convergirt*). Sonach wird das Integral

$$\int \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} \frac{1}{z^k} \cdot \frac{dz}{z}$$

bei unendlich ausgedehntem Quadrate verschwinden also auch

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} \frac{dz}{z-t} = 0$$

und

$$\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = -\sum \frac{1}{\alpha - t}$$

sein, wenn diese Summe auf die sämmtlichen gleichen oder verschiedenen Nullpunkte von $\xi(t)$ ausgedehnt wird. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass wegen $\xi(-t) = \xi(t)$ jedem Nullpunkte α mit positivem reellen Bestandtheile ein solcher mit gleichem negativen Bestandtheile und von derselben Ordnung entspricht, so dass die zugehörigen Glieder der Summe zusammengezogen werden können, und dass die Summe nach den wachsenden Werthen dieses Bestandtheiles geordnet zu denken ist, da die Wurzeln in dieser Reihenfolge bei der Ausdehnung des Quadrates nach und nach auftreten.

Aus dieser Gleichheit folgert man weiter durch Integration nach t

$$\log \xi(t) - \log \xi(0) = \sum_{\alpha} \left(\log \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) + \log \left(1 + \frac{t}{\alpha}\right) \right),$$

*) Hier bleibt streng genommen eine Lücke, insofern es fraglich scheinen kann, ob dieser Umstand auch für die unendlich fernen Theile des Parallelstreifens zutreffend ist. Die Riemann'sche Formel (63a), die wir sonst nicht brauchen, dürfte die Bestimmung haben, sie zu ergänzen.

wo die Summe nun nur noch alle Nullpunkte α mit positivem reellen Bestandtheile umfasst.

11. Hiernach darf man setzen

$$\log \xi(t) = \log \xi(0) + \sum_{\alpha} \log \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

die Summe auf alle Wurzeln α der Gleichung $\xi(t) = 0$ erstreckt, deren reelle Bestandtheile positiv sind, und nach den wachsenden Werthen derselben geordnet. Da man

$$\log \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) = \log \left(1 + \frac{(s - 1/2)^2}{\alpha^2}\right)$$

leicht in

$$\log \left(1 + \frac{1}{4\alpha^2}\right) + \log \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right) + \log \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right)$$

umformt, nimmt diese Gleichung auch folgende Gestalt an:

$$\log \xi(t) = C + \sum_{\alpha} \left(\log \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right) + \log \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right)\right),$$

wo C eine endliche Constante.

Auf diese Funktion lässt sich aber die Funktion $\log \xi(s)$ mittels der Definitionsgleichung (63) zurückführen und so findet man

$$\log \xi(s) = C + \frac{s}{2} \log \pi - \log (s - 1) - \log \Gamma \left(\frac{s}{2} + 1\right)$$
$$+ \sum_{\alpha} \left(\log \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right) + \log \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right)\right).$$

Nun ist nach dem Gaussischen Multiplikationssatze der Γ-Funktionen

$$\Gamma \left(\frac{s}{2} + 1\right) = \lim_{n = \infty} \frac{n^{s/2}}{\left(1 + \frac{s}{2}\right)\left(1 + \frac{s}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{s}{2n}\right)}$$

also

$$- \log \Gamma \left(\frac{s}{2} + 1\right) = \lim_{n = \infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \log \left(1 + \frac{s}{2m}\right) - \frac{s}{2} \log n \right)$$

und

$$\frac{-\,d\,\frac{\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s}}{ds}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d\,\frac{\log\left(1+\frac{s}{2m}\right)}{s}}{ds}.$$

Mit Hilfe dieses Resultates kommt

$$\frac{d\,\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}=-\frac{C}{s^2}-\frac{d}{ds}\,\frac{\log(1-s)}{s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d\,\frac{\log\left(1+\frac{s}{2m}\right)}{s}}{ds}$$

(65)

$$+\sum_{\alpha}\left(\frac{d}{ds}\,\frac{\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)}{s}+\frac{d}{ds}\,\frac{\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)}{s}\right).$$

Abgesehen vom ersten Gliede stehen hier zur Rechten nur Glieder von der Form

$$\frac{d}{ds}\,\frac{\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)}{s}.$$

Wird also der vorstehende Ausdruck in die Formel (57) eingesetzt, so wird zunächst ein Glied erhalten von der Form

$$\frac{C}{2\pi i\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s\,ds}{s^2},$$

welches durch partielle Integration in

$$\frac{C}{2\pi i}\cdot\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}x^s\,d\log s=C$$

übergeht; ausserdem aber nur Glieder von der allgemeinen Form

$$\pm\frac{1}{2\pi i\cdot\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\,\frac{\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)}{s}\cdot x^s\,ds,$$

welche sich durch partielle Integration mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{x^s\cdot\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)}{s}$$

an den Grenzen verschwindet, in die einfachere

$$\mp \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\cdot x^s ds \tag{66}$$

verwandelt. Nennt man für einen Augenblick dies Integral, als eine Funktion von β aufgefasst, $\varphi(\beta)$, so wird nach der leicht zu bestätigenden Formel

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right) = \frac{1}{(\beta-s)\beta}$$

$$\varphi'(\beta) = \mp \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta}$$

sein, und diese Gleichung, wenn der reelle Bestandtheil von β mit b bezeichnet und $a - b = a'$ gesetzt wird, durch Einführung der neuen Integrationsvariabeln $s' = s - \beta$ in die folgende übergeführt:

$$\varphi'(\beta) = \pm \frac{x^\beta}{2\pi i}\int_{a'-\infty i}^{a'+\infty i} x^{s'} d\log s' .$$

Sobald demnach $a' > 0$ d. h. der reelle Bestandtheil von s grösser ist als der von β, findet sich

$$\varphi'(\beta) = \pm \frac{x^\beta}{\beta},$$

also, wenn der reelle Bestandtheil von β negativ ist,

$$\varphi'(\beta) = \pm \int_{\infty}^{x} x^{\beta-1} dx$$

und

$$\varphi(\beta) = \pm \int_{\infty}^{x} \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + c,$$

dagegen, wenn der reelle Bestandtheil von β positiv ist,

$$\varphi'(\beta) = \pm \int_{0}^{x} x^{\beta-1} dx$$

und entsprechend

$$\varphi(\beta) = \pm \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x}\, dx + c.$$

Man hat nun in (66) successive für β die Werthe zu setzen, welche für die Formel (65) in Betracht kommen.

Ist zuerst $\beta = 1$, so ist $\alpha' = \alpha - 1 > 0$; es tritt der zweite Fall ein und der zugehörige Bestandtheil der Formel (57) wird

$$+ \int_0^x \frac{dx}{\log x} + c = \mathrm{Li}(x) + c.$$

Ist zweitens $\beta = -2m$, so ist $\alpha' = \alpha + 2m > 0$; es tritt der erste Fall ein und der zugehörige Bestandtheil der Formel (57) wird

$$-\int_\infty^x \frac{x^{-2m-1}dx}{\log x} + c,$$

die Gesammtheit aller, den verschiedenen Werthen von m entsprechenden Bestandtheile aber, da $x > 1$ gedacht ist, gleich

$$+ \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\, x \log x} + c.$$

Ist endlich drittens $\beta = \frac{1}{2} \pm \alpha i$, so wird, weil der Coefficient des imaginären Bestandtheils von α numerisch kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, der reelle Bestandtheil von β positiv und kleiner als 1, also $\alpha' > 0$ sein; es tritt der zweite der obigen Fälle ein und man findet als den zugehörigen Bestandtheil der Formel (57) den Ausdruck

$$-\int_0^x \frac{x^{-\frac{1}{2} \pm \alpha i} \cdot dx}{\log x} + c,$$

der durch die Substitution $x^{\frac{1}{2} \pm \alpha i} = x'$ sich in

$$-\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2} \pm \alpha i}\right) + c$$

verwandeln lässt. —

Alles in allem ergiebt sich hiernach die Riemann'sche Formel:

$$f(x) = C + \mathrm{Li}\,(x) - \sum_{\alpha}\left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) + \int_{x}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)\,x\log x}, \tag{67}$$

und aus dieser so bestimmten Funktion $f(x)$ gewinnt man endlich die gesuchte Funktion $F(x)$, durch welche die Häufigkeit der Primzahlen bestimmt ist, durch Umkehrung der Beziehung (53), nämlich mittels der Formel

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot \frac{1}{n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right). \tag{68}$$

Sieht man von den periodischen Gliedern des Ausdruckes $f(x)$ ab, so wird augenscheinlich, von Theilen abgesehen, welche mit x nicht unendlich wachsen können,

$$F(x) = \sum_{n} \mu(n) \cdot \frac{1}{n} \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \tag{69}$$

d. i. aber kleiner als der Integrallogarithmus $\mathrm{Li}\,(x)$, der vor Riemann als asymptotischer Werth für $F(x)$ genommen zu werden pflegte; und in der That hat die wirkliche Zählung der Primzahlen durch Gauss und Goldschmidt diesen Umstand schon ausser Zweifel gestellt*). Weitere Zählungen erst können aber den Einfluss erkennen lassen, welchen die periodischen Bestandtheile von $f(x)$ ausüben, indem sie stellenweise Verdünnungen oder Verdichtungen deutlich machen, welche in der Reihe der Primzahlen stattfinden und auch bei den bisherigen Zählungen, wie Riemann sagt, bereits nicht unbemerkt geblieben sind.

*) Vgl. Gauss' Brief an Encke im 2. Bd. seiner Werke p. 445.

Dreizehnter Abschnitt.

Die mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen.

1. Die zahlentheoretischen Funktionen sind, wenn überhaupt, meist doch nur sehr schwer und umständlich durch einen analytischen Ausdruck zu definiren, wie wir dies an der Menge der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grenze im Vorigen erkannt haben. Gleichviel aber, ob ein solcher Ausdruck vorhanden ist oder nicht, sind sie stets von einer grossen Unregelmässigkeit. Betrachtet man z. B. die Anzahl der Theiler einer Zahl n, die sich zwar mittels der Zerlegung der Zahl in ihre Primfaktoren, nicht aber unmittelbar als eine Funktion von n durch einen allgemeinen Ausdruck bestimmen lässt, so sieht man sehr bald, dass bei wachsendem n diese Anzahl im allgemeinen ebenfalls wächst, doch aber auch immer wieder sehr kleine Werthe — insbesondere, so oft n einer Primzahl gleich wird, den Werth 2 — annimmt. Dieser Umstand führt naturgemäss zur Betrachtung der sogenannten mittleren Werthe dieser Funktionen, in welchen, indem die Unregelmässigkeiten sich ausgleichen, das Gesetz der wachsenden Funktionswerthe sich deutlicher ausprägen muss, um so mehr, je grösser die Menge der im Mittel zusammengefassten Funktionswerthe ist.

Sei $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, so ist der Quotient

$$\frac{f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)}{n} \tag{1}$$

das Mittel der n aufeinander folgenden Funktionswerthe, und

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$$

der mittlere Werth der Funktion $f(n)$ überhaupt. Wir wollen diesen letztern durch $\mathfrak{M} f(n)$ bezeichnen. So haben wir in Nr. 6 des 6. Abschnittes die mittlere Anzahl der Darstellungen einer positiven ganzen Zahl durch eine quadratische Form, sowie die mittlere Anzahl aller ihrer Darstellungen durch das Formensystem der Determinante D betrachtet und ermittelt. Meist aber ist dieser mittlere Werth nicht angebbar oder doch nur in der Weise, dass sich für den Ausdruck (1) ein asymptotischer Ausdruck $\psi(n)$ angeben lässt, der geeignet ist, ihn mit stets wachsender Genauigkeit zu ersetzen, indem das Verhältniss zwischen beiden mit wachsendem n sich der Einheit nähert.

Neben dem mittleren Werthe einer Funktion $f(n)$ überhaupt kann man aber mit Gauss*) noch einen andern Mittelwerth definiren. Offenbar darf man den Quotienten

$$(3) \qquad \frac{f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(n+m)}{m}$$

als den Mittelwerth der Funktion $f(n)$ an der Stelle $n + \frac{m-1}{2}$ ansehen und zwar mit um so grösserem Rechte, je grösser m gewählt werden kann. Wird aber n so viel grösser gedacht als m, dass $\frac{m-1}{2}$ gegen n verschwindet, so bestimmt der Quotient (3) auch den Mittelwerth der Funktion $f(n)$ an der Stelle n, den wir mit $Mf(n)$ bezeichnen wollen, und dies wird um so zutreffender sein, je grösser n gewählt wird, weil dann auch m entsprechend grösser genommen werden darf. Geschieht das gleichzeitige Wachsen von n und m in der Weise, dass n unendlich viel rascher wächst als m, sodass $\frac{m}{n}$ dabei unendlich klein wird, so bestimmt der Ausdruck (3) mit stets wachsender Genauigkeit den Mittelwerth der Funktion $f(n)$ an der Stelle n.

So giebt Gauss an den angeführten Orten das asymptotische Gesetz für die mittlere Anzahl der Geschlechter, sowie

*) S. Disquisitiones Arithmeticae art. 301—303.

für die mittlere Anzahl der Classen quadratischer Formen einer gegebenen Determinante D. Das erstere lautet:

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\log D + 2E + \frac{12F}{\pi^2} - \frac{1}{6}\log 2\right), \tag{4}$$

wo

$$E = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = 0{,}5772156649$$

die schon im Vorigen betrachtete Euler'sche Constante und

$$F = \sum_2^\infty \frac{\log k}{k^2} = 0{,}9375482543$$

ist. Das asymptotische Gesetz von Gauss für die mittlere Anzahl der Classen lautet, wenn $D = -\Delta$ negativ ist,

$$\gamma\sqrt{\Delta} - \delta, \tag{5}$$

wo

$$\gamma = \frac{2\pi}{7\sum_1^\infty \frac{1}{k^3}}, \quad \delta = \frac{2}{\pi^2}$$

ist. Für positive Determinanten stellt Gauss dasselbe nicht auf, er bemerkt nur*), dass für solche die mittlere Anzahl der Classen viel langsamer zunehme wie $\sqrt{D}$, dass jedoch verschiedene Gründe es deutlich machten, wie für solche Determinanten nicht sowohl die Classenanzahl selbst als vielmehr ihr Produkt in $\log(T + U\sqrt{D})$ das Analogon zur Classenanzahl negativer Determinanten sei, wie die Ausdrücke für die Classenanzahl, die wir gefunden, vollauf bestätigen, und dass in der That für den mittleren Werth dieses Produktes sich das analoge Gesetz $m\sqrt{D} - n$ herausstelle.

Indem wir später auf diese Fragen zurückkommen, bemerken wir hier nur noch im Allgemeinen, dass, wenn für den mittleren Werth einer Funktion $f(n)$ überhaupt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, für ihr sogenanntes summatorisches Glied

$$F(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \tag{6}$$

*) Ebendaselbst art. 304 Ende.

ein asymptotischer Ausdruck $\psi(n)$ gefunden worden ist, sodass sich setzen lässt

$$F(n) = \psi(n) \cdot (1 + \delta), \tag{7}$$

wo δ mit unendlich wachsendem n unendlich abnimmt, daraus auch der asymptotische Werth von $f(n)$ an der Stelle n unmittelbar sich herleiten lässt. Denn da alsdann auch

$$F(n+m) = \psi(n+m) \cdot (1 + \delta') \tag{8}$$

sein wird, ergiebt sich für (3) die Gleichung

$$\frac{F(n+m) - F(n)}{m} = \frac{\psi(n+m) - \psi(n)}{m} (1 + \Delta), \tag{9}$$

wo Δ zur Abkürzung steht für

$$\frac{\delta' \psi(n+m) - \delta \psi(n)}{\psi(n+m) - \psi(n)}. \tag{10}$$

2. Nächst Gauss ist es Dirichlet, welcher der Aufsuchung der mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen und ihrer asymptotischen Gesetze seine Kräfte gewidmet hat, indem er auf dieses neue fruchtbringende Gebiet seine analytischen Methoden ausdehnte. Seine erste Untersuchung darüber, von welcher die kurze, bereits früher erwähnte Note in den Berl. Monatsber. v. J. 1838 Nachricht giebt, ist leider nie veröffentlicht worden, sodass man auf die von Dirichlet dabei verwendeten analytischen Methoden aus jener nur mit Hilfe einer andern Notiz*) zu schliessen vermag. Was wir darüber zu sagen haben, wollen wir am Ende dieses Abschnittes auseinandersetzen. Dirichlet selbst aber hat es sich angelegen sein lassen, die Resultate, zu denen seine analytische Untersuchung ihn geführt, soweit thunlich, durch elementare Methoden wieder zu gewinnen, und so wollen wir hier auch zunächst diese letzteren Methoden zur Darstellung bringen und ihnen anfügen, was seither Andere in gleichem Sinne geleistet.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit der Betrachtung der Funktion $T(n)$, welche die *Anzahl* aller Theiler einer ganzen Zahl n bestimmt.

*) S. Dirichlet, sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, in Crelle's Journal Bd. 18.

Ist dann

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} T(k)$$

die entsprechende summatorische Funktion, so ist bereits in Nr. 2, 2) des 11. Abschnittes gezeigt worden, dass man für sie auch setzen darf

$$\tau(n) = \sum_{1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right].$$

Nun ist aber $\left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n}{k} - \varrho$, wo ϱ einen Werth zwischen 0 und 1 bedeutet, und demgemäss wird

$$\tau(n) = n \cdot \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} - r,$$

wo r sicher den Werth n nicht erreicht. Da nun nach der Euler'schen Summenformel (1a) des vor. Abschnitts

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k} = E + \log n + \frac{1}{2n} - \cdots$$

ist, findet sich

(11) $$\tau(n) = n \log n + O(n),$$

wenn wir durch das Zeichen $O(n)$ eine Grösse ausdrücken, deren Ordnung in Bezug auf n die Ordnung von n nicht überschreitet; ob sie wirklich Glieder von der Ordnung n in sich enthält, bleibt bei dem bisherigen Schlussverfahren dahingestellt.

Bevor wir dies näher untersuchen, betrachten wir zweitens die Funktion $S(n)$, welche die *Summe* aller Theiler einer ganzen Zahl n bestimmt. Für die entsprechende summatorische Funktion

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} S(k)$$

fanden wir in Nr. 2, 3) des 11. Abschnittes den anderen Ausdruck

$$\sigma(n) = \sum_{1}^{n} k \cdot \left[\frac{n}{k}\right],$$

den wir ferner mit Hilfe der allgemeinen Formel (8) des vorigen Abschnittes und wenn wir wieder

$$\delta(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

setzen, durch den folgenden ersetzen können:

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} \delta\left[\frac{n}{k}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right]^2 + \left[\frac{n}{k}\right]\right).$$

Hier ist aber wegen $\left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n}{k} - \varrho$

$$\sum_{1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]^2 = n^2 \cdot \sum_{1}^{n}\frac{1}{k^2} - 2n \cdot \sum_{1}^{n}\frac{\varrho}{k} + \sum_{1}^{n}\varrho^2$$

$$\sum_{1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right] = n \cdot \sum_{1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{1}^{n}\varrho.$$

Die Summen $\sum \varrho$, $\sum \varrho^2$ erreichen nicht die Grenze n; $n \cdot \sum_{1}^{n}\frac{\varrho}{k}$ ist kleiner als $n \cdot \sum_{1}^{n}\frac{1}{k}$ und nach der schon vorher benutzten Euler'schen Summenformel ist

$$n \cdot \sum_{1}^{n}\frac{1}{k} = n\left(E + \log n + \frac{1}{2n}\cdots\right);$$

alle diese Summen zusammengenommen überschreiten also nicht die Ordnung $n \log n$; da endlich nach der Euler'schen Formel (1 b) des vor. Abschnitts

$$n^2 \cdot \sum_{1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2 n^2}{6} - n + \frac{1}{2}\cdots$$

d. i. bis auf Glieder, deren Ordnung geringer ist als $n \log n$, gleich $\frac{\pi^2 n^2}{6}$ ist, so ergiebt sich aus diesem allen zuletzt

$$\sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}n^2 + O(n \log n). \tag{12}$$

Aus diesem Werthe von $\sigma(n)$ findet sich zuerst bis auf Glieder von der Ordnung $\log n$ genau das asymptotische Gesetz

$$\frac{S(1) + S(2) + \cdots + S(n)}{n} = \frac{\pi^2}{12} \cdot n; \tag{13}$$

ferner ist, da

$$\frac{(n+m)\log(n+m) - n\log n}{m} = \log n + \log\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} + \log\left(1 + \frac{m}{n}\right),$$

wenn $\frac{m}{n}$ mit unendlich wachsendem n, wie bei der Bildung von $Mf(n)$ vorgeschrieben ist, gegen Null convergirt, $\log n + 1$ zur Grenze hat, bis auf Glieder von der Ordnung $\log n$ genau

$$\frac{\sigma(n+m) - \sigma(n)}{m} = \frac{\pi^2 n}{6}\left(1 + \frac{m}{2n}\right),$$

und daraus findet sich

$$MS(n) = \frac{\pi^2 n}{6}, \tag{14}$$

und zwar in dem Sinne, dass das Verhältniss beider Seiten bei unendlich wachsendem n gegen die Einheit convergirt.

3. Wir haben bei der zweiten Aufgabe uns auf eine Umformung gestützt, welche in der Formel (8) des vorigen Abschnitts zum Ausdrucke kommt. Die weiteren ähnlichen Untersuchungen Dirichlet's beruhen auf einer viel allgemeineren Transformationsgleichung*), in welcher die eben genannte als einfacher Fall enthalten ist. Wir werden daher vor allem diese allgemeine Umformung eingehend erörtern.

Zu diesem Zwecke verstehen wir unter

$$\sigma = \Psi(s) \tag{15}$$

eine Beziehung zwischen s und σ, bei welcher diese Grössen sich eindeutig entsprechen, während $\Psi(s)$ von $s = 1$ bis zur positiven ganzen Zahl $s = p$ hin eine Reihe stetig abnehmender positiver Werthe darbietet; die umgekehrte Funktion

$$s = \psi(\sigma) \tag{16}$$

wird dann dasselbe Verhalten zeigen, während σ von $\Psi(p)$ bis $\Psi(1)$ hin wächst.

Werden alsdann zwei zahlentheoretische Funktionen $f(n)$, $F(n)$ betrachtet, welche durch die Beziehung

$$F(x) = \sum_{k=1}^{[x]} f(k) \tag{17}$$

*) S. Dirichlet's Abhandlung „Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie" in den Abhandlungen der Berl. Acad. v. J. 1849, sowie seine Notiz „Ueber ein, die Division betreffendes Problem" in den Monatsber. der Berl. Acad. v. J. 1851 S. 20.

mit einander verbunden sind, so ergiebt sich daraus

$$F[\Psi(s)] = \sum_{1}^{[\Psi(s)]} f(k) \tag{18}$$

und folglich

$$\sum_{s=1}^{p} F[\Psi(s)] = \sum_{s=1}^{p} \big(f(1) + f(2) + \cdots + f[\Psi(s)]\big) . \tag{19}$$

Bezeichnet nun k irgend eine positive ganze Zahl $\leqq [\Psi(1)]$, so kommt die Funktion $f(k)$, solange $k \leqq [\Psi(p)]$ ist, in jedem Gliede der Summe einmal, in der ganzen Summe mithin genau p mal vor; ist dagegen $k > [\Psi(p)]$, so kommt $f(k)$ nur vor bis zu demjenigen Gliede der Summe inclusive, in welchem

$$[\Psi(s+1)] < k \leqq [\Psi(s)]$$

ist; diese Bedingungen sind, da k ganzzahlig, mit den anderen gleichbedeutend:

$$\Psi(s+1) < k \leqq \Psi(s)$$

und führen nach der vorausgesetzten Beschaffenheit der Funktion Ψ zu den folgenden:

$$s + 1 > \psi(k) \geqq s ,$$

aus welchen sich für s die Bestimmung ergiebt:

$$s = [\psi(k)] .$$

Ist also $k > [\Psi(p)]$, so kommt die Funktion $f(k)$ in der Summe nur genau $[\psi(k)]$ Mal vor. Hieraus ergiebt sich für (19) die neue Gestalt:

$$\sum_{1}^{p} F[\Psi(s)] = p \cdot \sum_{1}^{[\Psi(p)]} f(k) + \sum_{[\Psi(p)]+1}^{[\Psi(1)]} [\psi(k)] \cdot f(k) . \tag{20}$$

Ist ferner q eine positive ganze Zahl $< p$, so findet man gleicherweise

$$\sum_{1}^{q} F[\Psi(s)] = q \cdot \sum_{1}^{[\Psi(q)]} f(k) + \sum_{[\Psi(q)]+1}^{[\Psi(1)]} [\psi(k)] \cdot f(k) . \tag{21}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$[\Psi(p)] = \beta , \quad [\Psi(q)] = \gamma ; \tag{22}$$

wird dann die Gleichung (21) von (20) subtrahirt, so geht mit Rücksicht auf (18) folgende sehr allgemeine Transformationsgleichung hervor:

$$(23)\quad \sum_{q+1}^{p} F[\Psi(s)] = p\cdot F(\beta) - q\cdot F(\gamma) + \sum_{\beta+1}^{\gamma} [\psi(k)]\cdot f(k),$$

der man auch diese Gestalt geben kann:

$$(23a)\quad \sum_{1}^{\gamma} [\psi(k)]\, f(k) = qF(\gamma) - pF(\beta) + \sum_{1}^{\beta} [\psi(k)] f(k) + \sum_{q+1}^{p} F[\Psi(s)].$$

Nehmen wir, um eine erste Anwendung von dieser Formel zu machen, $\sigma = \Psi(s) = \frac{x}{s}$ an, wo x ein beliebiger positiver Werth sei; die für $\Psi(s)$ gemachten Voraussetzungen sind offenbar erfüllt und man hat $\psi(\sigma) = \frac{x}{\sigma}$, sowie $\beta = \left[\frac{x}{p}\right]$, $\gamma = \left[\frac{x}{q}\right]$, die allgemeine Formel (23a) nimmt daher die besondere Gestalt an:

$$(24)\quad \sum_{1}^{\left[\frac{x}{q}\right]} \left[\frac{x}{k}\right] f(k) = qF\left[\frac{x}{q}\right] - pF\left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{1}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \left[\frac{x}{k}\right] f(k) + \sum_{q+1}^{p} F\left[\frac{x}{s}\right];$$

und, wenn $q = 1$ d. h. $\gamma = [x]$ gewählt wird, wo dann $qF\left[\frac{x}{q}\right] = F\left[\frac{x}{1}\right]$ zur letzten Summe hinzugezogen werden kann,

$$(25)\quad \sum_{1}^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] f(k) = -pF\left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{1}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \left[\frac{x}{k}\right] f(k) + \sum_{1}^{p} F\left[\frac{x}{s}\right].$$

In dieser letztern Formel wollen wir für die bisher beliebige ganze Zahl p das grösste Ganze wählen, welches in $\sqrt{x}$ enthalten ist, sodass die Ungleichheiten stattfinden

$$(26)\qquad p^2 < x < (p+1)^2.$$

Ist dann erstens x eine Quadratzahl, so wird $p^2 = x$, $\frac{x}{p} = p = \left[\frac{x}{p}\right]$ sein und die Gleichung (25) erhält die Gestalt:

$$(27)\quad \sum_1^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] f(k) = -pF(p) + \sum_1^{p} \left[\frac{x}{k}\right] f(k) + \sum_1^{p} F\left[\frac{x}{s}\right].$$

Ist aber zweitens x keine Quadratzahl, so wird

$$(28)\quad \begin{cases} p^2 < x < (p+1)^2 \\ p < \frac{x}{p} < p + 2 + \frac{1}{p} \end{cases}$$

sein. Also ist

entweder $\left[\frac{x}{p}\right] = p$ und man kommt dann zu derselben Gleichung (27) zurück;

oder $\left[\frac{x}{p}\right] = p+1$; hieraus folgt $\frac{x}{p+1} > p$, aus (28) aber $\frac{x}{p+1} < p+1$, folglich ist $p = \left[\frac{x}{p+1}\right]$. Daher kann man schreiben

$$-pF\left[\frac{x}{p}\right] + \sum_1^{\left[\frac{x}{p}\right]} \left[\frac{x}{k}\right] f(k) = -pF(p+1) + \sum_1^{p+1} \left[\frac{x}{k}\right] f(k)$$

$$= -pF(p) - pf(p+1) + \sum_1^{p} \left[\frac{x}{k}\right] f(k) + p \cdot f(p+1)$$

$$= -pF(p) + \sum_1^{p} \left[\frac{x}{k}\right] f(k)$$

und die Gleichung (25) geht wieder in die Gleichung (27) über;

oder $\left[\frac{x}{p}\right] = p+2$. Hieraus folgt

$$\frac{x}{p+1} > \frac{x}{p+2} > p,$$

aus (28) aber

$$\frac{x}{p+2} < \frac{x}{p+1} < p+1$$

also

$$\left[\frac{x}{p+1}\right] = \left[\frac{x}{p+2}\right] = p;$$

daher wird

$$-pF\left[\frac{x}{p}\right]+\sum_{1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\left[\frac{x}{k}\right]f(k)=-pF(p+2)+\sum_{1}^{p+2}\left[\frac{x}{k}\right]f(k)$$

$$=-pF(p)-pf(p+1)-pf(p+2)+\sum_{1}^{p}\left[\frac{x}{k}\right]f(k)$$

$$+pf(p+1)+pf(p+2)$$

sein, und man erhält statt der Gleichung (25) auch jetzt wieder die Gleichung (27).

Wird also p als grösstes in $\sqrt{x}$ enthaltenes Ganzes gewählt, so besteht immer die specielle Gleichung (27).

Wir zeichnen einen besonders interessanten Fall derselben hier aus, der aus der Annahme $f(k)=1$ und der entsprechenden Annahme $F(k)=k$ hervorgeht. Die Formel (27) verwandelt sich dadurch augenscheinlich in die folgende einfache Gleichung:

$$\sum_{1}^{[x]}\left[\frac{x}{k}\right]=2\cdot\sum_{1}^{[\sqrt{x}]}\left[\frac{x}{k}\right]-[\sqrt{x}]^2 \tag{29}$$

oder, wenn man sich der Formel 2, 2) des 11. Abschnittes erinnert, auch in die nachstehende:

$$\tau(x)=2\cdot\sum_{1}^{[\sqrt{x}]}\left[\frac{x}{k}\right]-[\sqrt{x}]^2. \tag{29a}$$

4. Diese besonderen Formeln, welche der Annahme $p=[\sqrt{x}]$ entsprechen, freilich unter einer von der hier gewählten etwas verschiedenen Form, haben nun bei den Dirichlet'schen Untersuchungen der Mittelwerthe zahlentheoretischer Funktionen eine hervorragende Bedeutung. Es mag deshalb von Interesse sein, auch noch einige andere Beweise insbesondere der letzten merkwürdigen Formel hier vorzuführen.

Wir fügen also zunächst einen einfachen Beweis nach Césaro*) hier an, der x als eine Quadratzahl voraussetzt. Für diesen Fall ist nämlich die Formel (29) eine unmittelbare

*) Césaro, sur un théorème de Mr. Stieltjes, in Comptes Rendus 96 p. 1029.

Folge aus einer allgemeineren Gleichung, die wir folgendermassen herleiten können.

Sei $[x]$, in zwei Faktoren zerlegt, gleich $a \cdot b$. Die sämmtlichen ganzzahligen Systeme ξ, η, für welche $\xi\eta \leqq x$ ist, lassen sich folgendermassen darstellen:

$$\begin{array}{l} 1,1;\ \ 2,1;\ \ 3,1;\ \ldots\ [x],1; \\ 1,2;\ \ 2,2;\ \ 3,2;\ \ldots\ \left[\frac{x}{2}\right],2; \\ 1,3;\ \ 2,3;\ \ldots\ \left[\frac{x}{3}\right],3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,[x]. \end{array}$$

Ihre Menge aber lässt sich auf verschiedene Weisen abzählen. Erstens, indem man, sei es nach den Horizontal- oder nach den Vertikalreihen zählt, durch die Summe

$$\sum_1^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right].$$

Zweitens, wenn man die ersten a Horizontalreihen nimmt und zugleich die ersten $\left[\frac{x}{a}\right] = b$ Vertikalreihen, wobei jedoch diejenigen ab-Systeme, welche diesen Horizontal- und Vertikalreihen gemeinsam sind, doppelt gezählt werden; die Gesammtmenge der Systeme ist hiernach auch gleich

$$-[x] + \sum_1^{a} \left[\frac{x}{k}\right] + \sum_1^{b} \left[\frac{x}{k}\right].$$

Setzt man diesen Ausdruck dem vorigen gleich, so entspringt die Césaro'sche Gleichung

$$\sum_1^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] = \sum_1^{a} \left[\frac{x}{k}\right] + \sum_1^{b} \left[\frac{x}{k}\right] - [x]. \tag{30}$$

Ist nun x eine Quadratzahl, $x = p^2$, so folgt ohne weiteres, indem man $a = b = p$ setzt,

$$\sum_1^{[x]} \left[\frac{x}{k}\right] = 2 \cdot \sum_1^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{k}\right] - [\sqrt{x}]^2.$$

Einen andern Beweis der Formel (29) verdankt man Hermite*). Indem wir n als positive ganze Zahl und $p = [\sqrt{n}]$ annehmen, betrachten wir den Ausdruck

$$F(n) = 2 \cdot \sum_{1}^{p} \left[\frac{n}{k}\right] - p^2 .$$

Ist gleicherweise $q = [\sqrt{n-1}]$, so wird man haben

$$F(n-1) = 2 \cdot \sum_{1}^{q} \left[\frac{n-1}{k}\right] - q^2 .$$

Nun können nur zwei Fälle statthaben: entweder ist n ein Quadrat oder nicht. Im zweiten dieser Fälle ist $p = q$; denn aus den Ungleichheiten

$$p^2 < n < (p+1)^2$$
$$q^2 \leq n - 1 < (q+1)^2$$

folgt

$$q^2 < (p+1)^2, \quad (q+1)^2 > p^2 - 1 \geq p^2$$

also $p - 1 < q < p + 1$; wäre aber $p - 1 = q$, so würde

$$p^2 = (q+1)^2 > n - 1 \geq n$$

sein gegen die Voraussetzung, und somit folgt $p = q$. Durch Subtraktion der obigen beiden Gleichungen von einander erhält man demnach

$$(31) \qquad F(n) - F(n-1) = 2 \cdot \sum_{1}^{p} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] \right).$$

Ist aber $\left[\frac{n-1}{k}\right] = i$ d. h. $n - 1 = ki + r$, wo $r < k$, so folgt

$$n = ki + r + 1 \qquad \text{also} \qquad \frac{n}{k} = i + \frac{r+1}{k}$$

und folglich $\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{n-1}{k}\right] + 1$, wenn $r + 1 = k$ d. i. n ein Vielfaches von k ist, sonst aber $\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{n-1}{k}\right]$. Hiernach verschwindet das allgemeine Glied der Summe in (31) für alle k, ausgenommen für diejenigen, welche Theiler von n sind,

*) S. Acta Mathem. Bd. 2 p. 298: Sur quelques points dans la théorie des nombres, par Ch. Hermite et R. Lipschitz.

wo es gleich 1 ist; man findet daher die rechte Seite gleich der doppelten Anzahl der Theiler k von n, welche $< p$ d. h. $< \sqrt{n}$ sind, also, weil jedem Theiler h von n, der grösser als $\sqrt{n}$ ist, nach der Formel $n = h \cdot k$ ein solcher kleiner als $\sqrt{n}$ entspricht und umgekehrt, gleich der Anzahl aller Theiler von n; mithin ist

$$F(n) - F(n-1) = T(n), \tag{32}$$

woraus sofort

$$F(n) = \sum_1^n T(k) \tag{33}$$

erschlossen wird.

Im ersten Falle aber, wo $n = p^2$ eine Quadratzahl ist, findet sich $q^2 < p^2 < (q+1)^2$ d. h. $p = q + 1$. In diesem Falle wird also

$$F(n) - F(n-1) = 2 \cdot \sum_1^p \left(\left[\frac{n}{k} \right] - \left[\frac{n-1}{k} \right] \right) - p^2 + (p-1)^2 + 2 \cdot \left[\frac{n-1}{p} \right]$$

d. h., da dem Obigen zufolge

$$p = \left[\frac{n}{p} \right] = \left[\frac{n-1}{p} \right] + 1$$

ist, einfacher

$$F(n) - F(n-1) = 2 \cdot \sum_1^p \left(\left[\frac{n}{k} \right] - \left[\frac{n-1}{k} \right] \right) - 1$$

d. h. gleich der doppelten Anzahl aller Theiler k von n, welche $< p$ sind, weniger Eins, was im vorliegenden Falle der Anzahl aller Zerlegungen von n in zwei Faktoren d. i. wieder der einfachen Anzahl aller Theiler von n gleich ist. Somit gelangt man wieder zu den Gleichungen (32), (33), deren letztere, wenn $n = [x]$ gewählt wird, mit der Formel (29a) identisch ist.

Wir dürfen hier eine interessante Verallgemeinerung dieser Formel nicht unterdrücken, welche von Lipschitz gegeben worden ist*).

Sei $T_s(k)$ die Anzahl aller Theiler von k, welche s^{te} Potenzen sind, und

*) Am vorher angegebenen Orte.

$$\tau_s(n) = \sum_{k=1}^{n} T_s(k).$$

Ist h^s irgend eine s^{te} Potenz der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$, so wird sie so oft als Theiler dieser Zahlen auftreten, als es Vielfache von h^s in ihrer Reihe giebt, also $\left[\frac{n}{h^s}\right]$ Mal. Schreibt man daher folgende Zahlen auf:

$$\begin{aligned}
&1^s, \quad 2\cdot 1^s, \quad 3\cdot 1^s, \cdots n\cdot 1^s\\
&2^s, \quad 2\cdot 2^s, \quad 3\cdot 2^s, \cdots \left[\frac{n}{2^s}\right]\cdot 2^s\\
&3^s, \quad 2\cdot 3^s \cdots \left[\frac{n}{3^s}\right]\cdot 3^s\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&m^s, \quad 2\cdot m^s, \cdots \left[\frac{n}{m^s}\right]\cdot m^s,
\end{aligned}$$

wo m^s die grösste s^{te} Potenz $\leqq n$ ist, so ist die Anzahl aller dieser Zahlen gleich $\tau_s(n)$. Man kann ihre Menge aber auf verschiedene Weisen abzählen. Zählt man zuerst nach Horizontalreihen, so erhält man

$$\tau_s(n) = \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{n}{h^s}\right]; \tag{34}$$

zählt man zweitens nach Vertikalreihen, so kommt offenbar

$$\tau_s(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{n}{k}\right)^{1/s}\right]; \tag{35}$$

nimmt man aber endlich die Horizontalreihen bis zur p^{ten} inclusive und, indem man zur Abkürzung $\left[\frac{n}{p^s}\right] = q$ setzt, die Vertikalreihen bis zur q^{ten} inclusive zusammen, so umfasst man sämmtliche Zahlen, diejenigen pq von ihnen, welche zugleich jenen Horizontal- und Vertikalreihen angehören, aber zweimal. Man erhält demnach bei dieser Zählung, welche die beiden ersteren Arten als besondere Fälle in sich begreift,

$$\tau_s(n) = -pq + \sum_{1}^{p}\left[\frac{n}{k^s}\right] + \sum_{1}^{q}\left[\left(\frac{n}{k}\right)^{1/s}\right]. \tag{36}$$

Die bisher beliebige Zahl p wollen wir nun als das grösste in $n^{\frac{1}{1+s}}$ enthaltene Ganze:

$$p = \left[n^{\frac{1}{1+s}}\right]$$

wählen, sodass die Ungleichheiten bestehen

$$p^{1+s} \leqq n < (p+1)^{1+s}, \tag{37}$$

während zugleich

$$q < \frac{n}{p^s} < q+1 \tag{38}$$

ist. Mittels der ersteren von jenen erschliesst man aus der zweiten von diesen $p \leqq \frac{n}{p^s} < q+1$, also entweder $p = q$ oder $p+1 < q$. Im ersteren Falle nimmt die Formel (36) die Gestalt an:

$$\tau_s(n) = -p^2 + \sum_1^p \left[\frac{n}{k^s}\right] + \sum_1^p \left[\left(\frac{n}{k}\right)^{1/s}\right]. \tag{39}$$

Im andern Falle aber folgt aus der ersten der Ungleichheiten (38), welche auch so geschrieben werden kann: $p \leqq \left(\frac{n}{q}\right)^{1/s}$, a fortiori $p < \left(\frac{n}{p+1}\right)^{1/s}$, und nach der zweiten der Ungleichheiten (37)

$$p < \left(\frac{n}{q}\right)^{1/s} < \left(\frac{n}{p+1}\right)^{1/s} < p+1,$$

sodass die sämmtlichen grössten Ganzen

$$\left[\left(\frac{n}{p+1}\right)^{1/s}\right], \quad \left[\left(\frac{n}{p+2}\right)^{1/s}\right], \cdots \left[\left(\frac{n}{q}\right)^{1/s}\right]$$

den gemeinsamen Werth p haben. Zerlegt man also in der Gleichung (36) die zweite Summation in eine von 1 bis p und eine von $p+1$ bis q reichende, so lässt die Gleichung sich folgendermassen schreiben:

$$\tau_s(n) = -pq + \sum_1^p \left[\frac{n}{k^s}\right] + \sum_1^p \left[\left(\frac{n}{k}\right)^{1/s}\right] + (q-p)p$$

d. h. sie nimmt die dem vorigen Falle zukommende Gestalt (39) auch hier wieder an.

Bei der getroffenen Wahl der Zahl p besteht also allgemein die Gleichung (39). In ihr ist die Hermite'sche Formel ersichtlich als einfachster Fall enthalten und ergiebt sich, sobald man für s den Werth 1 wählt. —

5. Kehren wir nunmehr zur allgemeinen Formel (27) wieder zurück, um sie für den vorgesteckten Zweck zu verwenden, so wollen wir von vornherein den Vortheil hervorheben, den sie dafür gewährt. Während zur Linken die Summe bis zur Grenze x reicht, dehnen sich diejenigen zur Rechten nur bis zu der Grenze $\sqrt{x}$ aus; werden daher die Summen nur angenähert bestimmt mit Vernachlässigung von Grössen, welche in Bezug auf die oberen Grenzen von einer gewissen Ordnung sind, so werden bei Einführung der Transformation rechts nur solche Grössen vernachlässigt, die nicht in x, sondern in $\sqrt{x}$ von dieser Ordnung sind, und so wird eine grössere Annäherung erreicht werden.

Um dies sogleich am einfachsten Falle zu zeigen, gehen wir noch einmal zur ersten Aufgabe zurück, welche den mittleren Werth der Anzahl aller Theiler einer Zahl n suchte. Wir haben in diesem Falle für die summatorische Funktion $\tau(n)$ die Gleichung

$$\tau(n) = \sum_{1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right];$$

durch Anwendung der Transformationsgleichung (29a) aber geben wir ihr die Gestalt

$$\tau(n) = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{k}\right] - [\sqrt{n}]^2$$

d. i.

$$\tau(n) = 2n \cdot \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{k} - n + O(\sqrt{n}),$$

und finden nun mittels der Euler'schen Summenformel sogleich

$$\tau(n) = 2n\left(E + \log[\sqrt{n}] + \frac{1}{2[\sqrt{n}]} \cdots\right) - n + O(\sqrt{n})$$

oder, wie leicht zu übersehen, einfacher

$$\tau(n) = n \log n + (2E - 1)n + O(\sqrt{n}),^{*}) \tag{40}$$

eine Formel, welche lehrt, was bisher unentschieden blieb, dass im asymptotischen Ausdrucke wirklich ein Glied von der Ordnung n vorhanden ist. Aus dieser Formel findet sich nunmehr

$$\frac{\tau(n+m) - \tau(n)}{m} = \frac{(n+m)\log(n+m) - n\log n}{m} + 2E - 1 + \frac{O(\sqrt{n})}{m},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\log n + \log\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} + \log\left(1 + \frac{m}{n}\right) + 2E - 1 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{m}\right).$$

Lässt man also m, n gleichzeitig wachsen in der Weise, dass $\frac{m}{n}$ zugleich mit $\frac{\sqrt{n}}{m}$ abnimmt, was z. B. geschehen wird, wenn man, unter der Voraussetzung $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $m = n^{\frac{1}{2}-\delta}$ setzt, so erhält man schliesslich für den Grenzwerth des Quotienten d. h. für $MT(n)$ folgenden Ausdruck:

$$MT(n) = \log n + 2E, \tag{41}$$

eine Formel, welche in dem Sinne zu verstehen ist, dass bei jenem Wachsen von n der Unterschied beider Seiten gegen Null convergirt.

Sei, während n eine beliebig gegebene positive ganze Zahl ist, $T_1(k)$ die Anzahl derjenigen Theiler von k, welche $\leq [\sqrt{n}]$ sind, $T_2(k)$ die Anzahl aller übrigen Theiler von k, sodass $T(k) = T_1(k) + T_2(k)$ und folglich

---

*) In einem Briefe vom 23. 7. 1858, welchen Dirichlet an Kronecker gerichtet hat und welcher in den Göttinger Nachrichten v. J. 1885 S. 379 veröffentlicht ist, theilt Dirichlet mit, dass es ihm gelungen sei, die Summe $\sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right]$, die er bisher nur mit einem Fehler von der Ordnung $\sqrt{n}$ angegeben, „bedeutend in die Enge zu treiben". Das hierzu dienende Mittel „welches aller Wahrscheinlichkeit nach auch auf die folgenden Fälle anwendbar sein werde" giebt Dirichlet leider nicht an.

$$\sum_1^n T(k) = \sum_1^n T_1(k) + \sum_1^n T_2(k)$$

ist. Aus (40) folgt dann zunächst die Beziehung

$$(40a)\quad \sum_1^n T_1(k) + \sum_1^n T_2(k) = n(\log n + 2E - 1) + O(\sqrt{n}).$$

Andererseits ist nach (29a)

$$\sum_1^n T(k) = 2 \cdot \sum_1^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{k}\right] - [\sqrt{n}]^2$$

und man überzeugt sich durch die gleiche Betrachtung, welche zur Formel (10a) des 11. Abschnitts geführt hat, dass

$$\sum_1^{[\sqrt{n}]} \left[\frac{n}{k}\right] = \sum_1^n T_1(k)$$

ist. Die vorige Formel lässt sich hiernach auch so schreiben:

$$(29b)\qquad \sum_1^n T_1(k) - \sum_1^n T_2(k) = [\sqrt{n}]^2,$$

d. i., wenn ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet,

$$(40b)\qquad \sum_1^n T_1(k) - \sum_1^n T_2(k) = n - 2\vartheta\sqrt{n} + \vartheta^2.$$

Wird diese Gleichung mit der Gleichung (40a) durch Addition und Subtraction verbunden, so finden sich sogleich folgende Formeln:

$$\sum_1^n T_1(k) = \frac{n}{2}(\log n + 2E) + O(\sqrt{n})$$

$$\sum_1^n T_2(k) = \frac{n}{2}(\log n + 2E - 2) + O(\sqrt{n}),$$

welche von Gegenbauer gegeben worden sind*).

Ferner findet man aus (40b)

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n (T_1(k) - 1)}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n T_2(k)}{n}.$$

*) Arithm. Theoreme II in den Denkschr. d. Wiener Acad. Bd. 49 S. 24.

Nun befindet sich unter den Theilern einer Zahl k, welche $\leq [\sqrt{n}]$ sind, selbstverständlich allezeit die Eins, demnach bezeichnet $T_1(k) - 1$ die Anzahl der von Eins verschiedenen Theiler von k, welche $\leq [\sqrt{n}]$ sind. Mit Rücksicht hierauf zieht Gegenbauer aus der vorstehenden Gleichung den Schluss: Abgesehen vom Theiler 1 hat jede Zahl n im Mittel ebensoviel Theiler, welche $> \sqrt{n}$ sind, als solche, welche $< \sqrt{n}$ sind. Diese Folgerung aus der vorigen Gleichung, die gar keine eigentliche Mittelwerthsgleichung ist, würde nur zulässig sein, wenn $T_1(k)$ die Anzahl derjenigen Theiler von k bedeutete, welche — nicht $\leq [\sqrt{n}]$, sondern $\leq [\sqrt{k}]$ sind. Der Satz ist auch nicht richtig. Man findet nämlich leicht, wenn $T'(k)$ die Anzahl derjenigen Theiler von k bezeichnet, welche $\leq [\sqrt{k}]$ sind, $T''(k)$ die Anzahl der übrigen, folgende Beziehung (s. Formel (111)):

$$\sum_1^n T'(k) = \frac{1}{2}\tau(n) + O(\sqrt{n})$$

d. h.

$$\sum_1^n T'(k) = \frac{n}{2}(\log n + 2E - 1) + O(\sqrt{n})$$

also auch

$$\sum_1^n T''(k) = \frac{n}{2}(\log n + 2E - 1) + O(\sqrt{n})$$

und folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n T'(k)}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n T''(k)}{n}.$$

Jede Zahl n hat also im Mittel ebensoviel Theiler, die $> \sqrt{n}$ sind, als solche, welche $< \sqrt{n}$ sind; man weiss ja in der That, dass für jede von einem Quadrate verschiedene Zahl n jene Anzahl ebensogross, für jede Quadratzahl n aber um 1 geringer ist als diese. —

Da

$$\sum_1^n \frac{n}{k} = n \log n + En + \frac{1}{2} \cdots$$

ist, so findet sich aus (40)

$$\sum_1^n \left(\frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right]\right) = (1 - E)n + \frac{1}{2} \cdots$$

also ist asymptotisch

$$\mathfrak{M}\left(\frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right]\right) = 1 - E < \frac{1}{2}. \tag{42}$$

Setzt man nun

$$\frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right] = \varrho, \tag{43}$$

so können die Zahlen k der Reihe 1, 2, 3, ... n in zwei Classen getheilt werden, in die Classe K derjenigen, für welche ϱ, der im Quotienten $\frac{n}{k}$ verbleibende Bruchtheil, kleiner ist als $\frac{1}{2}$, und in die Classe K' der übrigen, für welche er $> \frac{1}{2}$ ist; die Anzahl der ersteren sei A, die Anzahl der letzteren A'. Die Formel (42) beweist nun zwar nicht, aber sie legt die Vermuthung nahe, dass bei wachsendem n die Anzahl A grösser sei als A'. Dirichlet hat diese Vermuthung bestätigt. Er geht davon aus, dass, wie aus (43) leicht einleuchtet*), für die Zahlen der Classe K

*) Es soll hier die allgemeine Beziehung nicht unerwähnt bleiben, aus welcher dies Resultat als besonderer Fall entspringt. Ist

$$\frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right] = \varrho,$$

oder, indem $k\varrho = r$ gesetzt wird,

$$n - k \cdot \left[\frac{n}{k}\right] = r,$$

wo nun die ganze Zahl $r < k$ ist, so folgt sogleich

$$\left[\frac{hn}{k}\right] - h \cdot \left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{hr}{k}\right],$$

wo $\frac{hr}{k}$ also auch $\left[\frac{hr}{k}\right] < h$ ist. Also: Ist r der Rest der Theilung von n durch k, so ist $\left[\frac{hr}{k}\right]$ der Rest der Theilung von $\left[\frac{hn}{k}\right]$ durch h und

$$\left[\frac{\left[\frac{hn}{k}\right]}{h}\right] = \left[\frac{n}{k}\right],$$

$$\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\cdot\left[\frac{n}{k}\right] = 0 \quad \text{d. i.} \quad \left[\frac{2n}{k}\right] \text{ gerade,}$$

für die Zahlen der Classe K'

$$\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\cdot\left[\frac{n}{k}\right] = 1 \quad \text{d. i.} \quad \left[\frac{2n}{k}\right] \text{ ungerade}$$

ist; die ersteren Zahlen sind mit anderen Worten diejenigen Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$, deren grösste Vielfache unterhalb $2n$ *gerade* Vielfache, die Zahlen der Classe K' diejenigen, deren grösste Vielfache unterhalb $2n$ *ungerade* Vielfache sind, wobei der Ausdruck unterhalb $2n$ die Grenze $2n$ mit einschliessen soll. Aus diesem Verhalten der Zahlen K und K' ergiebt sich ohne weiteres

$$A' = \sum_{1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\cdot\left[\frac{n}{k}\right]\right), \tag{44}$$

und indem Dirichlet diese Summe mittels der obigen Transformationen weiter behandelt, zeigt er, dass asymptotisch

$$A' = (\log 4 - 1)n, \quad \text{also} \quad A = (2 - \log 4)n$$

und, da $3 - 2\log 4 > 0$ ist, in der That $A > A'$ ist*).

Dirichlet hat aber in einer späteren Arbeit**) diese Untersuchung wesentlich allgemeiner geführt, indem er — $p \leqq n$ vorausgesetzt — den asymptotischen Ausdruck für die Menge der Zahlen k der Reihe $1, 2, 3, \ldots p$ sucht, für welche

$$\frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right] < \alpha \tag{45}$$

d. i. kleiner als ein beliebiger Werth zwischen 0 und 1 ist. Beschränken wir uns in unserer Darstellung auf den Fall, wo $p = n$ ist. Aus (43) folgt

---

welch' letztere Formel auch durch die Formel (11) des 11. Abschnitts bestätigt wird. Für $h = 2$ ergiebt sich hieraus sofort

$$\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\cdot\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{2r}{k}\right]$$

also 0 oder 1, je nachdem $r < \frac{k}{2}$ oder $> \frac{k}{2}$ d. h. $\varrho < \frac{1}{2}$ oder $> \frac{1}{2}$ ist, wie oben behauptet.

*) In der ersten der bei Nr. 3 genannten Arbeiten.

**) In der zweiten der bei Nr. 3 genannten Arbeiten.

$$\frac{n}{k} - \alpha = \left[\frac{n}{k}\right] + \varrho - \alpha;$$

ist nun $\varrho \geq \alpha$ also $\varrho - \alpha$ positiv und kleiner als 1, so wird

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k} - \alpha\right] = 0$$

sein; ist aber $\varrho < \alpha$ also $\varrho - \alpha$ negativ und numerisch kleiner als 1, so findet sich

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k} - \alpha\right] = 1,$$

und demnach wird die Anzahl $\mathfrak{A}$ derjenigen Zahlen k der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$, für welche

$$\frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right] < \alpha$$

ist,

$$\mathfrak{A} = \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k} - \alpha\right]\right). \tag{46}$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir die allgemeine Formel (23) an, indem wir darin $f(k) = 1$ also $F(k) = k$ voraussetzen. Wählen wir zunächst $\psi(k) = \frac{n}{k}$ also auch $\Psi(k) = \frac{n}{k}$, so werden $\beta = \left[\frac{n}{p}\right]$, $\gamma = \left[\frac{n}{q}\right]$ und die Formel nimmt die Gestalt an:

$$\sum_{q+1}^{p} \left[\frac{n}{k}\right] = p\beta - q\gamma + \sum_{\beta+1}^{\gamma} \left[\frac{n}{k}\right]$$

also, wenn $p = n$ ist,

$$\sum_{q+1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] = n - q\gamma + \sum_{2}^{\gamma} \left[\frac{n}{k}\right],$$

wofür sich einfacher schreiben lässt

$$\sum_{q+1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] = -q\gamma + \sum_{1}^{\gamma} \left[\frac{n}{k}\right]. \tag{47}$$

Wählen wir zweitens $\psi(k) = \frac{n}{k+\alpha}$, so wird $\Psi(k) = \frac{n}{k} - \alpha$ und die Werthe von β, γ, die wir zum Unterschiede von den vorigen mit β', γ' bezeichnen wollen, werden

$$\beta' = \left[\frac{n}{p} - \alpha\right], \quad \gamma' = \left[\frac{n}{q} - \alpha\right]$$

d. h. für $n = p$:

$$\beta' = 0, \qquad \gamma' = \left[\frac{n}{q} - \alpha\right];$$

die Formel (23) liefert so die folgende:

$$(48) \qquad \sum_{q+1}^{n} \left[\frac{n}{k} - \alpha\right] = -q\gamma' + \sum_{1}^{\gamma'} \left[\frac{n}{k+\alpha}\right].$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen (47), (48), in denen q irgend eine Zahl $< n$ bedeutet, kann man den Ausdruck (46) in nachstehende Gestalt überführen:

$$\mathfrak{A} = \sum_{1}^{q} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k} - \alpha\right]\right) + \sum_{1}^{\gamma} \left[\frac{n}{k}\right] - \sum_{1}^{\gamma'} \left[\frac{n}{k+\alpha}\right] + q(\gamma' - \gamma);$$

da $\left[\frac{n}{q}\right] - \left[\frac{n}{q} - \alpha\right] = \gamma - \gamma'$ nur 0 oder 1 sein kann, so darf man hierfür auch setzen:

$$(49) \quad \mathfrak{A} = \sum_{1}^{q} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k} - \alpha\right]\right) + \sum_{1}^{\gamma} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k+\alpha}\right]\right) + \varepsilon \cdot \left(\left[\frac{n}{\gamma+\alpha}\right] - q\right),$$

wo ε gleich 0 oder 1 ist.

Wählt man nun für q das grösste in $\sqrt{n}$ enthaltene Ganze, so wird die erste Summe, welche nicht grösser sein kann als q, von der Ordnung $\sqrt{n}$, ferner kann γ (vgl., was in Nr. 3 zur Formel (27) bemerkt worden ist) nur einer der Werthe q, $q+1$, $q+2$ sein und folglich ist auch das dritte Glied zur Rechten von (49) von der Ordnung $\sqrt{n}$, sodass wir setzen dürfen

$$\mathfrak{A} = \sum_{1}^{\gamma} \left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k+\alpha}\right]\right) + O(\sqrt{n}).$$

oder noch einfacher

$$(50) \qquad \mathfrak{A} = n \cdot \sum_{1}^{\gamma} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\alpha}\right) + O(\sqrt{n}).$$

Aus dieser Formel ergiebt sich ohne weiteres

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{A}}{n} = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\alpha} \right) \tag{51}$$

oder, da

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\alpha} = \int_0^1 (z^{k-1} - z^{k+\alpha-1}) dz \tag{52}$$

ist, auch nachstehende Formel:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{A}}{n} = \int_0^1 \frac{1 - z^{\alpha}}{1 - z} dz .$$

Dies Integral kommt auf eine Transscendente $\Psi(z)$ zurück, welche aus der Gaussischen (im 3. Bd. seiner Werke enthaltenen) Abhandlung, Disquisitiones generales circa seriem etc., her bekannt und zu deren Berechnung dort eine Tabelle gegeben ist; nach dieser letztern entspricht z. B. dem Grenzwerthe $\lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{A}}{n} = \frac{1}{2}$ der Werth

$$\alpha = 0{,}384686 \ldots$$

während umgekehrt dem Werthe $\alpha = \frac{1}{2}$, für welchen $\mathfrak{A}$ mit A identisch ist, der Grenzwerth

$$\lim_{n=\infty} \frac{A}{n} = 0{,}6137056 \ldots$$

zukommt, ein Werth, welcher mit dem oben angegebenen $2 - \log 4$ übereinstimmt.

Wir wollen aber direkt dieses specielle Resultat aus der allgemeinen Untersuchung herleiten. Setzt man in (50) $\alpha = \frac{1}{2}$ ein, und bedenkt, dass

$$\sum_{1}^{\gamma} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \right) = \sum_{1}^{\gamma} \frac{1}{k} - 2 \sum_{1}^{\gamma} \frac{1}{2k+1}$$

auch gleich

$$2 \sum_{1}^{\gamma} \frac{1}{k} - 2 \sum_{1}^{2\gamma} \frac{1}{k} + 2 - \frac{2}{2\gamma+1}$$

gesetzt werden kann, so folgt sogleich mittels der Eulerschen Summenformel

$$\sum_1^{\gamma}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2\left(\log\gamma+E+\frac{1}{2\gamma}\right)$$

$$-2\left(\log 2\gamma+E+\frac{1}{4\gamma}\right)+2-\frac{2}{2\gamma+1}$$

oder einfacher gleich

$$2-\log 4+\frac{1}{2\gamma}-\frac{2}{2\gamma+1}$$

und demnach

(53a) $$A=n(2-\log 4)+O(\sqrt{n}),$$

woraus dann

(53b) $$A'=n(\log 4-1)+O(\sqrt{n}),$$

also die früher angegebenen Formeln hervorgehen*).

6. Indem wir nunmehr die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ betrachten wollen, welche die Anzahl der zu n primen Zahlen $<n$ bestimmt, beginnen wir mit einer allgemeinen Bemerkung.

Seien $f(n)$ und $\psi(n)$ zwei Funktionen, welche so mit einander verbunden sind, dass

(54) $$\psi(n)=f(1)+f(d)+f(d')+\cdots+f(n)$$

ist, wo die Summation rechts auf alle Theiler von n sich erstreckt. Dann folgt sogleich

$$\sum_1^N\psi(n)=\sum_1^N\left(f(1)+f(d)+f(d')+\cdots+f(n)\right).$$

Nun ist jeder Theiler der Zahlen $1, 2, 3, \cdots N$ selbst eine dieser Zahlen und umgekehrt. Ist demnach k irgend eine dieser Zahlen, so wird die Summe zur Rechten $f(k)$ so oft enthalten, als Vielfache von k in der Reihe $1, 2, 3, \cdots N$ vorhanden sind, nämlich $\left[\frac{N}{k}\right]$ Mal, und man erhält somit die neue Gleichung:

*) Vgl. zu diesem Gegenstande auch Lebesgue's Note in Liouville's Journal sér. II t. 1 p. 377. Ferner auch einen allgemeineren Satz von Gegenbauer in seinen Arithmetischen Theoremen, Denkschr. d. Wiener Academie Bd. 49 2. Abth. S. 108.

$$(55) \qquad \sum_1^N \psi(n) = \sum_1^N \left[\frac{N}{k}\right] f(k),$$

in welcher die Formeln (10a) und (14a) des 11. Abschnittes als besondere, den Annahmen $f(k) = 1$ resp. $f(k) = k$ entsprechende Fälle einbegriffen sind.

Um zunächst eine Anwendung dieser Formel zu machen, welche an die letzten Untersuchungen anknüpft, verwandeln wir in ihr N in $2N$, so dass

$$\sum_1^{2N} \psi(n) = \sum_1^{2N} \left[\frac{2N}{k}\right] f(k)$$

hervorgeht, und finden alsdann durch zweifache Subtraktion der ursprünglichen Gleichung von dieser, wenn wir bedenken, dass $\left[\frac{N}{k}\right] = 0$ ist, sobald $k > N$,

$$\sum_1^{2N} \left(\left[\frac{2N}{k}\right] - 2\left[\frac{N}{k}\right]\right) f(k) = \sum_1^{2N} \psi(n) - 2\sum_1^{N} \psi(n)$$

oder auch gleich

$$\sum_1^N \big(\psi(N+n) - \psi(n)\big)$$

d. i. mit Rücksicht auf das im Vorigen Bemerkte den Satz:

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ diejenigen Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \cdots 2N$, deren grösste Vielfache unterhalb $2N$ ungerade Vielfache sind, so ist

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \cdots = \sum_1^N \big(\psi(N+n) - \psi(n)\big).$$

Insbesondere findet man, der Voraussetzung $f(n) = 1$ also $\psi(n) = T(n)$ entsprechend, den Zusatz:

Die Anzahl derjenigen Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \cdots 2N$, deren grösste Vielfache unterhalb $2N$ ungerade Vielfache sind, ist gleich

$$\sum_1^N \big(T(N+n) - T(n)\big)$$

d. i. gleich dem Ueberschuss der Anzahl aller Theiler der

Zahlen von $N+1$ bis $2N$ über die Anzahl aller Theiler der Zahlen von 1 bis N*).

Vergleichen wir übrigens die Formel (55) mit der Gleichung (8) des vorigen Abschnittes, so finden wir eine gleichfalls beachtenswerthe Beziehung:

$$\sum_1^N \psi(k) = \sum_1^N F\left[\frac{N}{k}\right] \tag{56}$$

zwischen den durch die Gleichung (54) dieses resp. (7) des vorigen Abschnittes mit der Funktion $f(n)$ verbundenen Funktionen $\psi(n)$ und $F(n)$.

7. Wenden wir uns nun zur Funktion $\varphi(n)$, so besteht bekanntlich für diese die charakteristische Gleichung

$$n = \varphi(1) + \varphi(d) + \varphi(d') + \cdots + \varphi(n), \tag{57}$$

aus welcher wir folglich, wenn wir wieder $\delta(n) = \frac{n^2+n}{2}$ und n für N setzen, nach (55) die specielle Gleichung

$$\delta(n) = \sum_1^n \left[\frac{n}{k}\right] \varphi(k)$$

oder nach (56) die schon im 11. Abschnitte ohne Beweis gegebene Formel

$$\delta(n) = \sum_1^n \Phi\left[\frac{n}{k}\right], \tag{58}$$

in welcher

$$\Phi(n) = \sum_1^n \varphi(k)$$

gedacht ist, erschliessen.

Wir werden nun das asymptotische Gesetz der Funktion $\Phi(n)$ auf zweifachem Wege hier ableiten, von denen der erste, von Dirichlet angegebene, auf die Formel (58) sich stützende seiner eigenthümlichen Natur wegen besonderes Interesse verdient**). Durch eine richtige Vermuthung geleitet, setzt Dirichlet für jene Funktion die Formel an:

*) S. Césaro's genannte Arbeit p. 291.

**) S. die erste der bei Nr. 3 genannten Abhandlungen.

$$\Phi(n) = \alpha n^2 + \xi \cdot n^\vartheta, \tag{59}$$

worin α eine Constante ist, deren Werth wir bald bestimmen werden, ξ aber eine von n abhängige unbekannte Funktion, ϑ wieder eine, kleiner als 2 gedachte Constante. Sei A der grösste unter den Werthen, welche ξ für $n = 1, 2, 3, \cdots N$ annimmt, und betrachten wir dann das Intervall der Werthe $n = N+1, N+2, \cdots 2N$. Aus der Formel (58) erhalten wir zunächst

$$\Phi(n) = -\sum_2^n \Phi\left[\frac{n}{k}\right] + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

und wenn wir nun unter dem Summenzeichen den angenommenen Ausdruck (59) der Funktion Φ einsetzen,

$$\Phi(n) = -\alpha \sum_2^n \left[\frac{n}{k}\right]^2 - \sum_2^n \xi \cdot \left[\frac{n}{k}\right]^\vartheta + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}. \tag{60}$$

Hier ist mit Rücksicht auf (43)

$$\sum_2^n \left[\frac{n}{k}\right]^2 = n^2 \cdot \sum_2^n \frac{1}{k^2} - 2n \cdot \sum_2^n \frac{\varrho}{k} + \sum_2^n \varrho^2,$$

die erste dieser Summen nach der Formel (1b) vorigen Abschnittes gleich

$$\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{n} - \cdots,$$

die zweite kleiner als

$$\sum_2^n \frac{1}{k} = E - 1 + \log n + \frac{1}{2n} \cdots,$$

die dritte kleiner als n, und somit, wenn η ein Werth kleiner als 1 ist,

$$\sum_2^n \left[\frac{n}{k}\right]^2 = \frac{\pi^2}{6} n^2 - n^2 - 2\eta n \log n + O(n).$$

Da andererseits in dem betrachteten Intervalle $\frac{n}{k}$ für $k = 2, 3, \cdots n$ nicht grösser als N ist, so ist

$$\sum_2^n \xi \cdot \left[\frac{n}{k}\right]^\vartheta < A \cdot \sum_2^n \left[\frac{n}{k}\right]^\vartheta < A n^\vartheta \cdot \sum_2^\infty \frac{1}{k^\vartheta}$$

und man erhält aus (59) und (60)

$$\alpha n^2 + \xi \cdot n^\delta$$

$$= n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha \pi^2}{6} + \alpha \right) + 2\alpha\eta n \log n - \eta' A n^\delta \cdot \sum_2^\infty \frac{1}{k^\delta} + O(n),$$

wo auch η' numerisch kleiner als 1 ist. Wählt man also $\alpha = \frac{3}{\pi^2}$, sodass

$$\Phi(n) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + \xi \cdot n^\delta,$$

so wird für alle n in dem betrachteten Intervalle

$$\xi = \frac{6}{\pi^2} \eta \cdot \frac{\log n}{n^{\delta-1}} - \eta' \cdot A \sum_2^\infty \frac{1}{k^\delta} - \frac{O(n)}{n^\delta}.$$

Versteht man nun unter γ denjenigen zwischen 1 und 2 liegenden Werth, für welchen

$$\sum_2^\infty \frac{1}{k^\gamma} = 1 \tag{61}$$

ist, und wählt dann $\delta > \gamma$, so ist

$$\sum_2^\infty \frac{1}{k^\delta} = q$$

eine endliche Constante < 1; da andererseits dann das erste und dritte Glied des obigen Ausdrucks von ξ zusammengenommen, wenn N gross genug gedacht wird, unter einer beliebig kleinen Grösse K bleibt, A aber seiner Bedeutung nach mit wachsendem N sicher nicht abnimmt, so darf man sagen: wird N gross genug gedacht, so bleibt für alle n von $N+1$ bis $2N$ die Grösse ξ numerisch unter $Aq + K$ d. i. kleiner als A, und folglich ist auch der grösste Werth A', den ξ für diese Werthe annimmt, kleiner als A, A bedeutet also den grössten Werth von ξ nicht nur für das Intervall von 1 bis N, sondern auch noch bis $2N$ hin. Dieselbe wiederholte Betrachtung lässt nun sogleich A auch als den Maximalwerth von ξ bis $4N$, $8N$, ... d. h. als Maximalwerth von ξ überhaupt erkennen.

Hieraus folgt aber für $\Phi(n)$ das asymptotische Gesetz

$$\Phi(n) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n^\delta). \tag{62}$$

Unmittelbarer ist der Weg, welchen Mertens zur Herleitung dieses Gesetzes eingeschlagen hat*). Aus (58) folgt nach Formel (20) des 11. Abschnittes

$$\Phi(n) = \sum_1^n \mu(k) \cdot \delta\left[\frac{n}{k}\right]$$

d. i.

$$\Phi(n) = \frac{1}{2} \sum_1^n \mu(k) \left(\left[\frac{n}{k}\right]^2 + \left[\frac{n}{k}\right]\right).$$

Hier ist

$$\sum_1^n \mu(k) \cdot \left[\frac{n}{k}\right]^2 = n^2 \cdot \sum_1^n \frac{\mu(k)}{k^2} - 2n \cdot \sum_1^n \frac{\varrho\,\mu(k)}{k} + \sum_1^n \mu(k)\varrho^2$$

$$\sum_1^n \mu(k) \cdot \left[\frac{n}{k}\right] = n \cdot \sum_1^n \frac{\mu(k)}{k} - \sum_1^n \varrho\,\mu(k),$$

also kann man schreiben

$$\Phi(n) = \frac{n^2}{2} \cdot \sum_1^\infty \frac{\mu(k)}{k^2} - \frac{n^2}{2} \cdot \sum_{k+1}^\infty \frac{\mu(k)}{k^2}$$

$$+ n \cdot \sum_1^n \left(\frac{1}{2} - \varrho\right) \frac{\mu(k)}{k} + \frac{1}{2} \sum_1^n \varrho(\varrho - 1)\mu(k).$$

Aber man findet

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{\mu(k)}{k^2} < \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k^2} < \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k(k-1)}$$

d. i. kleiner als

$$\sum_{n+1}^\infty \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n};$$

ferner

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{2} - \varrho\right) \frac{\mu(k)}{k} < \frac{1}{2} \sum_1^n \frac{1}{k} < \frac{1}{2}\left(\log n + E + \frac{1}{2n} \cdots\right),$$

und, da numerisch stets $\varrho(\varrho - 1) < \frac{1}{4}$ ist,

*) Mertens, über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, im Journal für die r. u. a. Math. Bd. 77 S. 289.

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\varrho(\varrho-1)\cdot\mu(k)<\frac{n}{8}.$$

Da endlich nach (38) des 11. Abschnittes

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}=\frac{1}{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}=\frac{6}{\pi^2}$$

ist, so folgt aus diesem Allen

$$\Phi(n)=\frac{3}{\pi^2}n^2+R,$$

wo

$$R<\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\left(\log n+E+\frac{5}{4}\right),$$

also

$$\Phi(n)=\frac{3}{\pi^2}n^2+O(n\log n). \tag{62a}$$

Diese asymptotische Formel ist noch genauer als diejenige von Dirichlet, da die Ordnung von $n\log n$ geringer ist als die Ordnung von n^δ.

Aus dem asymptotischen Ausdrucke für $\Phi(n)$ folgert man

$$\frac{\Phi(n+m)-\Phi(n)}{m}=\frac{6n}{\pi^2}\left(1+\frac{m}{2n}\right)+O\left(\frac{n\log n}{m}\right)$$

also, wenn nun m, n gleichzeitig wachsen in der Art, dass $\frac{m}{n}$ aber auch $\frac{\log n}{m}$ gegen Null convergiren, was z. B. geschehen wird, wenn $m=n^\alpha$ und $\alpha<1$ gesetzt wird, kommt

$$\lim_{n,m=\infty}\frac{\frac{\Phi(n+m)-\Phi(n)}{m}}{\frac{6n}{\pi^2}}=1$$

oder

$$M\varphi(n)=\frac{6n}{\pi^2}, \tag{63}$$

was in der Weise zu verstehen ist, dass das Verhältniss beider Seiten bei solchem Wachsen von n gegen die Einheit convergirt.

8. Hieran können wir zwei Bemerkungen knüpfen, welche Sylvester ausgesprochen hat*).

Suchen wir alle verschiedenen gewöhnlichen Brüche $\frac{x}{y}$, deren Zähler und Nenner nicht grösser sind als n; wir dürfen dabei x, y ohne gemeinsamen Theiler voraussetzen und erhalten sie also offenbar sämmtlich, wenn wir setzen

$y = n$, x gleich einer der $\varphi(n)$ rel. Primzahlen zu n, welche $< n$

$y = n - 1$, x gleich einer der $\varphi(n-1)$ rel. Primzahlen zu $n-1$, welche $< n-1$

. . . . . .

$y = 2$, x gleich einer der $\varphi(2)$ rel. Primzahlen zu 2, welche < 2

sind, ihre Anzahl ist demnach

$$\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n) \quad \text{d. i.} \quad \Phi(n) - 1 .$$

Der asymptotische Ausdruck dieser Anzahl ist nach dem Vorigen

$$\frac{3}{\pi^2} \cdot n^2 .$$

Suchen wir ferner die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Zahlen x, $y \leqq n$ relativ prim sind, so ist nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Anzahl der dieser Voraussetzung günstigen Fälle durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle zu theilen. Die letztere ist, da x sowohl als y jede der n Zahlen $1, 2, 3, \cdots n$ bedeuten darf, gleich n^2. Die Anzahl der günstigen Fälle ist nach dem eben Bemerkten, da jetzt x nicht kleiner als y zu sein braucht und die Combination $x = 1$, $y = 1$ noch hinzutritt, gleich

$$2\left(\Phi(n) - 1\right) + 1 = 2\,\Phi(n) - 1 .$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit W ist also

*) Sylvester C. R. 96 p. 409, sur le nombre de fractions ordinaires inégales qu'on peut exprimer en se servant de chiffres qui n'excèdent pas un nombre donné.

$$W = \frac{2\Phi(n) - 1}{n^2}$$

und ihr asymptotischer Werth ist gleich $\frac{6}{\pi^2}$.

Dieses Resultat ist, wie Sylvester angiebt, auf folgende Weise von Franklin bestätigt worden. Die Anzahl aller möglichen Fälle war n^2, darunter giebt es $\left[\frac{n}{p}\right]^2$ Fälle, in welchen x, y beide durch eine Primzahl $p \leqq n$ theilbar sind, also $n^2 - \left[\frac{n}{p}\right]^2$ Fälle, in denen sie es nicht beide sind, und die Wahrscheinlichkeit hierfür ist also $1 - \left[\frac{n}{p}\right]^2 \cdot \frac{1}{n^2}$. Sind nun 2, 3, 5, $\cdots q$ die sämmtlichen Primzahlen $\leqq n$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass x, y relativ prim sind, die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass sie durch keine jener Primzahlen beide theilbar sind, und nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung also

$$W = \prod_{p=2}^{q} \left(1 - \left[\frac{n}{p}\right]^2 \frac{1}{n^2}\right)$$

d. i. für unendlich wachsendes n

$$W = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

wofür auch

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{6}{\pi^2}$$

gesetzt werden darf.

9. Dirichlet behandelt in der oben erwähnten Arbeit noch eine weitere zahlentheoretische Funktion auf eine der vorher auseinandergesetzten ganz ähnliche Weise. Ist nämlich die ganze Zahl n, in ihre Primfaktoren zerlegt,

$$n = p^a p'^{a'} p''^{a''} \ldots \tag{64}$$

und ϖ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren, so kann, wie schon erwähnt, sie auf $P(n) = 2^{\varpi}$ verschiedene Weisen in zwei relative Primfaktoren zerlegt werden. Wir suchen den mittleren Werth dieser Funktion $P(n)$.

Dazu sei $\pi(n)$ ihre summatorische Funktion:

$$\pi(n) = \sum_{1}^{n} P(k). \tag{65}$$

Offenbar drückt diese Funktion $\pi(n)$ die Anzahl der Systeme relativ primer Zahlen ξ, η aus, welche der Ungleichheit genügen

$$\xi\eta < n,$$

und kann leicht auf die Funktion $\tau(n)$ zurückgeführt werden. Diese Funktion nämlich bezeichnet die Anzahl aller ganzzahligen Systeme x, y, für welche

$$xy < n$$

ist, die letzteren aber lassen sich in Gruppen vertheilen, indem man stets diejenigen x, y in eine Gruppe vereinigt, welche denselben grössten gemeinsamen Theiler k haben, und indem man unter k successive sämmtliche Zahlen $1, 2, 3, \ldots [\sqrt{n}]$ versteht, werden solcher Weise alle x, y so vertheilt, dass jedes System nur einer einzigen Gruppe angehören kann. Die der Gruppe k angehörigen seien

$$x = \xi k, \quad y = \eta k;$$

ξ, η werden dann relative Primzahlen sein, welche die Ungleichheit

$$\xi\eta < \left[\frac{n}{k^2}\right]$$

erfüllen, und da umgekehrt aus jedem System ξ, η solcher Zahlen wieder ein System x, y der Gruppe k hervorgeht, so ist die Anzahl der Systeme x, y dieser Gruppe gleich $\pi\left[\frac{n}{k^2}\right]$ und man gewinnt daraus die Gleichung

$$\tau(n) = \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \pi\left[\frac{n}{k^2}\right]. \tag{66}$$

Daraus aber folgt nach (40) die asymptotische Gleichung

$$\sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \pi\left[\frac{n}{k^2}\right] = n \log n + (2E - 1)\, n, \tag{67}$$

welche für die jetzige Aufgabe die Rolle der Formel (58) bei der früheren vertritt. Wird dieselbe nun ganz analog behandelt, wie jene, indem man für $\pi(n)$ den Ansatz macht

$$\pi(n) = \alpha n \log n + \beta n + \xi \cdot n^{\delta}$$

unter α, β, δ Constanten, unter ξ eine unbekannte Funktion von n verstanden, so ergeben sich für die erstern beiden die Werthe

$$\alpha = \frac{6}{\pi^2}, \quad \beta = \frac{6}{\pi^2}\left(2E - 1 + \frac{12F}{\pi^2}\right),$$

wo

$$F = \sum_{2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

die schon in Nr. 4 des vorigen Abschnittes angegebene Constante ist, und indem für δ ein Werth zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 genommen wird, findet sich, dass ξ stets unter einer festen Grenze verbleibt, mit anderen Worten, es findet sich für $\pi(n)$ folgendes asymptotische Gesetz:

$$(68) \quad \pi(n) = \frac{6n}{\pi^2}\left(\log n + 2E - 1 + \frac{12F}{\pi^2}\right) + O(n^{\delta}).$$

Statt näher auf dieses Dirichlet'sche Verfahren einzugehen, wollen wir es wieder durch ein direkteres ersetzen, welches Mertens*) angegeben hat. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass der Funktion $P(n)$ noch eine andere Bedeutung beigelegt werden kann. Die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei relative Primfaktoren stimmt ersichtlich mit der Anzahl der Zerlegungen von

$$pp'p'' \ldots$$

in zwei Faktoren überhaupt, d. h. mit der Anzahl aller Theiler dieses Produktes oder endlich auch mit der Anzahl aller derjenigen Theiler von n überein, welche durch kein Quadrat (ausser Eins) theilbar sind.

Betrachten wir andererseits die auf alle Divisoren d von k bezogene Summe

*) In der bei Nr. 7 angegebenen Abhandlung.

$$\sum \mu^2(d),$$

so besteht sie der Definition der Funktion μ gemäss genau aus soviel Einheiten, als k Theiler besitzt, die durch kein Quadrat aufgehen, und demnach wird

$$P(k) = \sum_{(d \text{ Theiler von } k)} \mu^2(d)$$

also

$$\pi(n) = \sum_{k,\,d} \mu^2(d) \qquad (69)$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ n).$$

Sei nun $d = q \cdot \Delta^2$, wo Δ^2 das grösste in d aufgehende Quadrat bezeichnet, so kann man schreiben

$$\mu^2(d) = \sum \mu(\delta),$$

wenn man hier über alle Theiler δ von Δ d. i. über alle Zahlen δ summirt, deren Quadrate in d aufgehen; in der That verschwindet diese Summe nach den Eigenschaften der Funktion μ, ausgenommen, wenn $\Delta = 1$ ist, wo sie den Werth 1 hat, und stimmt also durchaus mit $\mu^2(d)$ überein. Hiernach nimmt die vorhergehende Gleichung die Gestalt an

$$P(k) = \sum{}' \mu(\delta),$$

wenn diese Summation sich auf alle δ erstreckt, deren Quadrate in den einzelnen Theilern d von k aufgehen, d. h. auf alle δ, deren Quadrate in k aufgehen, jedes δ aber so oft genommen, als es durch δ^2 aufgehende Theiler von k oder Theiler von $\frac{k}{\delta^2}$ giebt, also $T\left(\frac{k}{\delta^2}\right)$ Mal. Man darf daher auch setzen:

$$P(k) = \sum_{\delta} \mu(\delta) \cdot T\left(\frac{k}{\delta^2}\right),$$

wo nun über alle Zahlen δ einfach zu summiren ist, deren Quadrate in k aufgehen. Und hieraus folgt

$$\pi(n) = \sum_{k,\,\delta} \mu(\delta) \cdot T\left(\frac{k}{\delta^2}\right),$$

wo k alle Zahlen $1, 2, 3, \cdots n$ und jedesmal δ^2 alle quadra-

tischen Theiler von k zu durchlaufen hat. Hierbei durchläuft nun offenbar δ alle Zahlen, welche $\leqq \sqrt{n}$ sind; fasst man aber eine dieser Zahlen δ ins Auge, so werden die ihr entsprechenden Zahlen k die Zahlen

$$1 \cdot \delta^2, \quad 2 \cdot \delta^2, \quad 3 \cdot \delta^2, \quad \cdots \left[\frac{n}{\delta^2}\right] \cdot \delta^2$$

und der ihr zugehörige Bestandtheil der Summe

$$\mu(\delta) \cdot \left[T(1) + T(2) + \cdots + T\left[\frac{n}{\delta^2}\right]\right) = \mu(\delta) \cdot \tau\left[\frac{n}{\delta^2}\right]$$

sein. Folglich erhält man endlich

$$\pi(n) = \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \mu(\delta) \cdot \tau\left[\frac{n}{\delta^2}\right] \text{*)}. \tag{69a}$$

Indem wir nun das asymptotische Gesetz für $\pi(n)$ suchen, dürfen wir nach (40) für $\tau\left[\frac{n}{\delta^2}\right]$ seinen asymptotischen Werth einsetzen und erhalten dann, wenn zur Abkürzung ν für $[\sqrt{n}]$ gesetzt wird,

$$\pi(n) = \sum_{1}^{\nu} \mu(\delta) \left[\left[\frac{n}{\delta^2}\right] \log\left[\frac{n}{\delta^2}\right] + (2E - 1) \cdot \left[\frac{n}{\delta^2}\right] + \frac{O(\sqrt{n})}{\delta}\right].$$

Wird hier $\left[\frac{n}{\delta^2}\right]$ durch $\frac{n}{\delta^2} - \varrho$ ersetzt, wo $\varrho < 1$, so lässt sich, wie ohne Schwierigkeit zu übersehen ist, mit Vernachlässigung von Grössen, welche die Ordnung $\sqrt{n} \log n$ nicht überschreiten, statt dieses Ausdrucks der folgende setzen:

*) Da man nach (55) der Gleichung (69) die Gestalt geben kann:

$$\pi(n) = \sum_{1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] \cdot \mu^2(k),$$

so entsteht durch Vergleichung mit dem Ausdrucke (69a) die Beziehung

$$\sum_{1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] \cdot \mu^2(k) = \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \mu(\delta) \cdot \tau\left[\frac{n}{\delta^2}\right].$$

Eine Verallgemeinerung derselben findet sich in Gegenbauer's Arithmetischen Theoremen II in den Denkschr. d. Wiener Academie Bd. 49 S. 10 Formel (32).

$$\pi(n) = \left(n \log n + (2E-1)\, n\right) \cdot \sum_{1}^{\nu} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} - 2n \cdot \sum_{1}^{\nu} \mu(\delta) \cdot \frac{\log \delta}{\delta^2}.$$

Nun ist

$$\sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} < \sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2}$$

d. i. nach der Formel (39b) des 3. Abschnittes kleiner als $\frac{1}{\nu}$; ferner ist

$$\sum_{\nu+1}^{\infty} \mu(\delta) \frac{\log \delta}{\delta^2} < \sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{\log \delta}{\delta(\delta-1)}$$

d. h. kleiner als die Summe

$$\sum_{\nu+1}^{\infty} \left(\frac{\log(\delta-1)}{\delta-1} - \frac{\log \delta}{\delta} \right) + \sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\delta-1}\right)}{\delta-1}$$

und folglich kleiner als

$$\frac{\log \nu}{\nu} + \sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{1}{(\delta-1)^2} < \frac{\log \nu}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}.$$

Hiernach findet sich

$$\left(n \log n + (2E-1)\, n\right) \sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} - 2n \sum_{\nu+1}^{\infty} \mu(\delta) \frac{\log \delta}{\delta^2}$$

höchstens von der Ordnung $\sqrt{n} \log n$ und deshalb darf man schliessen, dass bis auf Grössen von der Ordnung $\sqrt{n} \log n$ genau

$$\pi(n) = \left(n \log n + (2E-1)\, n\right) \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} - 2n \sum_{1}^{\infty} \mu(\delta) \frac{\log \delta}{\delta^2}$$

ist. Nun besteht aber die Gleichung

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^s} = \frac{1}{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\delta^s}},$$

woraus durch Differenzirung nach s

$$-\sum_1^\infty \frac{\mu(\delta)\log\delta}{\delta^s} = \frac{\sum_1^\infty \frac{\log\delta}{\delta^s}}{\left(\sum_1^\infty \frac{1}{\delta^s}\right)^2}$$

hervorgeht; für $s = 2$ kommt aus der ersteren Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

und aus der letztern

$$-\sum_1^\infty \frac{\mu(\delta)\log\delta}{\delta^2} = \frac{36}{\pi^4}\cdot\sum_1^\infty \frac{\log\delta}{\delta^2} = \frac{36F}{\pi^4},$$

und somit nimmt der vorige Ausdruck für $\pi(n)$ folgende Gestalt an:

$$(70)\quad \pi(n) = \frac{6n}{\pi^2}\left(\log n + 2E - 1 + \frac{12F}{\pi^2}\right) + O(\sqrt{n}\log n),$$

in welcher er mit dem Dirichlet'schen Ausdrucke (68) bis auf die genauere Bestimmung der Ordnung der vernachlässigten Glieder übereinstimmt.

Ohne Mühe findet man aus diesen für $\pi(n)$ erhaltenen Ausdrücken, sei es dem Dirichlet'schen, sei es dem von Mertens, als mittleren Werth der Funktion $P(n)$

$$(70a)\qquad MP(n) = \frac{6}{\pi^2}\left(\log n + 2E + \frac{12F}{\pi^2}\right).$$

10. Indem wir uns jetzt von den mehr elementaren Methoden, welche die Analysis eigentlich nur insofern zu Hilfe nehmen, als sie die Summenformel und einige andere Formeln von Euler benutzen, zu den eigentlich analytischen wenden, beginnen wir mit der weiteren Entwickelung derjenigen Methode, der wir bereits bei einer früheren Gelegenheit, bei der Bestimmung des mittleren Werthes für die Anzahl aller Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine quadratische Form begegnet sind. Wir erinnern uns, dass diese Methode auf einem geometrischen Hilfssatze beruhte, dem wir zuletzt Ausdruck gaben in der Formel (5) des 6. Abschnittes und den wir in folgendem Ausspruche zunächst wiederholen:

Ist F ein ebenes Flächenstück, das sich nirgends ins Unendliche erstreckt und durch ein Netz von Parallelen zu den Coordinatenaxen, welche den Abstand s von einander haben, in Quadrate zerlegt wird, und ist N die Anzahl der Netzpunkte, welche, die Begrenzung mitgerechnet, ins Innere von F fallen, so wird das über F erstreckte Doppelintegral

$$\iint dx\,dy = Ns^2 + \Theta \cdot As \tag{71}$$

sein, wenn A die grösste Ausdehnung des Flächenstücks in der Richtung einer der Axen und Θ eine endliche Grösse ist.

Dieser Satz ist aber der Verallgemeinerung fähig. Nimmt man nämlich statt des Flächenstücks F einen Raumtheil R, der vollständig begrenzt und nirgends ins Unendliche ausgedehnt ist, und ein System von äquidistanten Parallelebenen zu jeder der drei Coordinatenebenen mit dem gemeinsamen Abstande s an, durch welche also R in kubische Theile von der Grösse s^3 zerfällt wird, so wird eine Anzahl N von Schnittpunkten der Ebenen in das Innere oder auf die Begrenzung von R fallen. Eine ganz der früheren ähnliche Betrachtung lässt aber erkennen, dass man für das über den Raum R erstreckte dreifache Integral $\iiint dx\,dy\,dz$ die Bestimmung hat:

$$\iiint dx\,dy\,dz = N \cdot s^3 + \Theta \cdot Qs, \tag{72}$$

wo unter Q die grösste Querausdehnung des Raumes R senkrecht zu einer der Coordinatenaxen und unter Θ eine endlich bleibende Grösse zu verstehen ist.

Werden mehr als drei Veränderliche in Betracht gezogen, so hört zwar die räumliche Anschauung auf, offenbar aber werden die quantitativen Verhältnisse die analogen sein, und somit lässt sich der ursprüngliche Satz viel allgemeiner folgendermassen aussprechen:

Bedeutet G ein Gebiet der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, das für jede derselben endlich begrenzt ist, und N die Anzahl der Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ innerhalb G, welche, während $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ ganze Zahlen bedeuten, von der Form sind

$$x_1 = a_1 s + a_1, \quad x_2 = a_2 s + a_2, \quad \cdots \quad x_\nu = a_\nu s + a_\nu,$$

so gilt für das über das gesammte Gebiet G ausgedehnte vielfache Integral

$$\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_r \tag{73}$$

die Bestimmungsgleichung

$$\int dx_1\, dx_2 \cdots dx_r = N \cdot s^r + \Theta \cdot Qs\,, \tag{74}$$

wo Θ eine endliche Grösse, Q aber die grösste der Ausdehnungen von G bezeichnet, die man erhält, wenn eine der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_r$ constant gesetzt wird.

11. Nachdem dieser Hilfssatz aufgestellt worden ist, können wir nun an die folgende allgemeine Aufgabe gehen, welche Lipschitz sich gestellt und behandelt hat*).

Sei $f(x_1, x_2, \ldots x_r)$ eine ganze homogene Funktion g^{ter} Dimension der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_r$ mit ganzzahligen Coefficienten und m eine positive ganze Zahl, seien ferner $C_1, C_2, \ldots C_r$ ganze homogene Funktionen derselben Veränderlichen, wie f, und von solcher Beschaffenheit, dass für jedes gegebene m nur eine endliche Anzahl $\psi(m)$ von Systemen ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_r$ ohne gemeinsamen Theiler vorhanden ist, welche den Bedingungen genügen, dass gleichzeitig

$$f(x_1, x_2, \ldots x_r) = m \tag{75}$$

und

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \ldots C_r > 0 \tag{76}$$

sei: es soll das asymptotische Gesetz der Funktion $\psi(m)$ gefunden werden. Man sieht sogleich, wie die Anzahl aller (eigentlichen) Darstellungen einer Zahl m durch eine quadratische Form nur ein besonderer Fall der hier definirten Funktion $\psi(m)$ ist.

Offenbar bedeutet, wenn $x \geqq 1$ ist, die summatorische Funktion

$$\Psi(x) = \sum_1^{[x]} \psi(m)$$

*) Lipschitz, Monatsber. der Berl. Acad. 1865 S. 174: Ueber die asymptotischen Gesetze von gewissen Gattungen zahlentheoretischer Funktionen.

die Anzahl derjenigen Systeme ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_r$ ohne gemeinsamen Theiler, welche die Bedingungen (76) zugleich mit der folgenden erfüllen:

$$0 < f(x_1, x_2, \ldots x_r) < x. \tag{77}$$

Setzen wir $\Psi(x) = 0$, wenn $x < 1$ ist, so hat $\Psi(x)$ diese Bedeutung auch in dem letzteren Falle. — Nun bezeichne ferner $\Psi(x, k)$ die Anzahl aller möglichen Systeme ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_r$, welche die Bedingungen (76) und (77) erfüllen und zugleich Vielfache von k sind, d. h. offenbar, da jeder gemeinsame Theiler von $x_1, x_2, \ldots x_r$ aus den Ungleichheiten (76) sich heraushebt, die Anzahl aller derjenigen ganzzahligen Systeme, welche den Bedingungen

$$0 < f(x_1, x_2, \ldots x_r) < \frac{x}{k^\vartheta}$$

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \ \ldots \ C_r > 0$$

Genüge leisten; $\Psi(x, k)$ ist also Null, wenn $k > \left[x^{\frac{1}{\vartheta}}\right]$. Die letztern Systeme kann man aber nach den grössten gemeinsamen Theilern, welche sie haben, gruppiren; die Anzahl derjenigen von ihnen, welchen der grösste gemeinsame Theiler d zukommt, ist ersichtlich gleich der Anzahl aller Systeme $x_1, x_2, \ldots x_r$ ohne gemeinsamen Theiler, welche die Bedingungen

$$0 < f(x_1, x_2, \ldots x_r) < \frac{x}{(dk)^\vartheta}$$

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \ \ldots \ C_r > 0$$

erfüllen, und folglich gleich $\Psi\left(\frac{x}{(kd)^\vartheta}\right)$. Hieraus schliesst man unmittelbar die Beziehung:

$$\Psi(x, k) = \sum_d \Psi\left(\frac{x}{(dk)^\vartheta}\right),$$

in welcher die Summation zwar nur über alle

$$d = 1, 2, 3, \cdots \left[\frac{x^{\frac{1}{\vartheta}}}{k}\right]$$

erstreckt zu werden braucht, aber auch über alle d ausgedehnt werden darf, da $\Psi\left(\frac{x}{(dk)^\vartheta}\right)$ für die übrigen verschwindet, und

aus welcher mittels des Umkehrungsprincipes des 11. Abschnittes sogleich folgende Beziehung hervorgeht:

$$\Psi(x) = \sum_{k}^{} \mu(k) \cdot \Psi(x, k), \tag{78}$$

die Summation soweit ausgedehnt, bis sie abbricht, nämlich bis $k = \left[x^{\frac{1}{g}}\right]$.

12. Nun sei x gleich einer beliebig gegebenen positiven ganzen Zahl n, und

$$u_1, u_2, \ldots u_r$$

seien alle $\Psi(n, k)$ ganzzahligen Systeme, welche den Bedingungen

$$0 < f(u_1, u_2, \ldots u_r) \leqq \frac{n}{k^g}$$

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \ \ldots \ C_r > 0 \text{*)}$$

Genüge leisten. Setzt man dann

$$x_1 = s u_1, \quad x_2 = s u_2, \ \ldots \ x_r = s u_r \tag{79}$$

und

$$s = \frac{k}{n^{1/g}},$$

so erfüllen

$$x_1, \quad x_2, \ \ldots \ x_r$$

die Bedingungen

$$\begin{cases} 0 < f(x_1, x_2, \ldots x_r) \leqq 1 \\ C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \ \ldots \ C_r > 0. \end{cases} \tag{80}$$

Durch die letztern ist aber für die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_r$ ein gewisses Gebiet G abgegrenzt, von welchem wir annehmen wollen, dass es für jede derselben endlich ausgedehnt sei; die Gleichungen (79) bestimmen ein Schnittsystem, $\Psi(n, k)$ aber die Anzahl der Schnittpunkte $x_1, x_2, \ldots x_r$ desselben, welche innerhalb G vorhanden sind. Dem in Nr. 10 voraufgeschickten Hilfssatze gemäss wird daher das Integral

$$J = \int dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_r,$$

*) Die Grössen C_i sind hier und im Folgenden immer als die gegebenen homogenen Funktionen je derjenigen Grössen anzusehen, welche in f auftreten.

wenn es über das durch die Ungleichheiten (80) begrenzte Gebiet erstreckt wird, gleich

$$\Psi^{\nu}(n,k)\cdot\left(\frac{k}{n^{1/g}}\right)^{\nu}+\Theta Q\cdot\frac{k}{n^{1/g}}$$

und umgekehrt

$$\Psi^{\nu}(n,k)=J\cdot\left(\frac{n^{1/g}}{k}\right)^{\nu}-\Theta Q\cdot\left(\frac{n^{\frac{1}{g}}}{k}\right)^{\nu-1} \tag{81}$$

sein. Mit Beachtung von (78) folgert man hieraus

$$\Psi^{\nu}(n)=J\cdot\sum\mu(k)\cdot\left(\frac{n^{\frac{1}{g}}}{k}\right)^{\nu}-Q\cdot\sum\Theta\cdot\mu(k)\cdot\left(\frac{n^{\frac{1}{g}}}{k}\right)^{\nu-1}. \tag{82}$$

Die Summationen sind hier fortzusetzen bis $k=\left[n^{\frac{1}{g}}\right]$, was wir kürzer N schreiben wollen. Man kann aber setzen

$$\sum_{1}^{N}\frac{\mu(k)}{k^{\nu}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^{\nu}}-\sum_{N+1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^{\nu}};$$

die erste Summe zur Rechten ist gleich

$$\frac{1}{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^{\nu}}},$$

während die zweite kleiner ist als $\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}$ d. i. $<\frac{1}{N}<\frac{1}{\left[n^{1/g}\right]}$. Folglich wird

$$\sum\mu(k)\cdot\left(\frac{n^{1/g}}{k}\right)^{\nu}=\frac{n^{\nu/g}}{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^{\nu}}}+O\left(n^{\frac{\nu-1}{g}}\right).$$

Andererseits ist

$$\sum\Theta\cdot\mu(k)\cdot\left(\frac{n^{1/g}}{k}\right)^{\nu-1}<n^{\frac{\nu-1}{g}}\cdot\sum_{1}^{N}\frac{1}{k^{\nu-1}}\cdot\Theta_{0},$$

wo Θ_0 ein endlicher Werth, d. i., wenn $\nu>2$, kleiner als $n^{\frac{\nu-1}{g}}$ mal dem endlichen Werthe $\Theta_0\cdot\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^{\nu-1}}$. Im Falle $\nu>2$ erhält man also das Resultat:

$$\Psi^{\nu}(n)=\frac{J\cdot n^{\nu/g}}{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^{\nu}}}+O\left(n^{\frac{\nu-1}{g}}\right). \tag{83a}$$

Ist aber $\nu = 2$ also

$$\sum_1^N \frac{1}{k^{\nu-1}} = \log N + E + \frac{1}{2N} \cdots,$$

so ist

$$n^{\frac{\nu-1}{g}} \sum_1^N \frac{1}{k^{\nu-1}}$$

von der Ordnung $n^{\frac{1}{g}} \log n$ und demnach erhält man im Falle $\nu = 2$

$$\Psi(n) = \frac{J \cdot n^{2/g}}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}} + O(n^{1/g} \log n). \tag{83b}$$

Aus dem asymptotischen Werthe der Funktion $\Psi(n)$ findet man nach bekannter Weise den mittleren Werth der Funktion $\psi(n)$. Sei zuerst $\nu > 2$. Da, wenn bei gleichzeitigem Wachsen von n, m das Verhältniss $\frac{m}{n}$ gegen 0 convergirt,

$$\frac{(n+m)^{\frac{\nu}{g}} - n^{\frac{\nu}{g}}}{m n^{\nu/g-1}}$$

$\frac{\nu}{g}$ zur Grenze hat,

$$\frac{(n+m)^{\frac{\nu-1}{g}} - n^{\frac{\nu-1}{g}}}{m n^{\nu/g-1}}$$

aber gleich

$$\frac{n^{1-1/g}}{m}\left(\frac{\nu-1}{g} \cdot \frac{m}{n} + \cdots\right)$$

geschrieben werden kann, so wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{\frac{\Psi(n+m) - \Psi(n)}{m}}{n^{\nu/g-1}} = \frac{J}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^\nu}} \cdot \frac{\nu}{g}$$

sein, wenn $m = n^\delta$ gesetzt wird, während δ zwischen 1 und $1 - \frac{1}{g}$ liegt. Man findet also, wenn $\nu > 2$ ist,

$$(84) \qquad M\psi(n) = \frac{J}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^\nu}} \cdot \frac{\nu}{g}\, n^{\nu/g-1}$$

in dem Sinne, dass das Verhältniss beider Seiten mit unendlich wachsendem n gegen die Einheit convergirt.

Ist zweitens aber $\nu = 2$, so lässt sich

$$\frac{(n+m)^{1/g}\log(n+m) - n^{1/g}\log n}{m\, n^{2/g-1}}$$

gleich

$$\frac{n^{1-1/g}\log n}{m}\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{g} + \cdots\right)$$

schreiben und man erhält folglich bei gleicher Wahl von m

$$(85) \qquad M\psi(n) = \frac{J}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}} \cdot \frac{2}{g}\, n^{2/g-1}$$

das ist: die Formel (84) gilt auch noch für $\nu = 2$.

Die $\psi(m)$ Werthsysteme, welche den Bedingungen (75) und (76) genügen, sind Zahlen ohne gemeinsamen Theiler. Ist nun q irgend eine Primzahl, so lassen diese Systeme ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_\nu \pmod q$ genau $q^\nu - 1$ verschiedene Restcombinationen zu, nämlich die sämmtlichen überhaupt möglichen q^ν Restcombinationen mit Ausnahme der einzigen, für welche sie sämmtlich $\equiv 0 \pmod q$ sind. Die $\psi(m)$ Werthsysteme lassen sich dann nach den Restcombinationen der Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ in Gruppen vertheilen; $\chi(m)$ heisse die Anzahl der Werthsysteme in einer dieser Gruppen. Durch eine geeignete Modifikation des obigen Verfahrens lässt sich der mittlere Werth auch von $\chi(m)$ bestimmen und insbesondere einsehen, dass er nur von dem Integrale J, nicht aber von der besonderen Restcombination abhängt, welche man betrachtet; er ist mithin für alle diese Funktionen $\chi(m)$ der gleiche und folglich, da ihre Summe gleich $\psi(m)$ ist, gleich dem $(q^\nu - 1)^{\text{ten}}$ Theile desjenigen von $\psi(m)$. Hieraus ersteht die Formel:

Für jede ganze Zahl $\nu > 2$ ist

$$M\chi(m) = \frac{J}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^\nu}} \cdot \frac{1}{q^\nu - 1} n^{\nu-1}. \tag{86}$$

13. Zur Anwendung dieser Formeln betrachten wir zuerst die Anzahl aller eigentlichen Darstellungen einer positiven ganzen Zahl m durch eine positive quadratische Form

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{\nu\nu}x_\nu^2$$

von ν Veränderlichen und von der Determinante

$$\sum \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{\nu\nu} = \Delta,$$

oder die Anzahl $\psi(m)$ aller ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ ohne gemeinsamen Theiler, für welche

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{\nu\nu}x_\nu^2 = m$$

ist. Da hier keine Ungleichheiten von der Art (76) vorhanden sind, bestimmt sich das Gebiet der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, welches wir G genannt haben, durch die doppelte Ungleichheit

$$0 < a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{\nu\nu}x_\nu^2 \leqq 1. \tag{87}$$

Weil aber die Form als eine positive vorausgesetzt ist, kann man bekanntlich eine Substitution

$$x_i = \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + \cdots + \alpha_{i\nu}X_\nu \quad (\text{für } i = 1, 2, 3, \ldots \nu) \tag{88}$$

mit dem Substitutionsmodulus 1 anwenden, durch welche sie in die Gestalt

$$A_1X_1^2 + A_2X_2^2 + \cdots + A_\nu X_\nu^2$$

mit lauter positiven, wenn auch nicht ganzzahligen Coefficienten A_i übergeht, während

$$A_1A_2 \ldots A_\nu = \Delta$$

ist. Das Gebiet G kann dann auch als das durch die Ungleichheiten

$$0 < A_1X_1^2 + A_2X_2^2 + \cdots + A_\nu X_\nu^2 \leqq 1 \tag{89}$$

definirte Gebiet der Veränderlichen $X_1, X_2, \ldots X_\nu$ angesehen werden, und es ist einleuchtend, dass es in Bezug auf jede dieser Veränderlichen und folglich auch wegen (88) in Bezug auf jede der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ ein endlich begrenztes ist. Die Voraussetzung unserer vorigen Formeln ist also erfüllt und demgemäss

$$M\psi(n) = \frac{J}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^\nu}} \cdot \frac{\nu}{2} n^{\nu/2 - 1},$$

wenn J das über das Gebiet G erstreckte ν-fache Integral

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_\nu = \int dX_1 \, dX_2 \ldots dX_\nu$$

bedeutet. Bei der Ermittlung seines Werthes müssen wir unterscheiden, ob ν gerade oder ungerade ist.

Sei erstens ν gerade gleich $2h$. Dann setze man

$$X_1\sqrt{A_1} = r_1 \cos\varphi_1, \quad X_2\sqrt{A_2} = r_1 \sin\varphi_1$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$X_{\nu-1}\sqrt{A_{\nu-1}} = r_h \cos\varphi_h, \quad X_\nu\sqrt{A_\nu} = r_h \sin\varphi_h,$$

wodurch die Bedingung (89) sich in die folgende verwandelt:

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_h^2 < 1 \tag{90}$$

und von den Veränderlichen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h$ unabhängig wird. Daher erhält man

$$J = \int \frac{r_1 dr_1 d\varphi_1 \cdot r_2 dr_2 d\varphi_2 \cdots r_h dr_h d\varphi_h}{\sqrt{A_1 A_2 \cdots A_\nu}}$$

$$= \frac{(2\pi)^h}{\sqrt{\Delta}} \cdot \int r_1 dr_1 \cdot r_2 dr_2 \ldots r_h dr_h$$

mit der Bedingung (90). Die successiven Integrationen nach $r_1, r_2, \ldots r_h$ ergeben dann ohne Mühe die Formel

$$J = \frac{(2\pi)^h}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2h}. \tag{91}$$

Ist zweitens ν ungerade gleich $2h+1$, so führen die Substitutionen

$$X_1\sqrt{A_1} = r_1\cos\varphi_1, \quad X_2\sqrt{A_2} = r_1\sin\varphi_1$$

. . . . . .

$$X_{\nu-2}\sqrt{A_{\nu-2}} = r_h\cos\varphi_h, \quad X_{\nu-1}\sqrt{A_{\nu-1}} = r_h\sin\varphi_h$$

$$X_\nu\sqrt{A_\nu} = \varrho$$

das Integral zunächst über in das folgende

$$J = \int \frac{r_1\,dr_1\,d\varphi_1 \cdots r_h\,dr_h\,d\varphi_h \cdot d\varrho}{\sqrt{A_1 A_2 \cdots A_\nu}}$$

$$= \frac{(2\pi)^h}{\sqrt{\Delta}} \int r_1 dr_1 \ldots r_h\,dr_h\,d\varrho$$

mit der Bedingung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_h^2 + \varrho^2 < 1, \tag{90a}$$

und nun führen die successiven Integrationen nach $r_1, r_2, \ldots r_h$ zu dem einfachen Ausdrucke

$$\frac{(2\pi)^h}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2h} \int_{-1}^{+1} d\varrho\,(1-\varrho^2)^h,$$

d. i. zur Formel

$$J = \frac{(2\pi)^h}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2h+1)}. \tag{91a}$$

Beide Fälle ziehen sich zusammen in die allgemeingiltige Formel

$$J = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{2^{\left[\frac{\nu+1}{2}\right]} \cdot \pi^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}}{\nu\,(\nu-2)\,(\nu-4)\cdots\left(\nu-2\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)}, \tag{92}$$

und mit ihrer Hilfe findet man nach (84) resp. (85), wenn darin $g = 2$ gesetzt wird, das Resultat:

$$M\psi(n) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{2^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \cdot \pi^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}}{(\nu-2)(\nu-4)\cdots\left(\nu-2\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)} \cdot \frac{1}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^\nu}} \cdot n^{\frac{\nu}{2}-1}. \tag{93}$$

Setzen wir in (81) $g = 2$ und $k = 1$, und dividiren dann durch n, so giebt die entstehende Formel

$$\frac{\Psi(n,1)}{n} = J \cdot n^{\frac{\nu}{2}-1} + O\left(n^{\frac{\nu}{2}-\frac{3}{2}}\right)$$

im vorliegenden Falle den Mittelwerth $\mathfrak{M} f(n)$ für die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl n durch die quadratische Form; sein asymptotischer Ausdruck ist

$$\mathfrak{M} f(n) = J \cdot n^{\frac{\nu}{2} - 1}.$$

So ergiebt sich für $\nu = 2$

$$\mathfrak{M} f(n) = \frac{\pi}{\sqrt{J}}$$

in Uebereinstimmung mit dem, was im 6. Abschnitte gezeigt worden ist;

für $\nu = 3$ $\quad \mathfrak{M} f(n) = \frac{4\pi}{3\sqrt{J}} \cdot \sqrt{n}$

$\nu = 4$ $\quad \mathfrak{M} f(n) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{J}} \cdot n$

$\nu = 5$ $\quad \mathfrak{M} f(n) = \frac{8\pi^2}{15\sqrt{J}} \cdot n^{3/2}$

$\nu = 8$ $\quad \mathfrak{M} f(n) = \frac{\pi^4}{24\sqrt{J}} \cdot n^3$

u. s. w. —

14. Wir knüpfen hieran die Aufgabe, den asymptotischen Werth für die Anzahl N der positiven ganzzahligen Systeme x, y zu finden, für welche, wenn A, B, α, β gegebene positive Zahlen sind,

$$Ax^\alpha + By^\beta < n$$

ist. Setzt man

$$b = \left[\left(\frac{n}{B}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right],$$

so darf offenbar y alle ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots b$ erhalten und jedem solchen Werthe von y entsprechen

$$\psi(y) = \left[\left(\frac{n - By^\beta}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

zulässige Werthe von x. Demnach wird

$$N = \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(b)$$

sein. Der Definition von $\psi(y)$ gemäss kann man setzen

$$\psi(y) = \left(\frac{n - By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha} - \chi(y)$$

wo $\chi(y)$ stets zwischen 0 und 1 enthalten ist. Da ferner die Funktion

$$\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}$$

mit wachsendem y abnimmt, hat man die Ungleichheiten

$$\int_y^{y+1}\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}dy<\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}<\int_{y-1}^{y}\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}dy,$$

aus denen entsprechende für $\psi(y)$ und mit ihrer Hilfe die folgenden hervorgehen:

$$\int_1^b\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}dy-\sum_1^{b-1}\chi(y)<\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(b-1)$$

$$\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(b)<\int_0^b\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}dy-\sum_1^b\chi(y).$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}=b+\varrho,$$

wo $\varrho<1$ ist, und

$$\int_b^{b+\varrho}\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}dy<\left(\frac{n-Bb^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}\cdot\varrho$$

also umsomehr kleiner als $\left(\frac{n-Bb^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}$; in Folge davon lässt sich die erste Ungleichheit durch folgende ersetzen, welche in verstärktem Grade besteht:

$$\int_1^{\left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}}\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}dy-\sum_1^b\chi(y)<N$$

und weiter durch die andere:

$$\int_0^{\left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}}\left(\frac{n-By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha}dy<N+\left(\frac{n}{A}\right)^{1/\alpha}+\left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}$$

ersetzt werden darf; aus der zweiten aber folgt ebenfalls a fortiori

$$N < \int_0^{\left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}} \left(\frac{n - By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha} dy,$$

sodass endlich

$$\int_0^{\left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}} \left(\frac{n - By^\beta}{A}\right)^{1/\alpha} dy = N + \theta \cdot \left(\left(\frac{n}{A}\right)^{1/\alpha} + \left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}\right)$$

gesetzt werden kann, wenn unter θ ein positiver echter Bruch verstanden wird. Durch eine einfache Vertauschung der Integrationsvariabeln gewinnt man hieraus die Gleichung

$$N = \left(\frac{n}{A}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta} \cdot \int_0^1 \sqrt[\alpha]{1 - z^\beta} \cdot dz$$
$$- \theta \cdot \left(\left(\frac{n}{A}\right)^{1/\alpha} + \left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}\right),$$

der man auch mittels der Γ-Funktionen schliesslich folgenden Ausdruck geben kann:

$$(94)\quad N = \frac{n^{1/\alpha + 1/\beta}}{A^{1/\alpha} B^{1/\beta}} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\Gamma(1/\alpha)\,\Gamma(1/\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)} - \theta \cdot \left(\left(\frac{n}{A}\right)^{1/\alpha} + \left(\frac{n}{B}\right)^{1/\beta}\right).$$ *)

Sind α, β einander gleiche, A, B ganze Zahlen, so fällt diese Aufgabe ersichtlich unter die allgemeine Aufgabe von Lipschitz, indem N sich nach der Formel für $\Psi(n, 1)$ berechnen lässt. Setzt man z. B. $\alpha = \beta = 2$ und $AB = \Delta$, so liefert die Formel (94) für N den bis auf die Ordnung $\sqrt{n}$ genauen Ausdruck

$$N = n \cdot \frac{\pi}{4\sqrt{\Delta}},$$

was, wie leicht zu erkennen, mit dem im 6. Abschnitte erhaltenen Resultate übereinstimmt, da wir hier uns auf positive Werthe x, y beschränkt haben, jeder Auflösung in positiven Werthen x, y aber noch drei andere: $x, -y$; $-x, y$; $-x, -y$ zugehören.

*) Vgl. Césaro's bereits erwähnte Arbeit p. 193.

Setzt man $\alpha = \beta = 3$, so liefert die Formel (94) für N folgenden bis auf Grössen der Ordnung $\sqrt[3]{n}$ genauen Werth

$$N = \frac{n^{2/3}}{(AB)^{1/3}} \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot \Gamma(1/3)^3 \cdot \sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{n^{2/3}}{(AB)^{1/3}} \cdot \frac{\Gamma(1/3)^3}{4\pi\sqrt{3}} .$$

15. Wir wenden nun zunächst die Methode von Lipschitz an, um nochmals den mittleren Werth für die Funktion $\pi(n)$ zu ermitteln. Diese Funktion bezeichnete in der That die Menge aller positiven ganzzahligen x_1, x_2 ohne gemeinsamen Theiler, welche der Ungleichheit

$$x_1 x_2 \leqq n$$

Genüge leisten; bestimmt man weiter, dass $x_1 < x_2$ sein soll, so reducirt man die Anzahl aller Systeme offenbar auf die Hälfte (es macht nichts aus, wenn man hier von dem einen Werthsysteme $x_1 = x_2 = 1$ absieht) und somit wäre

$$\Psi(n) = \frac{1}{2}\pi(n)$$

die Anzahl aller ganzzahligen x_1, x_2 ohne gemeinsamen Theiler, welche den Ungleichheiten genügen

$$0 < x_1 x_2 \leqq n$$
$$0 < x_1 < x_2 .$$

Folglich bezeichnet $\Psi(n, k)$ die Anzahl sämmtlicher ganzzahligen Systeme u_1, u_2, welche die Ungleichheiten erfüllen

$$0 < u_1 u_2 \leqq \frac{n}{k^2}$$
$$0 < u_1 < u_2 .$$

Aus letztern folgt sofort $u_1 < \sqrt{\frac{n}{k^2}}$ und, da u_1 eine von Null verschiedene ganze Zahl sein soll, $u_2 \leqq \frac{n}{k^2}$, $\Psi(n, k)$ ist also eine endliche Anzahl und wird Null, sobald $k > [\sqrt{n}]$. Setzt man nun aber

$$\xi_1 = s u_1 , \qquad \xi_2 = s u_2 ,$$

wo $s = \frac{k}{\sqrt{n}}$ sein soll, so wird das Gebiet G der stetig Veränderlichen ξ_1, ξ_2 durch die Ungleichheiten

$$0 < \xi_1 \xi_2 < 1$$
$$0 < \xi_1 < \xi_2$$

bestimmt und offenbar in Bezug auf ξ_2 unbegrenzt sein; die Voraussetzung der Nr. 12 findet sich also nicht erfüllt. Man bemerke aber, dass aus den Ungleichheiten für die Grössen u_1, u_2 sich

$$u_1^2 \cdot u_2 \leqq \frac{n}{k^2} u_1,$$

also, da u_1 ganzzahlig ist, umsomehr

$$u_2 \leqq \frac{n}{k^2} u_1$$

sich ergiebt; fügt man diese Ungleichheit den früheren hinzu, so verändert sich die Anzahl der denselben genügenden ganzzahligen Werthsysteme offenbar nicht, das neue Gebiet G' der Veränderlichen ξ_1, ξ_2 aber wird nun durch die früheren Ungleichheiten in Verbindung mit der folgenden

$$\xi_2 \leqq \frac{n}{k^2} \xi_1$$

bestimmt und ist dadurch auch für die Veränderliche ξ_2 ein endlich begrenztes. Heisst folglich J das auf G' erstreckte Doppelintegral $\int d\xi_1 d\xi_2$, so findet sich nach Lipschitz' Formeln:

$$\Psi(n, k) = J \cdot \frac{n}{k^2} - \Theta \cdot A \frac{\sqrt{n}}{k}.$$

Man bemerke nun, dass die für ξ_2 vorgeschriebenen Bedingungen

$$\xi_2 \leqq \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_2 \leqq \frac{n}{k^2} \xi_1$$

für den Werth $\xi_1 = \sqrt{\frac{k^2}{n}}$ übereinstimmen, dass für Werthe $\xi_1 < \sqrt{\frac{k^2}{n}}$ die erste dieser Ungleichheiten eine Folge der zweiten, für $\xi_1 > \sqrt{\frac{k^2}{n}}$ umgekehrt diese eine Folge der ersten ist. Demnach liegt für die erstgenannten Werthe von ξ_1 die Variable ξ_2

zwischen ξ_1 und $\frac{n}{k^2}\xi_1$, für die zweitgenannten Werthe von ξ_1 zwischen ξ_1 und $\frac{1}{\xi_1}$, in beiden Fällen wird demnach ξ_2 kleiner sein als $\sqrt{\frac{n}{k^2}}$. Die Ausführung der Doppelintegration liefert hiernach

$$J = \int_0^{\sqrt{\frac{k^2}{n}}} \left(\frac{n}{k^2}\xi_1 - \xi_1\right) d\xi_1 + \int_{\sqrt{\frac{k^2}{n}}}^{1} \left(\frac{1}{\xi_1} - \xi_1\right) d\xi_1$$

d. i. vereinfacht

$$J = \frac{1}{2} \log \frac{n}{k^2}.$$

Andererseits wird A nicht grösser als $\sqrt{\frac{n}{k^2}}$, da ξ_1 nicht über 1, ξ_2 nicht über $\sqrt{\frac{n}{k^2}}$ hinaus wächst, und somit findet sich

$$\Psi(n,k) = \frac{1}{2}\frac{n}{k^2} \log \frac{n}{k^2} - \Theta \cdot \frac{n}{k^2}.$$

Folglich wird nach (78)

$$\Psi(n) = \frac{1}{2} n \log n \sum_1^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(k)}{k^2} - n \sum_1^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(k) \log k}{k^2} - n \cdot \sum_1^{[\sqrt{n}]} \frac{\Theta \cdot \mu(k)}{k^2}.$$

Durch Multiplikation mit 2 erhält man $\pi(n)$, und wenn man schreibt, wie folgt:

$$\begin{aligned}\pi(n) = {} & n \log n \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} - 2n \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\mu(k) \log k}{k^2} \\ & - n \log n \cdot \sum_{[\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} + 2n \cdot \sum_{[\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{\mu(k) \log k}{k^2} \\ & - 2n \cdot \sum_1^{[\sqrt{n}]} \frac{\Theta \cdot \mu(k)}{k^2},\end{aligned}$$

und man erinnert sich der Bemerkungen in Nr. 9 und bedenkt endlich, dass, wenn Θ_0 einen endlichen Werth bedeutet,

$$\sum_1^{[\sqrt{n}]} \frac{\Theta \cdot \mu(k)}{k^2} < \Theta_0 \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{d. i.} \quad \frac{\pi^2}{6}\Theta_0$$

ist, so ergiebt sich, bis auf Grössen, welche die Ordnung n nicht erreichen, genau

$$\pi(n) = \frac{6n}{\pi^2} \log n + \frac{72E}{\pi^4} n + 2\delta \cdot \frac{\pi^2}{3} n,$$

wo δ ein endlicher Werth ist, dessen genauere Bestimmung bei der hier angewandten Methode nicht gelingt; den früheren zufolge haben wir ihn gleich $(2E - 1)\frac{9}{\pi^4}$ zu setzen.

16. Lipschitz hat in seiner Arbeit die Formeln, die wir hergeleitet haben, auch angewendet auf die Anzahl binärer eigentlich primitiver quadratischer Formen von positiver Determinante, welche reducirt sind. Indem wir auf diesen Punkt seiner Arbeit hier nur verweisen, begnügen wir uns mit seiner anderen Anwendung, welche dasselbe für Formen einer negativen Determinante leistet, wo es mit der Bestimmung der mittleren Anzahl der Classen von Formen gleichbedeutend ist.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Anzahl aller ganzzahligen Systeme x_1, x_2, x_3 ohne gemeinsamen Theiler, welche folgenden Ungleichheiten genügen:

$$\text{(95)} \qquad \begin{cases} 0 < x_1 x_3 - x_2^2 < n \\ 0 < x_1 < x_3 \\ -\frac{x_1}{2} < x_2 < +\frac{x_1}{2}; \end{cases}$$

wir nennen $\Psi(n, k)$ die Anzahl sämmtlicher diese Ungleichheiten erfüllenden ganzzahligen x_1, x_2, x_3, welche zugleich Vielfache von k sind d. i. die Anzahl aller ganzzahligen Systeme u_1, u_2, u_3, welche diesen Ungleichheiten genügen:

$$\text{(95a)} \qquad \begin{cases} 0 < u_1 u_3 - u_2^2 < \frac{n}{k^2} \\ 0 < u_1 < u_3 \\ -\frac{u_1}{2} < u_2 < +\frac{u_1}{2}. \end{cases}$$

Diese Anzahl ist endlich; denn aus den vorstehenden Ungleichheiten folgt

$$u_1^2 < u_1 u_3 < \frac{n}{k^2} + u_2^2 < \frac{n}{k^2} + \frac{u_1^2}{4}$$

also $u_1 < \sqrt{\frac{4n}{3k^2}}$; daher ferner u_2 numerisch kleiner als $\sqrt{\frac{n}{3k^2}}$ und endlich

$$u_1 u_3 < \frac{n}{k^2} + u_2^2 < \frac{4n}{3k^2}$$

umsomehr also auch, da u_1 eine ganze von Null verschiedene Zahl bedeutet, $u_3 < \frac{4n}{3k^2}$, sodass u_1, u_2, u_3 nur eine beschränkte Anzahl ganzzahliger Werthe annehmen können. Die erste der Ungleichheiten (95a) zeigt zudem, dass $\Psi(n, k) = 0$ ist, sobald $k > \sqrt{n}$.

Wird nun $s = \frac{k}{\sqrt{n}}$ und

$$\xi_1 = s u_1, \quad \xi_2 = s u_2, \quad \xi_3 = s u_3$$

gesetzt, so sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch die Ungleichheiten

$$\begin{cases} 0 < \xi_1 \xi_3 - \xi_2^2 \leqq 1 \\ 0 < \xi_1 < \xi_3 \\ -\frac{\xi_1}{2} < \xi_2 < +\frac{\xi_1}{2} \end{cases} \tag{96}$$

bestimmt; das Gebiet G dieser Veränderlichen erfüllt aber nicht die Voraussetzung der Nr. 12, für alle Veränderlichen ein endlich ausgedehntes zu sein, da es sich offenbar für die Veränderliche ξ_3 ins Unendliche ausdehnt. Wir hatten aber für die ganzen Zahlen u_1, u_2, u_3 die Beschränkung gefunden

$$u_1 u_3 < \frac{4n}{3k^2},$$

aus welcher $u_1^2 \cdot u_3 < \frac{4n}{3k^2} u_1$ und folglich, wenn $u_1 > 1$ also mindestens 2 ist, auch

$$u_3 < \frac{n}{k^2} u_1 \tag{95b}$$

hervorgeht, eine Ungleichheit, welche auch für den Fall $u_1 = 1$ bestehen bleibt, in welchem nach den Ungleichheiten (95a) sich $u_2 = 0$ also $u_3 \leqq \frac{n}{k^2}$ ergiebt. Da diese Ungleichheit (95b) aus (95a) folgt, so wird die Anzahl $\Psi(n, k)$ der den letzteren genügenden ganzzahligen u_1, u_2, u_3 nicht verändert, wenn wir den Ungleichheiten (95a) die neue (95b) hinzufügen. Den

Veränderlichen ξ_1, ξ_2, ξ_3 entspricht dann aber nicht mehr das Gebiet G, sondern dasjenige Gebiet G', welches durch die Ungleichheiten (96) in Verbindung mit der neuen Ungleichheit

$$\xi_3 \leqq \frac{n}{k^2}\,\xi_1 \tag{96a}$$

bestimmt und nun für jede der Veränderlichen ξ_1, ξ_2, ξ_3 nur ein endlich ausgedehntes ist. Nunmehr also dürfen wir den Hilfssatz zur Anwendung bringen und erhalten, wenn wir

$$J' = \int d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

das über das Gebiet G' erstreckte dreifache Integral nennen,

$$J' = \Psi(n,k)\cdot\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^3 + \Theta\cdot Q\cdot\frac{k}{\sqrt{n}}\cdot \tag{97}$$

Zur Berechnung von J' führen wir durch die Substitution

$$\xi_1 = r\sin\varphi\cos\psi,\quad \xi_3 = r\sin\varphi\sin\psi,\quad \xi_2 = r\cos\varphi,$$

in welcher $r>0$, φ zwischen 0 und π, ψ zwischen 0 und 2π gewählt werden darf, drei neue Veränderliche r, φ, ψ ein, für welche die Ungleichheiten (96) und (96a) die Gestalt

$$\begin{cases} 0 < r^2(\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi - \cos^2\varphi) \leqq 1 \\ 0 < \cos\psi < \sin\psi \\ \sin\psi < \frac{n}{k^2}\cos\psi \\ -\frac{\cos\psi}{2} < \operatorname{cotg}\varphi < \frac{\cos\psi}{2}, \end{cases} \tag{98}$$

das Integral J' aber die folgende Gestalt annimmt:

$$J' = \int r^2\, dr\, d\psi\sin\varphi\, d\varphi.$$

Wird zuerst nach r zwischen den Grenzen

$$0 \quad\text{und}\quad \frac{1}{(\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi - \cos^2\varphi)^{1/2}}$$

integrirt, so kommt

$$J' = \frac{1}{3}\int d\psi\, d\varphi\cdot\frac{\sin\varphi}{(\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi - \cos^2\varphi)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{d\psi}{(\sin\psi\cos\psi)^{3/2}}\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{(1-\lambda^2\cos^2\varphi)^{3/2}},$$

wenn zur Abkürzung

$$\lambda^2 = \frac{1 + \sin\psi\,\cos\psi}{\sin\psi\,\cos\psi}$$

gesetzt wird. Für die Integration nach φ gelten die durch die vierte der Ungleichheiten (98) bestimmten Grenzen, bei deren Berücksichtigung man ohne Mühe findet:

$$J' = -\frac{1}{3}\int \frac{d\psi}{\sin\psi\sqrt{\sin\psi\,\cos\psi}\,\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}\psi}}$$

d. i., wenn man $\operatorname{cotg}\psi$ als Variable einführt und in Bezug auf sie zwischen den Grenzen $\frac{k^2}{n}$ und 1 integrirt,

$$J' = -\frac{2}{3}\left(\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\left(1-\frac{k^2}{2n}\right)\right)$$

oder einfacher

$$J' = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{k}{2\sqrt{n}}\right). \tag{99}$$

Der Raum G' dehnt sich am weitesten in der Richtung der Axe ξ_3, am wenigsten weit in der Richtung der Axe ξ_2 und ist symmetrisch zur Ebene $\xi_2 = 0$; und unter Q darf hier der Querschnitt verstanden werden, welcher letzterer entspricht und dessen Inhalt durch das Integral

$$Q = \int d\xi_1\, d\xi_3$$

mit dem durch die Ungleichheiten

$$0 < \xi_1\xi_3 < 1$$
$$0 < \xi_1 < \xi_3 < \frac{n}{k^2}\xi_1$$

bestimmten Umfange gemessen wird. Man findet hieraus (s. vorige Nr.)

$$Q = \log\frac{\sqrt{n}}{k}. \tag{100}$$

Und mit diesen Resultaten ergiebt sich aus (97)

$$\Psi(n,k) = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{k}{2\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)^3 - \Theta\cdot\frac{n}{k^2}\log\frac{\sqrt{n}}{k}$$

d. i. bis auf Grössen, deren Ordnung diejenige von $n\log n$ nicht erreicht,

$$\Psi(n,k) = \frac{2\pi}{9}\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)^3 - \Theta\cdot\frac{n}{k^2}\log\frac{\sqrt{n}}{k}. \tag{101}$$

Wird nun auf Grund der Formel (78) die Rechnung wiederholt, welche in Nr. 12 durchgeführt worden ist, so ergiebt sich für $\Psi(n)$ die Formel

$$\Psi(n) = \frac{2\pi}{9} \cdot \frac{n^{3/2}}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^3}} + O(n \log n), \tag{102}$$

aus welcher, wenn man n und m gleichzeitig so wachsen lässt, dass $\frac{m}{n}$ und $\frac{n^{1/2} \log n}{m}$ gegen Null convergiren, indem man etwa, für ein zwischen $1/2$ und 1 liegendes δ, $m = n^\delta$ setzt,

$$M\psi(n) = \frac{\pi n^{1/2}}{3 \sum_1^\infty \frac{1}{k^3}} \tag{103}$$

hervorgeht, in dem Sinne, dass das Verhältniss beider Seiten für $n = \infty$ der Einheit sich annähert.

Gleicherweise findet sich

$$M\chi(n) = \frac{1}{q^3 - 1} \cdot \frac{\pi n^{1/2}}{3 \sum_1^\infty \frac{1}{k^3}}. \tag{104}$$

Hiervon machen wir nun die Anwendung auf die reducirten positiven Formen einer negativen Determinante $-n$.

Nach Gauss heisst eine positive quadratische Form (a, b, c) der Determinante $-n$, für welche also

$$ac - b^2 = n \tag{105}$$

ist, reducirt, wenn a, b, c den Ungleichheiten genügen

$$\begin{cases} 0 < a \leqq c \\ -\frac{a}{2} < b \leqq +\frac{a}{2}, \end{cases} \tag{106}$$

und sie ist zudem eine eigentlich primitive Form, wenn a, b, c keinen gemeinsamen Theiler haben und (mod. 2) nicht die Restcombination $a \equiv 0$, $b \equiv 1$, $c \equiv 0$ darbieten; die Combination $a \equiv 0$, $b \equiv 0$, $c \equiv 0$ ist schon durch das Vorige ausgeschlossen. Jede eigentlich primitive positive Form derselben Determinante ist einer reducirten Form äquivalent,

reducirte Formen unter einander sind aber nicht äquivalent, ausgenommen die beiden Formen

$$(a, b, c), \quad (a, -b, c), \quad \text{wenn} \quad 2b = \pm a,$$

und die beiden Formen

$$(a, b, a), \quad (a, -b, a), \quad \text{wenn} \quad c = a$$

ist, welche je einander äquivalent sind. Zählt man also die Systeme ganzer Zahlen a, b, c, welche den angegebenen Bedingungen genügen, in den Fällen, wo in (106) Gleichheitszeichen gelten, nur zur Hälfte, so wird offenbar die Anzahl aller den Bedingungen genügenden Systeme a, b, c mit der Anzahl $H(-n)$ der Classen quadratischer Formen für die Determinante $-n$ übereinstimmen. Gälten nun in (106) nur die Ungleichheitszeichen, so wäre offenbar die Anzahl der ganzzahligen Systeme a, b, c ohne gemeinsamen Theiler, welche den Bedingungen (105) und (106) genügen, identisch mit $\psi(n)$ und daher die Anzahl aller Systeme a, b, c von der angegebenen Beschaffenheit gleich der Summe der $\chi(n)$, welche den noch zulässigen 6 Restcombinationen (mod. 2) entsprechen, also gleich:

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{\pi n^{1/2}}{3 \sum_1^\infty \frac{1}{k^3}}.$$

Diejenigen Systeme a, b, c aber, welche den Gleichheitszeichen entsprechen, fallen offenbar in die Grenzflächen des Raumes G und demnach kann ihre Anzahl höchstens nur von derselben Ordnung sein, wie das zweite Glied zur Rechten von (101), welches im asymptotischen Gesetze nicht mehr von Bedeutung ist; der eben gegebene Ausdruck giebt somit auch den Werth von $H(-n)$. Schreibt man mithin Δ für n, so erhält man das Resultat:

Die mittlere Anzahl der Classen aller eigentlich primitiven positiven quadratischen Formen der negativen Determinante $-\Delta$ ist

$$MH(-\Delta) = \frac{2\pi}{7 \sum_1^\infty \frac{1}{k^3}} \cdot \sqrt{\Delta}, \tag{107}$$

eine Formel, welche mit dem schon angeführten Gaussischen

asymptotischen Ausdrucke (5) bis auf eine additive Constante übereinstimmt. Uebrigens hat auch Gauss bereits an einer anderen Stelle*) diese Constante unterdrückt, wo er statt des Ausdruckes (5) den folgenden giebt:

$$\frac{\pi\sqrt{d}}{4\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)}, \tag{107a}$$

von dem man sich leicht überzeugt, dass er dem Ausdrucke (107) gleich ist; in der That ist

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^3} = 1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{8}\sum_1^\infty \frac{1}{k^3}$$

also

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^3} = \frac{8}{7}\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right),$$

wodurch jener Ausdruck in den andern verwandelt wird.

17. Bei der Wichtigkeit gerade dieses besondern Beispiels können wir nicht unterlassen, auch noch die direkte Methode, durch welche Mertens die Gaussische Formel hergeleitet hat**), wenigstens in ihren wesentlichen Punkten hier auseinanderzusetzen.

Wir denken uns nach seinem Vorgange das System der sämmtlichen nicht äquivalenten, primitiven und abgeleiteten, reducirten positiven Formen aufgestellt, welche den Determinanten

$$-1, -2, -3, \cdots -n \tag{108}$$

entsprechen. Die Gesammtzahl derjenigen Formen dieses Systems S, in denen wenigstens einer der äusseren Coefficienten ungerade ist, heisse $F(n)$, $f(n)$ aber die Anzahl derjenigen Formen, welche eigentlich primitiv sind. Die $F(n)$ Formen lassen sich nach dem grössten (ungeraden) gemeinsamen Theiler ihrer Coefficienten gruppiren, und so ergiebt sich zunächst für jede ganze Zahl n die Beziehung:

$$F(n) = f[n] + f\left[\frac{n}{3^2}\right] + f\left[\frac{n}{5^2}\right] + \cdots. \tag{109}$$

*) Gauss' Werke Bd. 2 p. 284.

**) In seiner Abhandlung über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, J. f. d. r. u. a. Math. Bd. 77.

Nennen wir andererseits $\psi(s, n)$ die Anzahl derjenigen Formen des Systems S, bei welchen der mittlere Coefficient $\pm s$ ist, $\chi(s, n)$ aber die Anzahl aller Formen dieser Art, bei denen die äusseren Coefficienten beide gerade sind, so leuchtet ein, dass

$$F(n) = \sum_{s} \left(\psi(s, n) - \chi(s, n)\right) \tag{110}$$

sein wird, wenn die Summation über alle zulässigen s d. i., weil bei reducirten Formen der mittlere Coefficient numerisch nicht grösser als die Quadratwurzel aus der durch 3 getheilten Determinante ist, über $s = 0, 1, 2, 3, \cdots \left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]$ erstreckt wird.

Wir suchen zunächst $\psi(s, n)$. Zu diesem Zwecke haben wir dem Begriffe reducirter Formen gemäss für jede Determinante $D = -\Delta$ aus der Reihe (108) $s^2 + \Delta$ auf alle Weise in zwei positive Faktoren a, c zu zerlegen, deren erster nicht grösser als der zweite ist, und aus jeder solchen Zerlegung, wenn $s = 0$ ist, die Form $(a, 0, c)$, wenn $s > 0$ ist, die beiden Formen (a, s, c), $(a, -s, c)$ zu bilden; von diesen Formen sind aber diejenigen, als nicht reducirt, auszuscheiden, bei welchen $a < 2s$ ist, und auch diejenigen reducirten Formen $(a, -s, c)$, bei welchen $a = 2s$ oder $a = c$ (oder beides) ist, weil dieselben äquivalent sind mit (a, s, c).

Ist also erstens $s = 0$, so hat man alle Formen $(a, 0, c)$ zu bilden, bei denen $a \cdot c$ eine solche Zerlegung einer der Zahlen

$$1, 2, 3, \cdots n$$

ist, deren zweiter Faktor mindestens gleich dem ersten ist; solcher Zerlegungen giebt es bei einer Zahl m

$$\frac{T(m) + 1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{T(m)}{2},$$

je nachdem m eine Quadratzahl ist oder nicht; weil es bis n hin $[\sqrt{n}]$ Quadratzahlen giebt, ist also die Anzahl aller jener Zerlegungen oder

$$\psi(0, n) = \tfrac{1}{2}\tau(n) + \tfrac{1}{2}[\sqrt{n}]. \tag{111}$$

Ist zweitens s eine positive Zahl, so giebt es reducirte Formen $(a, \pm s, c)$ nur für diejenigen Determinanten $D = \Delta$ der Reihe (108), für welche $\sqrt{\frac{\Delta}{3}} > s$ ist, d. h. für die Determinanten

$$-3s^2, \; -(3s^2+1), \; \cdots \; -n.$$

Suchen wir zunächst sämmtliche Formen $(a, \pm s, c)$, bei denen $a < c$ ist, so sind für a, c die sämmtlichen Zerlegungen der Zahlen

$$4s^2, \; 4s^2+1, \; \cdots \; n+s^2$$

in zwei Faktoren zu wählen, deren erster nicht grösser als der zweite ist. Die Anzahl all' dieser Zerlegungen ist nach dem beim vorigen Falle Gesagten gleich dem Unterschiede

$$\tfrac{1}{2}\tau(n+s^2) + \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{n+s^2}\right] - \left(\tfrac{1}{2}\tau(4s^2-1) + \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{4s^2-1}\right]\right),$$

die Anzahl der Formen $(a, \pm s, c)$, welche diesen Zerlegungen entspringen, also doppelt so gross. Aber von ihnen sind auszuscheiden erstens diejenigen Formen, bei denen $a < 2s$. Sei nun a eine Zahl $< 2s$, so giebt es in der Reihe

$$1, \; 2, \; 3, \; \cdots \; n+s^2$$

$Q = \left[\frac{n+s^2}{a}\right]$ Vielfache von a, desgleichen $q = \left[\frac{4s^2-1}{a}\right]$ in der Reihe

$$1, \; 2, \; 3, \; \cdots \; 4s^2-1$$

und daher in der Reihe

$$4s^2, \; 4s^2+1, \; \cdots \; n+s^2$$

$$Q - q = \left[\frac{n+s^2}{a}\right] - \left[\frac{4s^2-1}{a}\right]$$

solche Vielfache, nämlich die Zahlen

$$a\cdot(q+1), \; a\cdot(q+2), \; \cdots \; a\cdot Q,$$

denen Formen $(a, \pm s, c)$ mit dem ersten Coefficienten a entsprechen können, und diese Formen gehören auch sämmtlich zu den zuvor gezählten, denn, da $2s > a$, so ist

$$\frac{4s^2-1}{a} > a - \frac{1}{a} > a - 1$$

also $q > a - 1$ d. h. $q + 1 > a$ also der zweite Faktor der vorstehenden Zerlegungen grösser als der erste. Da diese $2(Q - q)$ Formen auszuscheiden sind, sobald $a < 2s$ ist, so müssen also von den zuvor gezählten Formen

$$2 \cdot \sum_{1}^{2s-1} \left[\frac{n+s^2}{a}\right] - 2 \cdot \sum_{1}^{2s-1} \left[\frac{4s^2-1}{a}\right]$$

ausgeschieden werden.

Zweitens sind aber noch auszuscheiden diejenigen Formen $(a, -s, c)$, bei denen entweder $a = 2s$ oder $a = c$ ist. Die Anzahl der erstern beträgt, wie eben bemerkt worden,

$$\left[\frac{n+s^2}{2s}\right] - \left[\frac{4s^2-1}{2s}\right],$$

die Anzahl der Formen $(a, -s, a)$ ist gleich der Menge der Quadratzahlen in der Reihe $4s^2, 4s^2+1, \cdots n+s^2$, d. i.

$$[\sqrt{n+s^2}] - [\sqrt{4s^2-1}];$$

von den letztern Formen ist aber die Form $(2s, -s, 2s)$ schon unter den vorigen enthalten und darf daher nicht nochmals gezählt werden. Nach Ausscheidung all' der bezeichneten Formen aus den zuvor gezählten bleiben die $\psi(s, n)$ gesuchten reducirten Formen übrig und folglich erhält man die Gleichung:

$$\psi(s, n) = \tau(n+s^2) - \tau(4s^2-1) + 1$$
$$- 2\sum_{a=1}^{2s-1}\left[\frac{n+s^2}{a}\right] - \left[\frac{n+s^2}{2s}\right] + 2\sum_{a=1}^{2s-1}\left[\frac{4s^2-1}{a}\right] + \left[\frac{4s^2-1}{2s}\right].$$

Nach der Dirichlet'schen Formel (29a) ist jedoch

$$\tau(4s^2-1) = 2 \cdot \sum_{a=1}^{2s-1}\left[\frac{4s^2-1}{a}\right] - (2s-1)^2.$$

Dadurch vereinfacht sich die vorige Gleichung und nimmt die Gestalt an:

$$(111\,a)\quad \psi(s, n) = \tau(n+s^2) - 2\sum_{a=1}^{2s-1}\left[\frac{n+s^2}{a}\right] - \left[\frac{n+s^2}{2s}\right] + 4s^2 - 2s + 1.$$

Setzt man nun in den für $\psi(0, n)$ und $\psi(s, n)$ gefundenen Formeln den asymptotischen Werth der Funktion τ ein, so kommt, wenn zudem die Euler'sche Summenformel angewendet wird, bis auf Grössen von der Ordnung $\sqrt{n}$ genau

$$\psi(0, n) = \frac{1}{2} n (\log n + 2E - 1)$$

$$\psi(s, n) = (n + s^2) \log \frac{n+s^2}{4s^2} + 3s^2 - n + \vartheta \cdot \frac{n+s^2}{24n^2},$$

wo ϑ ein positiver echter Bruch ist. Wird in der letztern dieser beiden Formeln $s = 1, 2, 3, \cdots \left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]$ gesetzt und addirt, die Summe mittels der Euler'schen Summenformel durch ein Integral ersetzt, und endlich die erste Formel hinzugefügt, so entsteht die folgende Gleichung:

$$\sum_0^{\left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]} \psi(s, n) = \int_0^{\left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]} (s^2 + n) \log \frac{s^2+n}{4s^2} ds + n \log n - \frac{2n}{3} \sqrt{\frac{n}{3}}.$$

Durch partielle Integration aber lässt sich das Integral ermitteln und man findet sodann bis auf Grössen von der Ordnung n genau

$$\sum_0^{\left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]} \psi(s, n) = \frac{2\pi}{9} n^{3/2}.$$

Ganz analoge Betrachtungen können bezüglich der Funktion $\chi(s, n)$ wiederholt werden und führen zu der entsprechenden Formel:

$$\sum_0^{\left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]} \chi(s, n) = \frac{\pi}{18} n^{3/2},$$

und somit folgt nach (110)

$$F(n) = \frac{\pi}{6} n^{3/2} + H \cdot n, \tag{112}$$

wenn mit H eine Grösse bezeichnet wird, welche für jedes noch so grosse n unter einer angebbaren Grenze H_0 bleibt. Da

aber die Gleichung (109) für jede ganze Zahl n besteht, so wird man, in Erinnerung an die Formel

$$\left[\frac{n}{hk}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{h}\right]}{k}\right]$$

und mittels des durch die Formel (7a) des 11. Abschnittes ausgesprochenen Umkehrungsprincipes die Formel

$$f(n) = \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \mu(\gamma) \cdot F\left[\frac{n}{\gamma^2}\right] \tag{113}$$

erhalten, in welcher die Summation sich auf alle ungeraden Zahlen $\gamma < \sqrt{n}$ erstreckt, d. i. nach Einsetzung des asymptotischen Werthes der Funktion F

$$f(n) = \frac{\pi}{6} n^{3/2} \cdot \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(\gamma)}{\gamma^3} + n \cdot \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \frac{H}{\gamma^2} \tag{114}$$

oder auch gleich

$$\frac{\pi}{6} n^{3/2} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(\gamma)}{\gamma^3} - \frac{\pi}{6} n^{3/2} \cdot \sum_{[\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{\mu(\gamma)}{\gamma^3} + n \cdot \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} \frac{H}{\gamma^2}. \tag{114a}$$

Die erste dieser Summen ist gleich dem Unterschiede zwischen der über sämmtliche ganze Zahlen k erstreckten Summe $\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^3}$ und der Summe $\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(2h)}{(2h)^3}$; aber $\mu(2h)$ ist Null, wenn h gerade, und gleich $-\mu(h)$, wenn h ungerade ist, folglich wird

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(\gamma)}{\gamma^3} = \frac{8}{7} \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^3}.$$

Die zweite Summe in (114a) ist kleiner als

$$\sum_{[\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

d. i. nach (39b) des 3. Abschnittes kleiner als $\frac{1}{2[\sqrt{n}]^2}$, das zweite Glied also von der Ordnung $\sqrt{n}$, die dritte Summe

endlich ist $< H_0 \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$, das dritte Glied also von der Ordnung n. Alles in allem ergiebt sich hiernach bis auf Grössen von der Ordnung n genau

$$f(n) = \frac{4\pi}{2\pi \sum_1^\infty \frac{1}{k^3}} \cdot n^{3/2}. \tag{115}$$

Da aber die Anzahl aller nicht äquivalenten eigentlich primitiven reducirten Formen einer Determinante mit der Anzahl der Classen für diese Determinante gleich ist, so stellt $f(n)$ die summatorische Funktion für die Funktion $H(-n)$ vor und daher ergiebt sich aus der vorigen Formel in bekannter Weise die nachstehende:

$$MH(-n) = \frac{2\pi}{7 \sum_1^\infty \frac{1}{k^3}} \cdot n^{3/2}, \tag{116}$$

welche, wenn Δ statt n geschrieben wird, mit der früheren (107) identisch ist.

18. Die in den letzten Aufgaben angewandte Methode von Lipschitz war nur die Verallgemeinerung derjenigen, deren wir uns im 6. Abschnitte zur Bestimmung der mittleren Anzahl aller Darstellungen einer Zahl durch eine quadratische Form bedient haben. Dort haben wir gesehen, in wie innigem Zusammenhange diese Frage mit dem allgemeinen Dirichlet'schen Satze also auch mit der Theorie der Dirichlet'schen Reihen steht. Auf die Wichtigkeit der genannten Reihen auch für andere Probleme analoger Art hat bereits Dirichlet selbst hingewiesen*), und in der That sind seine frühesten Resultate über die mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen durch direkte Verwendung derselben gewonnen wor-

*) In Crelle's Journal Bd. 18, sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, sagt er darüber: les nouvelles recherches (über die Classenanzahl) m'ont fait reconnaître que la considération des séries de cette espèce constitue une méthode très-féconde d'analyse indéterminée et qui s'applique à des questions très-variées.

den*). Es heisst gewissermassen, den Kreislauf der Betrachtungen, welchen dies Werk vorzüglich gewidmet ist, vollenden, wenn wir hier zum Schlusse nach den Angaben, welche Dirichlet über seine bezüglichen Arbeiten gemacht hat, für den Zusammenhang zwischen jenen Reihen und der Frage nach den mittleren Werthen zahlentheoretischer Funktionen den Grund aufdecken. Wir finden denselben in dem allgemeinen Dedekind'schen Satze, den wir in Nr. 7 des 3. Abschnittes hergeleitet haben. In der That, bezeichnen wir, wenn $f(n)$ irgend eine zahlentheoretische Funktion ist, durch R die unendliche Reihe

$$R = \sum_1^\infty \frac{f(n)}{n^{1+\varrho}} \tag{117}$$

und vergleichen sie mit der dortigen Reihe (21):

$$S = \sum_1^\infty \frac{a_n}{c_n^\varrho},$$

so wird die daselbst mit M_n bezeichnete Grösse:

$$M_n = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n$$

hier den Ausdruck haben:

$$M_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

d. h. gleich der summatorischen Funktion $F(n)$ und

$$\frac{M_n}{c_n} = \frac{F(n)}{n}$$

sein; ferner convergirt das Verhältniss $\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n}{n+1}$ mit unendlich wachsendem Index gegen die Einheit. Ist demnach für die Funktion $f(n)$ ein Mittelwerth $\mathfrak{M}f(n)$ vorhanden, d. h. nähert sich $\frac{F(n)}{n}$ mit unendlich wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze ω, so wird dasselbe gelten für die Ausdrücke $\frac{M_n}{c_n}$ und $\frac{M_n}{c_{n+1}}$ und folglich wird dem angezogenen Satze zufolge

*) S. seine Note in den Monatsb. d. Berl. Ac. v. J. 1838.

$$\lim_{\varrho=0} \varrho S = \lim_{\varrho=0} \varrho R = \omega \tag{118}$$

sein. Hieraus erkennt man den Satz:

Ist die Reihe R nach Potenzen von ϱ entwickelbar, so beginnt, falls $\mathfrak{M}f(n)$ überhaupt vorhanden ist, diese Entwicklung mit der ersten negativen Potenz von ϱ und $\mathfrak{M}f(n)$ ist gleich dem Coefficienten derselben.

Unter diese Kategorie von Funktionen fällt z. B. die Funktion $f(n)$, welche die Anzahl sämmtlicher Darstellungen einer Zahl n durch das Formensystem einer gegebenen Determinante ausdrückt, welche, wie wir gesehen haben, einen endlichen Mittelwerth hat. In der That ist die wahre Bedeutung der Grundformel (G) und der Operationen, welche wir mit ihr vorgenommen haben, indem wir zur Rechten derselben die Grenzwerthe der Summen

$$\varrho \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

aufsuchten, nur diese: die Reihe (117) nach Potenzen von ϱ zu entwickeln und den Coefficienten der ersten negativen Potenz dieser Entwicklung zu ermitteln.

Aber in den meisten Fällen wächst $\frac{F(n)}{n}$ zugleich mit n und ein Mittelwerth in dem angegebenen Sinne ist nicht vorhanden; man kann vielmehr nur nach einem asymptotischen Ausdrucke d. i. nach einer andern einfachen Funktion $\varphi(n)$ mit der summatorischen Funktion $\Phi(n)$ fragen, für welche der Unterschied $\frac{F(n)}{n} - \frac{\Phi(n)}{n}$ mit unendlich wachsendem n die Null oder, was nur auf eine Aenderung von $\varphi(n)$ um eine additive Constante hinauskommt, eine Constante zur Grenze hat. Ist $\varphi(n)$ eine solche asymptotische Funktion, und auch die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^{1+\varrho}}$$

nach Potenzen von ϱ entwickelbar, so muss dem zuvor Gesagten zufolge nachstehende Entwicklung gelten:

$$(119)\quad \sum_1^{\infty} \frac{f(n)-\varphi(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{\omega}{\varrho} + C + C_1\varrho + C_2\varrho^2 + \cdots,$$

in welcher

$$(120)\quad \omega = \mathfrak{M}\big(f(n) - \varphi(n)\big)$$

ist.

Diese Bemerkungen reichen vollkommen aus, den Zusammenhang zu kennzeichnen, in welchem die Dirichlet'schen Reihen mit der Bestimmung der mittleren Funktionswerthe stehen. Sollten sie aber eine Methode charakterisiren zur wirklichen Ermittelung einer asymptotischen Funktion $\varphi(n)$, so wäre offenbar noch zu fragen, ob auch umgekehrt aus dem Bestehen einer Gleichung von der Form (119) auf (120) geschlossen oder, was auf dasselbe hinauskommt, ob der Dedekind'sche Satz auch umgekehrt werden darf. Insoweit dies nicht nachweisbar ist, kann die angedeutete Methode nur als eine heuristische, als eine solche nämlich gelten, welche Funktionen $\varphi(n)$ an die Hand giebt, die asymptotische Funktionen für $f(n)$ sein können, für welche aber streng genommen sodann noch zu beweisen ist, dass für den Unterschied $f(n) - \varphi(n)$ thatsächlich ein endlicher Mittelwerth vorhanden ist.

19. Zur Anwendung der Methode auf bestimmte Funktionen $f(n)$ handelt es sich vorzugsweise um die Frage, auf welche Weise die Entwicklungen nach den Potenzen von ϱ zu gewinnen sind. Der Zusammenhang der verschiedensten zahlentheoretischen Funktionen mit der Reihe

$$(121)\quad \zeta(1+\varrho) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

welchen wir im 11. Abschnitte festgestellt haben, weist uns in dieser Hinsicht vor allem auf die entsprechende Entwicklung von $\zeta(1+\varrho)$. Um dahin zu gelangen, gehen wir aus von der folgenden Formel:

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{-\varrho} = 1 + \frac{\varrho}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{\varrho(1+\varrho)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{\varrho(1+\varrho)(2+\varrho)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}\cdots,$$

die sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{(n-1)^\varrho}-\frac{1}{n^\varrho}\right)=\frac{1}{n^{1+\varrho}}+\frac{1+\varrho}{2}\cdot\frac{1}{n^{2+\varrho}}+\frac{(1+\varrho)(2+\varrho)}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^{3+\varrho}}\cdots.$$

Aus ihr erhält man, wenn man über $n = 2, 3, 4, \ldots$ summirt und beiderseits 1 hinzufügt

$$\frac{1}{\varrho}+1=\sum_1^\infty\frac{1}{n^{1+\varrho}}+\frac{1+\varrho}{2}\cdot\sum_2^\infty\frac{1}{n^{2+\varrho}}+\frac{(1+\varrho)(2+\varrho)}{2\cdot 3}\cdot\sum_2^\infty\frac{1}{n^{3+\varrho}}\cdots.$$

Die Summen zur Rechten, von der zweiten an gezählt, sind stetige Funktionen der positiven Veränderlichen ϱ, welche für $\varrho = 0$ endliche Werthe erhalten; denkt man sich also alle Glieder zur Rechten vom zweiten an nach den Potenzen von ϱ entwickelt, so wird keine negative Potenz auftreten, das von ϱ freie Glied aber gleich

$$\frac{1}{2}\sum_2^\infty\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\sum_2^\infty\frac{1}{n^3}+\cdots$$

sein, die vorige Gleichung erhält also folgende Gestalt:

$$\sum_1^x\frac{1}{n^{1+\varrho}}=\frac{1}{\varrho}+C+C_1\varrho+C_2\varrho^2+\cdots,$$

wo

$$C=1-\frac{1}{2}\sum_2^\infty\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3}\sum_2^\infty\frac{1}{n^3}-\cdots$$

ist. Dass der unendliche Ausdruck dieses Coefficienten C convergirt, ersieht man sogleich aus der Schlussnummer des 4. Abschnitts; man darf ihn daher auch folgendermassen schreiben:

$$1-\sum_2^\infty\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\right)=1+\sum_2^\infty\left(\frac{1}{n}+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right).$$

Nimmt man hier zunächst die endliche Summe

$$1+\sum_2^m\left(\frac{1}{n}+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\sum_1^m\frac{1}{n}+\sum_2^m\left(\log(n-1)-\log n\right)=\sum_1^m\frac{1}{n}-\log m,$$

wofür nach der Euler'schen Summenformel auch

$$E + \frac{1}{2m} + \cdots$$

gesetzt werden darf, und lässt nun m unendlich wachsen, so zeigt sich die Uebereinstimmung des Coefficienten C mit der Euler'schen Constanten E und man erhält folgende fundamentale Gleichung:

$$(122) \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho} + E + C_1\varrho + C_2\varrho^2 + \cdots,$$

in welcher die Werthe der Constanten C_1, C_2, ... uns hier nicht weiter interessiren.

Unmittelbar folgt hieraus durch Differenzirung der für jedes positive ϱ stetigen Funktion nach ϱ die fernere Gleichung:

$$(123) \qquad \sum_1^\infty \frac{\log n}{n^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho^2} - C_1 - 2C_2\varrho - \cdots.$$

20. Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir nun zunächst noch einmal die Funktion $T(n)$, welche die Anzahl aller Theiler von n bezeichnet und deren summatorische Funktion $\tau(n)$ genannt worden ist. Nach (39) des 11. Abschnitts ist

$$\sum_1^\infty \frac{T(n)}{n^{1+\varrho}} = \xi^2(1+\varrho)$$

d. i. mit Rücksicht auf (122)

$$(124) \qquad \sum_1^\infty \frac{T(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho^2} + 2E\cdot\frac{1}{\varrho} + E^2 + 2C_1 + \cdots$$

und folglich wegen (123)

$$\sum_1^\infty \frac{T(n) - \log n}{n^{1+\varrho}} = 2E\cdot\frac{1}{\varrho} + E^2 + 3C_1 + \cdots.$$

Diese Gleichung charakterisirt nach der vorausgeschickten Methode $\log n$ als eine — möglicherweise — asymptotische Funktion für $T(n)$, sodass

$$\mathfrak{M}\big(T(n) - \log n\big) = 2E$$

oder asymptotisch

$$\tau(n) = \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n + 2En$$

d. i. nach der Stirling'schen Formel

$$\tau(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + (2E - 1)\, n$$

ist, eine Gleichung, die mit Gl. (40) bis auf die Ordnung der vernachlässigten Glieder in Uebereinstimmung ist und durch sie ihre Bestätigung erhält.

Wir haben ferner in Nr. 6 des 11. Abschnitts die Beziehung aufgestellt

$$\sum_1^\infty \frac{T(n)}{n^{1+\varrho}} = \sum_1^\infty \frac{P(n)}{n^{1+\varrho}} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2+2\varrho}}, \tag{125}$$

in welcher $P(n) = 2^{\omega(n)}$ die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei relative Primfaktoren bezeichnet. Nun convergirt der zweite Faktor rechts mit $\varrho = 0$ gegen $\frac{\pi^2}{6}$, während nach (124)

$$\lim_{\varrho=0} \varrho^2 \sum_1^\infty \frac{T(n)}{n^{1+\varrho}} = 1$$

ist; somit findet sich aus der voraufgehenden Gleichung

$$\lim_{\varrho=0} \varrho^2 \sum_1^\infty \frac{P(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{6}{\pi^2}$$

oder

$$\sum_1^\infty \frac{P(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} + P \cdot \frac{1}{\varrho} + Q + Q_1 \varrho + \cdots.$$

Andererseits kann man schreiben

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2+2\varrho}} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \cdot e^{-2\varrho \log n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} - 2\varrho \sum_1^\infty \frac{\log n}{n^2} + \cdots$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - 2F \cdot \varrho + \cdots.$$

Hierdurch nimmt die Gleichung (125) die Gestalt an

$$\frac{1}{\varrho^2} + 2E \cdot \frac{1}{\varrho} + \cdots = \left(\frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} + P \cdot \frac{1}{\varrho} + \cdots\right)\left(\frac{\pi^2}{6} - 2F\varrho + \cdots\right)$$

d. i. gleich

$$\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{\pi^2}{6} P - \frac{12F}{\pi^2}\right)\frac{1}{\varrho} + \cdots$$

woraus sich

$$2E = \frac{\pi^2}{6} P - \frac{12F}{\pi^2}$$

also

$$P = \frac{6}{\pi^2}\left(2E + \frac{12F}{\pi^2}\right)$$

und schliesslich

$$(125\,a)\quad \sum_1^\infty \frac{P(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\varrho^2} + \frac{6}{\pi^2}\left(2E + \frac{12F}{\pi^2}\right)\frac{1}{\varrho} + \cdots$$

ergiebt. In Verbindung mit (123) findet man folglich

$$\sum_1^\infty \frac{P(n) - \frac{6}{\pi^2}\log n}{n^{1+\varrho}} = \frac{6}{\pi^2}\left(2E + \frac{12F}{\pi^2}\right)\frac{1}{\varrho} + \cdots.$$

Die obige Methode führt demnach zu dem Ansatze

$$\mathfrak{M}\left((P(n) - \frac{6}{\pi^2}\log n\right) = \frac{6}{\pi^2}\left(2E + \frac{12F}{\pi^2}\right)$$

d. i., weil

$$\frac{1}{n}\log 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \log n - 1 + \frac{1}{2n}\log n\cdots$$

ist, mit Vernachlässigung des letztern Gliedes, asymptotisch

$$\pi(n) = \frac{6n}{\pi^2}\left(\log n + 2E - 1 + \frac{12F}{\pi^2}\right).$$

Diese Formel erhält ihre Bestätigung durch die Gleichung (68) oder (70), mit der sie, abgesehen von dem angemerkten Grade der Annäherung, vollkommen identisch ist.

21. Um diesen früheren Beispielen nun aber auch noch ein neues, bisher nicht behandeltes hinzuzufügen, suchen wir mit Dirichlet die mittlere Anzahl der Geschlechter quadratischer Formen einer gegebenen Determinante n.

Nach der Formel (26) des 9. Abschnittes:

$$G(D) = 2^{\omega+\sigma-1}$$

und nach den zugehörigen Auseinandersetzungen in Nr. 1 desselben findet sich sogleich, dass, je nachdem n die Form hat

$$(126)\quad n = 8k,\ n = 8k+4,\ n = 4k+2,\ n = 4k+1,\ n = 4k+3,$$

die Funktion G für negative Determinanten $-n$ durch die Formeln

$$(127)\quad G(-n)=P(n),\ G(-n)=\tfrac{1}{2}P(n),\ G(-n)=\tfrac{1}{2}P(n),$$

$$G(-n)=P(n),\ G(-n)=\tfrac{1}{2}P(n)$$

resp., dagegen für positive (nicht quadratische) Determinanten n beziehungsweise durch die Formeln

$$(128)\quad G(+n)=P(n),\ G(+n)=\tfrac{1}{2}P(n),\ G(+n)=\tfrac{1}{2}P(n),$$

$$G(+n)=\tfrac{1}{2}P(n),\ G(+n)=P(n)$$

bestimmt ist. Hieraus leiten sich ohne Mühe für eine negative Determinante die folgenden Gleichungen her, in denen zur Abkürzung

$$(129)\qquad \psi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^s},\qquad \chi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}$$

gesetzt ist:

$$(130)\quad \begin{cases} \sum_{1}^{\infty}\dfrac{G(-8k)}{(8k)^s}=\dfrac{2}{8^s}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\dfrac{\psi^2(s)}{\psi(2s)} \\ \sum_{0}^{\infty}\dfrac{G(-8k-4)}{(8k+4)^s}=\dfrac{1}{4^s}\cdot\dfrac{\psi^2(s)}{\psi(2s)} \\ \sum_{0}^{\infty}\dfrac{G(-4k-2)}{(4k+2)^s}=\dfrac{1}{2^s}\cdot\dfrac{\psi^2(s)}{\psi(2s)} \\ \sum_{0}^{\infty}\dfrac{G(-4k-1)}{(4k+1)^s}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\psi^2(s)+\chi^2(s)}{\psi(2s)} \\ \sum_{0}^{\infty}\dfrac{G(-4k-3)}{(4k+3)^s}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\psi^2(s)-\chi^2(s)}{\psi(2s)}. \end{cases}$$

Es wird genügen, eine oder die andere dieser Formeln zu bestätigen. Hierzu bemerke man, dass

$$\psi^2(s)=\Big(\sum_{k}\frac{1}{(2k+1)^s}\Big)^2=\sum_{k,k'}\frac{1}{(2k+1)^s\cdot(2k'+1)^s}$$

eine Doppelsumme ist, welche, wenn alle Glieder vereinigt werden, für welche $(2k+1)(2k'+1)$ dieselbe ungerade Zahl γ ist, sich in Gestalt der einfachen Summe

$$\psi^2(s) = \sum_{\gamma} \frac{T(\gamma)}{\gamma^s} \tag{131}$$

schreiben lässt, in welcher über alle positiven ungeraden Zahlen γ zu summiren ist. Gleicherweise findet man, da

$$\frac{(-1)^{k+k'}}{(2k+1)^s \cdot (2k'+1)^s} = \frac{(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\gamma^s}$$

gesetzt werden darf,

$$\chi^2(s) = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} T(\gamma)}{\gamma^s}.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{1}{2}\left(\psi^2(s) + \chi^2(s)\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{T(4k+1)}{(4k+1)^s} \tag{132}$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\psi^2(s) - \chi^2(s)\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{T(4k+3)}{(4k+3)^s}. \tag{133}$$

Endlich ist

$$\psi(2s) = \sum_{\gamma} \frac{1}{(\gamma^2)^s}.$$

Wird hiernach die vorletzte der Gleichungen (130), in welcher nach (127)

$$G(-4k-1) = P(4k+1)$$

zu setzen ist, mit $\psi(2s)$ multiplicirt, so erhält man zur Linken die Doppelsumme

$$\sum_{k,\gamma} \frac{P(4k+1)}{(4k+1)^s (\gamma^2)^s},$$

welche, wenn diejenigen Glieder vereint werden, in denen $(4k+1)\gamma^2$ derselben Zahl, welche die Form $4h+1$ haben muss, gleich wird, auch als einfache Summe:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{C_{4h+1}}{(4h+1)^s}$$

geschrieben werden kann, in welcher der Coefficient C_{4h+1} gleich der über alle quadratischen Theiler γ^2 von $4h+1$ ausgedehnten Summe

$$\sum_{\gamma} P\left(\frac{4h+1}{\gamma^2}\right)$$

d. i. nach (49a) des 11. Abschnittes gleich $T(4h+1)$ ist. Die Vergleichung mit (132) bestätigt dann die vorletzte der Gleichungen (130). — Wird die letzte auf gleiche Weise behandelt, so entsteht links die Doppelsumme

$$\frac{1}{2}\sum_{k,\gamma}{}' \frac{P(4k+3)}{(4k+3)^s(\gamma^2)^s} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}' \frac{C_{4h+3}}{(4h+3)^s},$$

wenn gesetzt wird

$$C_{4h+3} = \sum_{\gamma} P\left(\frac{4h+3}{\gamma^2}\right) = T(4h+3),$$

und die Vergleichung mit (133) bestätigt die letzte der Formeln (130).

Um noch die mittlere derselben zu beweisen, multipliciren wir sie wieder mit $\psi(2s)$ und erhalten, da

$$P(4k+2) = 2 \cdot P(2k+1)$$

ist, links die Doppelsumme

$$\frac{1}{2^s} \cdot \sum_{k,\gamma}{}' \frac{P(2k+1)}{(2k+1)^s(\gamma^2)^s},$$

welche sogleich in die Gestalt der einfachen

$$\frac{1}{2^s} \cdot \sum{}' \frac{T(2h+1)}{(2h+1)^s} = \frac{1}{2^s} \cdot \psi^2(s)$$

übergeführt werden kann. U. s. w. —

Für positive (nicht quadratische) Determinanten gelten die Formeln (130) aus denselben Gründen, nur dass statt $G(-n)$ eben die Funktion $G(n)$ zu setzen und die Faktoren $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ auf den rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen mit einander zu vertauschen sind.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir nun, indem wir $s = 1 + \varrho$ setzen, z. B. die vorletzte der Gleichungen (130) in der folgenden Gestalt:

$$(134)\quad \sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^{2+2\varrho}} \cdot \sum_0^\infty \frac{G(-4k-1)}{(4k+1)^{1+\varrho}} = \frac{1}{2}\left(\psi^2(1+\varrho)+\chi^2(1+\varrho)\right).$$

Ohne Mühe bestätigt man die Beziehung

$$\psi(s) = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\xi(s)$$

also

$$\psi(1+\varrho) = \left(1-\frac{1}{2}e^{-\varrho\log 2}\right)\cdot\xi(1+\varrho)$$

d. h.

$$\psi(1+\varrho) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varrho\log 2-\cdots\right)\left(\frac{1}{\varrho}+E+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2\varrho}+\frac{E+\log 2}{2}+\cdots$$

also

$$\psi^2(1+\varrho) = \frac{1}{4\varrho^2}+\frac{E+\log 2}{2}\cdot\frac{1}{\varrho}+\cdots.$$

Andererseits ist

$$\chi(1+\varrho) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{1+\varrho}}$$

gleich

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot e^{-\varrho\log(2k+1)} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} - \varrho\cdot\sum\frac{(-1)^k\log(2k+1)}{2k+1}+\cdots,$$

wo die einzelnen Summen zur Rechten sämmtlich convergiren also endliche Werthe haben, die erste den Werth $\frac{\pi}{4}$; man darf also setzen

$$\chi(1+\varrho) = \frac{\pi}{4} - C\varrho+\cdots,$$

wo

$$C = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k\log(2k+1)}{2k+1},$$

folglich

$$\chi^2(1+\varrho) = \frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi C}{2}\cdot\varrho+\cdots.$$

Und demnach nimmt die rechte Seite der Gleichung (134) die Gestalt an:

$$\frac{1}{8\varrho^2}+\frac{E+\log 2}{4}\cdot\frac{1}{\varrho}+\cdots$$

und zeigt, dass die Entwicklung auch der linken Seite nach Potenzen von ϱ, oder, weil der erste Faktor links ersichtlich eine stetige Funktion der positiven Veränderlichen ϱ ist, welcher für $\varrho = 0$ der endliche Werth

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\,\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$$

zukommt, die Entwicklung auch des zweiten Faktors nach Potenzen von ϱ mit der zweiten negativen Potenz $\frac{1}{\varrho^2}$ beginnt. Ist

$$\frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{\varrho} + C_0 + C_1\varrho + \cdots$$

diese Entwicklung, so geht die Gleichung (134), da

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^{2+2\varrho}} = \sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} - 2\varrho \sum_0^\infty \frac{\log(2k+1)}{(2k+1)^2} + \cdots$$

gesetzt werden kann, wo unschwer

$$\sum_0^\infty \frac{\log(2k+1)}{(2k+1)^2} = \sum_1^\infty \frac{\log n}{n^2} - \sum_1^\infty \frac{\log(2k)}{(2k)^2} = \frac{3}{4}F - \frac{\pi^2}{24}\log 2$$

gefunden wird, in die folgende über:

$$\left(\frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{3F}{2} - \frac{\pi^2}{12}\log 2\right)\varrho + \cdots\right)\left(\frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{\varrho} + C_0 + C_1\varrho\cdots\right)$$
$$= \frac{1}{8\varrho^2} + \frac{E + \log 2}{4}\cdot\frac{1}{\varrho} + \cdots,$$

aus welcher sich für die Coefficienten A, B diese Werthe ergeben:

$$A = \frac{1}{\pi^2}, \quad B = \frac{1}{\pi^2}\left(2E + \frac{12}{\pi^2}F + \frac{4}{3}\log 2\right).$$

Nun setze man $f(n) = G(-n)$, wenn die ganze Zahl n die Form $4k+1$ hat, dagegen $f(n) = 0$ für alle andern Werthe von n; dann geht aus dem Vorstehenden folgende Gleichung hervor:

$$\sum_1^\infty \frac{f(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{1}{\pi^2\varrho^2} + \frac{1}{\pi^2}\left(2E + \frac{12}{\pi^2}F + \frac{4}{3}\log 2\right)\cdot\frac{1}{\varrho} + \cdots$$

und diese giebt in Verbindung mit (125a)

$$\sum_1^\infty \frac{f(n) - \frac{1}{6} P(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{4}{3\pi^2} \log 2 \cdot \frac{1}{\varrho} + \cdots.$$

Nach Dirichlet setzen wir demnach

$$\mathfrak{M}\left(f(n) - \tfrac{1}{6} P(n)\right) = \frac{4}{3\pi^2} \log 2$$

oder, wenn wir das Mittel

$$\frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$$

mit $\mathsf{M} f(n)$ bezeichnen, asymptotisch

$$\mathsf{M} f(n) = \frac{1}{\pi^2}\left(\log n + 2E - 1 + \frac{12F}{\pi^2} + \frac{4}{3} \log 2\right).$$

Bedenkt man nun, dass unter den $8h$ Zahlen $1, 2, 3, \ldots 8h$ nur $2h$ solche von der Form $4k + 1$ vorhanden sind, so zeigt sich sogleich

$$\mathsf{M} f(n) = \tfrac{1}{4} \mathsf{M} G(-4k - 1)$$

und folglich

$$\mathsf{M} G(-4k - 1) = \frac{4}{\pi^2}\left(\log n + 2E - 1 + \frac{12F}{\pi^2} + \frac{4}{3} \log 2\right)$$

oder

$$\mathsf{M} G(-4k - 1) = \frac{4}{\pi^2}\left(N - 1 + \frac{4}{3} \log 2\right), \tag{135}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$N = \log n + 2E + \frac{12F}{\pi^2}. \tag{135a}$$

Durch ganz analoge Betrachtungen findet man aus den übrigen der Formeln (130) die folgenden entsprechenden Resultate:

$$\text{(135)} \quad \begin{cases} \mathsf{M} G(-4k - 3) = \frac{2}{\pi^2}\left(N - 1 + \frac{4}{3} \log 2\right) \\ \mathsf{M} G(-8k) \quad\quad = \frac{8}{\pi^2}\left(N - 1 - \frac{8}{3} \log 2\right) \\ \mathsf{M} G(-8k - 4) = \frac{4}{\pi^2}\left(N - 1 - \frac{2}{3} \log 2\right) \\ \mathsf{M} G(-4k - 2) = \frac{4}{\pi^2}\left(N - 1 + \frac{1}{3} \log 2\right). \end{cases}$$

Da aber unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots 8h$ die Anzahl der Zahlen von den Formen (126) resp. gleich

$$h,\ h,\ 2h,\ 2h,\ 2h$$

ist, so wird, wenn man die Gleichheit beachtet:

$$\frac{G(-1)+G(-2)+\cdots+G(-8h)}{8h}$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\Sigma G(-8k)}{h}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\Sigma G(-8k-4)}{h}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\Sigma G(-4k-2)}{2h}$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{\Sigma G(-4k-1)}{2h}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\Sigma G(-4k-3)}{2h},$$

wo die einzelnen Summen sich über sämmtliche Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ... $8h$ von der angegebenen Linearform beziehen, deren Anzahl im Nenner steht, offenbar der mittlere Werth der Anzahl der Geschlechter überhaupt bei Formen von negativer Determinante gleich

$$\frac{1}{8}MG(-8k)+\frac{1}{8}MG(-8k-4)+\frac{1}{4}MG(-4k-2)$$
$$+\frac{1}{4}MG(-4k-1)+\frac{1}{4}MG(-4k-3)$$

d. h. gleich

$$\frac{4}{\pi^2}\left(N-1-\frac{1}{6}\log 2\right).$$

Hieraus folgt in bekannter Weise

$$MG(-n)=\frac{4}{\pi^2}\left(N-\frac{1}{6}\log 2\right). \tag{136}$$

Da bei positiven Determinanten keine Aenderung weiter eintritt, als dass der erste und zweite der gefundenen Ausdrücke (135) sich mit einander vertauschen, solche Vertauschung in der Schlussberechnung aber ohne Einfluss ist, so wird man für die mittlere Anzahl der Geschlechter quadratischer Formen auch einer *positiven* (nicht quadratischen) Determinante den gleichen Werth finden, wenn man annehmen darf, dass die Vernachlässigung der quadratischen Determinanten der unendlich viel grösseren Menge der nicht quadratischen gegenüber bei der Bestimmung des mittleren Werthes ohne merklichen Einfluss ist.

Die so gewonnenen Resultate hat übrigens Dirichlet auch mittels einer geeigneten Abänderung des in Nr. 9 skizzirten Verfahrens gefunden und dadurch die Ergebnisse der letztentwickelten Methode bestätigt.

22. Die Dirichlet'sche Reihe

$$F(s) = \sum_1^\infty \frac{f(n)}{n^s}, \tag{137}$$

welche einer gegebenen zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ entspricht, hängt mit ihren analytischen Eigenschaften von der Beschaffenheit eben dieser Funktion offenbar ab und könnte so als eine Funktion nicht blos von der Veränderlichen s, sondern auch von $f(n)$ aufgefasst werden. Die voraufgehenden Betrachtungen haben ausreichend gezeigt, wie umgekehrt der mittlere Werth von $f(n)$ von der analytischen Beschaffenheit der Funktion $F(s)$ bedingt wird, und haben so die selbstverständliche Thatsache, dass auch umgekehrt $f(n)$ als abhängig von $F(s)$ aufzufassen ist, in helles Licht gesetzt. Dies führt naturgemäss zu der Aufgabe, den Ausdruck der Funktion $f(n)$ mittels der Funktion $F(s)$ zu finden und sie auf solche Weise in analytischer Gestalt darzustellen. Eine einfache Ueberlegung wird genügen, eine Lösung dieser Aufgabe zu finden.

Wir wollen dabei unter σ einen gegebenen positiven Werth verstehen und voraussetzen, die Reihe (137) sei nur für alle s convergent, deren reeller Bestandtheil gleich oder grösser ist als σ. Ist dann x ein positiver Werth und $a > \sigma$, so dürfen wir den Ausdruck

$$\frac{x^s F(s)}{s}$$

über die Ordinate $s = a - \infty \cdot i$ bis $s = a + \infty \cdot i$ integriren und wollen setzen

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s F(s)\, d\log s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\frac{x}{n}\right)^s \cdot d\log s. \tag{138}$$

Vergleichen wir dies Integral mit dem Integrale (60) des 7. Abschnitts, so erkennen wir sogleich, dass das allgemeine Glied der Summe den Werth $f(n)$ oder 0 hat, je nachdem $x > n$ oder $< n$ ist, während es $\frac{1}{2} f(n)$ gleich ist, wenn x den ganzzahligen Werth n hat. Hieraus entsteht folgende Gleichung:

$$J(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + \lambda \cdot f[x], \tag{139}$$

wo $\lambda = \frac{1}{2}$ oder $\lambda = 1$ ist, je nachdem x einen ganzzahligen Werth hat oder nicht. Vermittelst derselben aber findet sich die gesuchte Umkehrung in der Formel

$$f(n) = J(n + 0) - J(n - 0). \tag{140}$$

Eine andere Art, $f(n)$ analytisch mittels $F(s)$ darzustellen, findet sich in Cantor's Notiz: Zur Theorie der zahlentheoretischen Funktionen, Mathem. Annalen Bd. 16 p. 587, die hier gegebene Formel bei Halphèn*), der sie benutzt hat, um auf eine andere Weise, als wir bisher betrachtet haben, die mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen aus den Dirichlet'schen Reihen zu erhalten.

Denken wir uns nämlich, die Funktion $F(s)$, welche durch die Formel (137) nur für diejenigen Punkte der Ebene der complexen Veränderlichen definirt ist, die zur Rechten der Ordinate $s = \sigma$ liegen, könne nach links hin stetig fortgesetzt werden und sei auf solche Weise für die Ordinate $s = b < a$ bestimmt, so wollen wir setzen

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} x^s F(s)\, d \log s; \tag{141}$$

b setzen wir als positiv voraus. Hat nun die Funktion $\frac{x^s F(s)}{s}$ oder, was nach den getroffenen Festsetzungen dasselbe besagt, die Funktion $F(s)$ in dem Stücke der Ebene, welches zwischen den Ordinaten $s = b$ und $s = a$ liegt, keine andern Unstetigkeitspunkte als Pole, und können zudem bei einer Integration um die Begrenzung dieses Stücks die im Unendlichen gelegenen Wegstücke vernachlässigt werden, so liefert der allgemeine Cauchy'sche Satz die Beziehung

$$J(x) = K(x) + \sum_p R(p), \tag{142}$$

wo die Summation über sämmtliche Pole $s = p$ zwischen jenen Ordinaten erstreckt werden muss und $R(p)$ das dem Pole p entsprechende Residuum ist. Setzt man

*) Halphèn, sur l'approximation des sommes de fonctions numériques, in Comptes Rendus 96 p. 634.

$$\frac{F(s)}{s} = \frac{c'}{s-p} + \frac{c''}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{c^{(\mu)}}{(s-p)^\mu} + \psi(s)$$

$$x^s = x^p \cdot e^{(s-p)\log x} = x^p \left(1 + (s-p)\log x + (s-p)^2 \frac{\log^2 x}{1 \cdot 2} + \cdots\right),$$

so findet sich $R(p)$ von der Gestalt

$$(143) \quad R(p) = x^p (P_1 \log^{\mu-1} x + P_2 \log^{\mu-2} x + \cdots + P_\mu),$$

wo $P_1, P_2, \ldots P_\mu$ unabhängig sind von x.

Unter der Voraussetzung also, dass für unendlich grosse Werthe von x die Funktion $K(x)$ von geringerer Ordnung ist als die Potenzen x^p, stellt sich aus (142) sofort folgendes asymptotische Gesetz für $J(x)$ d. i. für die summatorische Funktion von $f(n)$ heraus:

$$(144) \quad f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f[x] = \sum_p R(p).$$

Wir machen mit Halphèn hiervon die Anwendung auf die Funktion $f(n) = \varphi(n)$, für welche die Gleichung (137) nach Formel (41) des 11. Abschnitts die Gestalt annimmt:

$$F(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)},$$

wobei der reelle Bestandtheil von s grösser als 2 vorausgesetzt werden muss; daher setzen wir hier $\sigma = 2$. Da die Funktion $\zeta(s)$ in der nach Riemann angegebenen Weise auch für Werthe von s, deren reeller Bestandtheil kleiner als 1 ist, definirt ist, nach den Eigenschaften der Funktion $\zeta(s)$ aber in dem Flächenstück zwischen den Ordinaten $s = 1$ und $s = a$ für die Funktion $F(s)$ nur der eine Pol $s = 2$ erster Ordnung enthalten ist, so giebt uns die Formel (144), wenn wir b zwischen 1 und 2 wählen, die Gleichung

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi[x] = R(2)$$

d. h., da

$$R(2) = \left(\frac{x^s}{s} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} (s-2)\right)_{s=2} = \frac{x^2}{2\,\zeta(2)} = \frac{3x^2}{\pi^2}$$

gefunden wird, in Uebereinstimmung mit (62) das Resultat

$$(145) \quad \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi[x] = \frac{3x^2}{\pi^2},$$

sobald wir nachweisen können

erstens, dass bei der Integration die unendlich entfernten Wegstrecken vernachlässigt werden können,

zweitens, dass $K(x)$ von geringerer Ordnung ist als x^2.

Um das erstere zu zeigen, führen wir die Funktion

$$\Phi(s) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

ein, welche für jeden Werth von s, dessen reeller Bestandtheil positiv ist, durch diese alsdann convergente Reihe definirt und von welcher schon in Nr. (8) des 11. Abschnitts bemerkt worden ist, dass

$$\Phi(s) = \zeta(s) \cdot (1 - 2^{1-s})$$

ist. Setzt man nämlich dann

$$F_1(s) = \frac{\Phi(s-1)}{\zeta(s)} = F(s) \cdot (1 - 2^{2-s}), \tag{146}$$

so lässt sich offenbar $F_1(s)$ für jedes s in dem angegebenen Flächenstücke in eine Reihe von der Gestalt (137) entwickeln, und wenn wir

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s F_1(s)\, d \log s$$

$$K_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} x^s F_1(s)\, d \log s$$

setzen, so wird deshalb

$$K_1(x) = J_1(x).$$

Da ferner die Funktion $\frac{x^s F_1(s)}{s}$ innerhalb des Flächenstücks keinen Unstetigkeitspunkt hat, so folgt nach dieser Gleichung aus dem allgemeinen Satze von Cauchy, dass bei der Integration um das Flächenstück zwischen den Ordinaten $s = b$ und $s = a$ die unendlich fernen Wegstücke einen Integralbestandtheil liefern, der Null ist. Diese für die Funktion $F_1(s)$ geltende Thatsache wird sich, da nach (146) im Unendlichen die Funktionen $F(s)$ und $F_1(s)$ übereinstimmen, auch auf die Funktion $F(s)$ übertragen.

Zweitens folgt nach dieser selben Formel und weil

$$\frac{1}{1-2^{2-s}} = -\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(s-2)k}$$

gesetzt werden kann, wenn der reelle Bestandtheil von s kleiner als 2 ist, die Beziehung

$$K(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \cdot K_1(2^k x) \tag{147}$$

d. h. die Entwicklung von $K(x)$ in eine convergente Reihe. Theilen wir diese Reihe in einen anfänglichen Theil A, der die ersten $m-1$ Glieder umfasst, und den Rest R, so wird

$$R = \frac{1}{2^{2m}} K_1(2^m x) + \frac{1}{2^{2(m+1)}} K_1(2^{m+1} x) + \cdots$$

oder, wenn $2^m x = \xi$ gesetzt wird,

$$R = \frac{x^2}{\xi^2}\left(K_1(\xi) + \frac{1}{4} K_1(2\xi) + \cdots\right)$$

und folglich auch

$$\frac{R}{x^2} = \frac{1}{\xi^2}\left(K_1(\xi) + \frac{1}{4} K_1(2\xi) + \cdots\right),$$

wenn m hinreichend gross gedacht wird, beliebig klein sein und, da $\frac{A}{x^2}$ bei unendlich wachsendem x ebenfalls beliebig klein wird, gilt schliesslich dasselbe auch für $\frac{K(x)}{x^2}$.

Dieser Beweis des zweiten Punktes scheint uns insofern nicht völlig überzeugend, als der letzte Schluss kaum anders zulässig ist, als wenn die Reihe (147) gleichmässig für jedes x convergirt, was nicht nachgewiesen ist. —

Hiermit haben wir die wichtigsten Forschungen über die mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen innerhalb der diesem Werke gesetzten Grenzen berührt und damit unsere Darstellung der analytischen Zahlentheorie überhaupt vollendet.

Zusätze.

Zu Nr. 1 des 2. Abschnittes.

Bei der Betrachtung des Binomialcoefficienten ist der bekannte Ausdruck desselben der Kürze wegen der Combinationslehre entlehnt worden. Aber auch dieser ergiebt sich auf analytischem Wege, wenn man durch Multiplikation der Formel S. 14 Z. 1 mit $1 + z$ folgende Gleichung herstellt:

$$1 + C_1^{n+1} z + C_2^{n+1} z^2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1} z^{n+1}$$
$$= (1 + z)(1 + C_1^n z + C_2^n z^2 + \cdots + C_n^n z^n)$$

aus welcher die Recursionsformel

$$C_m^{n+1} = C_m^n + C_{m-1}^n$$

und aus ihr mittels des allgemeinen Inductionsverfahrens in der That der dort gegebene Ausdruck für C_m^n sich ergiebt.

S. zu diesem Abschnitte auch Vahlen, Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie, im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 112.

Zu Nr. 7 des 3. Abschnittes.

Die hier entwickelten Dedekind'schen Sätze werden von uns nur zur Herleitung des Dirichlet'schen Satzes in Nr. 8 sowie später im 13. Abschnitte benutzt; für diese Anwendungen dürfen die Coefficienten a_n als reell angesehen werden. Jedoch haben jene Sätze auch im Falle complexer a_n ihre Giltigkeit und die Betrachtungen, durch welche wir sie hergeleitet haben, bestehen allgemein, wenn man sich nur erlaubt, von einer Grösse $\alpha + \beta i$ zu sagen, sie liege zwischen $a + bi$ und $a' + b'i$, wenn α zwischen a, a' und β zwischen b, b' enthalten ist; demgemäss ist dann unter dem Mittelwerth einer

Reihe complexer Werthe ein Werth zu verstehen, dessen reeller und imaginärer Bestandtheil ein Mittelwerth der reellen resp. imaginären Bestandtheile jener Werthe ist; und unter dem Zeichen δ ist ein complexer Werth $\delta' + \delta'' i$ mit positiven Elementen zu denken, welche grösser sind als der numerische Werth des reellen Bestandtheils resp. des Coefficienten von i in der Differenz $\omega - \frac{A_i}{\log h_i}$. —

Zu Nr. 4 des 7. Abschnittes habe ich hinzuweisen auf die mir erst nachträglich bekannt gewordene Note von Kronecker: über die Dirichlet'sche Methode der Werthbestimmung der Gaussischen Reihen, in den Hamburger Mittheilungen II, 32—36.

Zu Nr. 7 des 7. Abschnittes.

Wir haben das Kronecker'sche Symbol $G\left(\frac{-mi}{n}\right)$ in etwas anderem Sinne gebraucht, als Kronecker selbst es gethan hat. Letzterer definirt es durch die Gleichung

$$2 \cdot G\left(\frac{-mi}{n}\right) = \sum_{0}^{2n-1} e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}}.$$

Da man nun für diese Summe auch schreiben darf

$$\sum_{0}^{n-1} \left(e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} + e^{(s+n)^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} \right)$$

und

$$e^{(s+n)^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}} = e^{mn\pi i} \cdot e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}}$$

ist, leuchtet sogleich ein, dass das Kronecker'sche Symbol

$$G\left(\frac{-mi}{n}\right) = 0$$

ist, wenn m, n ungerade sind, dagegen den von uns angewendeten Sinn hat, nämlich

$$G\left(\frac{-mi}{n}\right) = \varphi(m, n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \cdot \frac{m\pi i}{n}}$$

ist, wenn wenigstens eine der Zahlen m, n gerade ist.

Hieraus ist Folgendes zu schliessen: Wenn der rationale, rein imaginäre Werth ϱ, auf die einfachste Benennung mit positivem Nenner gebracht, $\varrho = \frac{mi}{n}$ ist, so wird die Formel (38) S. 161, so oft m (oder auch n) gerade ist, für $\varrho = \frac{mi}{n}$ erfüllt, gleichviel, in welchem Sinne man das Symbol G nimmt; sind dagegen m und n ungerade, so ist diese Formel für $\varrho = \frac{mi}{n}$ bei unserer Wahl desselben unerwiesen, bei der Kronecker'schen aber illusorisch, denn bei dieser sind dann auf ihrer linken Seite Zähler wie Nenner gleich Null. —

Zu Seite 203 bemerke man Hacks: über die Classenanzahl der zu einer negativen Determinante $-q$ gehörigen eigentlich primitiven quadratischen Formen, wo q eine Primzahl von der Form $4n + 3$ ist, Acta Mathem. Bd. 14.

Zu Nr. 8 des 12. Abschnittes.

Diese Nr. bedarf der berichtigenden Anmerkung, dass der dort ausgesprochene Satz von Tschebischeff allgemeiner so gefasst worden ist: Wenn $f(x)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen x ist, die für jedes über einen positiven Werth hinausliegende x positiv bleibt, so ist u. s. w. Der Beweis ergiebt sich durch eine leichte Modifikation unseres Verfahrens.

Zu Nr. 9—11 des 12. Abschnittes.

Leider erst während des Druckes dieses Abschnittes wurde ich mit der Habilitationsschrift von A. Piltz: über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze, Jena 1884, bekannt gemacht, von der ich gern mehr Gebrauch gemacht hätte, als es hier noch thunlich ist. Indem Piltz dem Gedankengange der Riemann'schen Arbeit über die Anzahl der Primzahlen tiefer nachspürt, entwickelt er daraus ein allgemeines Princip, durch welches es möglich werde, die asymptotischen Gesetze zahlentheoretischer Funktionen vollständiger zu ermitteln, als es bisher geschah, indem es verstatte, auch ihre periodischen Schwankungen zum

Ausdruck zu bringen. Dies Princip lässt sich folgendermassen aussprechen, wenn wir von gewissen näheren Bestimmungen, welche dabei zu beachten sind, der Kürze wegen hier absehen:

Sei

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

für alle s, deren reeller Bestandtheil grösser ist, als eine gewisse Grösse σ, convergent, und $F(s)$ in eine Summe zerlegt:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + \cdots, \tag{2}$$

deren einzelne Glieder sich in der Form bestimmter Integrale:

$$F_m(s) = \int_1^{\infty} f_m(x)\, x^{-s}\, dx \tag{3}$$

darstellen lassen. Dann ist für jeden Werth von s

$$\sum_{n=1}^{n<x} \frac{a_n}{n^s} = \sum_m \int_1^x f_m(x)\, x^{-s}\, dx\,. \tag{4}$$

Dies allgemeine Princip bestätigt Piltz — von einem einfachen, weniger interessanten Falle abgesehen — vornehmlich an demjenigen der Häufigkeit der Primzahlen. Er führt zunächst die Funktion $\zeta(s)$ auf die folgende:

$$B(z, s) = z^s + (z+1)^s + (z+2)^s + \cdots,$$

in welcher z positiv vorausgesetzt wird, und welche für jedes s, dessen reeller Bestandtheil kleiner als -1 ist, durch diese Gleichung definirt wird, zurück:

$$\zeta(-s) = B(1, s);$$

offenbar kommt auf diese neue Funktion auch die S. 341 mit $\zeta(s, a, m)$ bezeichnete zurück. Anders als es für letztere geschehen ist, erweitert Piltz die Bedeutung der Funktion $B(z, s)$, sodass sie für alle s gilt, deren reeller Bestandtheil kleiner ist, als eine beliebige positive ganze Zahl. Indem er dann diese so bestimmte Funktion $B(z, s)$ in eine für das Intervall $z = 0$ bis $z = 1$ giltige Fourier'sche Reihe entwickelt, erhält er eine Formel, welche den Riemann'schen

Satz S. 350 über die Funktion $\xi(s)$ als speciellen Fall in sich schliesst. Aus diesem Satze leitet er, auf die Riemann'schen Andeutungen sich stützend, deren Dunkelheit freilich auch noch nicht völlig erhellt wird, die Null- und Unendlichkeitsstellen der Funktion $\xi(s)$ her, stellt darauf

$$F(s) = -\frac{d \log \xi(s)}{ds} \quad \text{d. i. die Summe} \quad \sum \frac{\log p}{p^{ms}},$$

in welcher p^m alle positive Primzahlpotenzen anzunehmen hat, in der Form (2) dar und weist die Richtigkeit seines Principes d. i. die entsprechende Formel (4) für diesen Fall nach. Durch Integration nach s von s bis ∞ erhält er daraus einen für jedes s giltigen Ausdruck für die Summe

$$\sum \frac{1}{m} p^{-ms}, \quad (p^m < x)$$

und, indem dann $s = 0$ gesetzt wird, die Riemann'schen Formeln betreffend die Anzahl der Primzahlen unterhalb x; es findet sich hierbei, dass die Constante C in unserer Formel (67) S. 396, welche Riemann irrthümlich angegeben hat, den Werth $\log \frac{1}{2}$ hat.

Von dem weiteren Inhalte der Abhandlung, welche sich andeutungsweise noch über andere ähnliche Probleme, insbesondere über die Vertheilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen verbreitet, sei hier nur noch erwähnt, dass die Untersuchung der letzteren in dem besonders einfachen Falle, wo die Differenz der Progression eine ungerade Primzahl q ist, auf die Funktion

$$\zeta(s, \nu) = \sum \omega^{\nu \operatorname{ind} n} \cdot n^{-s}$$

zu gründen ist, in welcher ν eine ganze reelle Zahl, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{q-1}}$, und für n alle durch q nicht theilbaren positiven ganzen Zahlen zu setzen sind, eine Funktion, welche in naher Beziehung zu der auf S. 347 mit $F(s, D)$ bezeichneten steht, durch die Formel

$$\zeta(-s, \nu) = q^s \cdot \sum_{k=1}^{q-1} \omega^{\nu \operatorname{ind} k} \cdot B\left(\frac{k}{q}, s\right)$$

auf die Funktion $B(z, s)$ zurückkommt und daher eine gleiche Behandlung gestattet, wie die Funktion $\xi(s)$. Uebrigens gehört sie zu denjenigen, welche auch von Lipschitz in der S. 340 angeführten Abhandlung untersucht worden sind.

Endlich zeigt Piltz nebenbei, dass der S. 51 erwähnte, von Legendre behauptete Satz nicht richtig ist, vielmehr schon aufhört zu gelten, wenn $k = 7$ also $p_k = 19$ gewählt wird. In der That, werden die 8 Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 als die gegebenen angesehen, so ist z. B. von den 19 aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen

von 140 722 743 bis 140 722 779

jede durch wenigstens eine jener Primzahlen theilbar. —

S. zu diesem Abschnitte u. a. noch

Poincaré, sur la distribution des nombres premiers, C. R. 113 p. 819; Lorenz, analytiske Undersögelser over Primtalmängderne, Kjöb. Skrift. (6); auch die leider russisch geschriebene und mir deshalb unzugängliche Arbeit von Preobraschensky, das Princip der Knotenpunkte, Kasan Ges. 7.

Zum 13. Abschnitte, Formel (29a).

In den soeben ausgegebenen Mittheilungen der Mathem. Gesellschaft in Hamburg, Bd. III Nr. 4 findet sich eine Arbeit von E. Busche: über die Anzahl aller Theiler der Zahlen von 1 bis n. In derselben wird ein geometrisches Princip verwendet, um Theileranzahlen zu ermitteln. Man denke nämlich eine Ebene durch die rechtwinkligen Coordinatenaxen und die Parallelen zu denselben, welche den Abstand 1 von einander haben, in Quadrate zerlegt; die Netzpunkte dieser Zerlegung mögen die ganzzahligen Punkte der Ebene heissen. Zieht man dann vom Anfangspunkte durch die ganzzahligen Punkte mit positiver Abscisse und mit der Ordinate + 1 Strahlen, so werden die auf letzteren liegenden ganzzahligen Punkte Theilerpunkte genannt, denn die Ordinaten derjenigen von ihnen, welche auf die durch den ganzzahligen Punkt $(n, 0)$ gehende Senkrechte zur x-Axe fallen, sind die verschiedenen

Theiler von n. Die Theilerpunktebene kann nun als eine Abbildung der gewöhnlichen xy-Ebene aufgefasst werden, vermittelt durch die Gleichungen

$$x' = xy, \quad y' = y,$$

wo x', y' jeden Punkt der Theilerpunktebene bedeutet; den ganzzahligen Punkten der xy-Ebene entsprechen die Theilerpunkte der $x'y'$-Ebene. Denkt man sich dann die Theiler der aufeinander folgenden ganzen Zahlen irgend einer Grössenbedingung unterworfen, so liegen die zugehörigen Theilerpunkte innerhalb einer geschlossenen Figur der $x'y'$-Ebene, der eine ebensolche in der xy-Ebene entspricht, und ihre Anzahl ist gleich der Anzahl ganzzahliger Punkte in der letztern Figur; annähernd kann sie also durch den Inhalt der letztgenannten ausgedrückt werden.

Indem Busche dieses Princip zur Anwendung bringt auf die Anzahl der Theiler der Zahlen von 1 bis n d. i. auf die von uns mit $\tau(n)$ bezeichnete Funktion, erhält er nicht nur auf einfache Weise die Dirichlet'sche Formel (29a), sondern auch einige annähernde Ausdrücke dieser Funktion.

An derselben Stelle findet man eine Arbeit von J. Schröder: einige Sätze über Theileranzahlen sowie einige Anwendungen der Geometrie auf Zahlentheorie. Darin giebt Schröder eine anderweitige Herleitung der Dirichlet'schen Formel mittels einer besonderen Transformation der Summe $\sum_1^n \left[\frac{n}{k}\right]$, welche an die von Dirichlet verwendete erinnert. — Ausserdem aber leitet er eine Verallgemeinerung einer Formel her, welche zuerst von Lerch (Bulletin de la Soc. Roy. des Sciences de Bohême 1887) gegeben worden ist. Setzt man nämlich, während r, m, s gegebene positive ganze Zahlen bedeuten,

$$F(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{m} (1 - x^{r(v+i)+s})} - \frac{1}{\prod_{i=0}^{m-1} (1 - x^{r(v+i)+s})} \right),$$

so kann man für $x < 1$ die Summe sowohl in dieser Weise:

$$1 - \frac{1}{\prod_{i=0}^{m-1}(1-x^{ir+s})},$$

als auch folgendermassen schreiben:

$$-(1-x^{rm})\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{r\nu+s}}{\prod_{i=0}^{m}(1-x^{r(\nu+i)+s})},$$

und durch Gleichsetzung beider Ausdrücke die Formel bilden:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{r\nu+s}}{\prod_{i=0}^{m}(1-x^{r(\nu+i)+s})} = \frac{1-\prod_{i=0}^{m-1}(1-x^{ri+s})}{(1-x^{rm})\prod_{i=0}^{m-1}(1-x^{ri+s})}.$$

Wird nun, da $x<1$ angenommen, beiderseits nach steigenden Potenzen von x entwickelt und mit $C_n^{m,r,s}$ der Coefficient von x^n in der Entwicklung der rechten Seite bezeichnet, so findet sich ohne Mühe für denselben folgende Bedeutung: $C_n^{m,r,s}$ ist die Anzahl aller derjenigen Theiler der Zahlen

$$n - r\cdot\sum_{i=1}^{m} i\varrho_i \quad \text{für alle Werthe } 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \text{ der } \varrho_i,$$

welche grösser sind als $\sum_{i=1}^{m}\varrho_i$ und zugleich Complementärtheiler von der Form $r\nu+s$ (für $\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) besitzen. Nennt man $\psi_\gamma(\alpha;\beta)$ die Anzahl der Theiler von α, welche $>\beta$ sind und einen Complementärtheiler γ haben, so ist also

$$C_n^{m,r,s} = \sum \psi_{r\nu+s}\left(n - r\cdot\sum_{i=1}^{m} i\varrho_i;\ \ \sum_{i=1}^{m}\varrho_i\right),$$

wenn die Summe auf die genannten Werthe der Zeichen ν und ϱ_i erstreckt wird.

Der besondere Fall $m = r = s = 1$ liefert die Formel von Lerch:

$$\sum_{\varrho=0,1,2,\cdots} \psi(n-\varrho;\ \varrho) = n,$$

in welcher $\psi(\alpha;\ \beta)$ die Anzahl der Theiler von α bezeichnet, welche grösser als β sind.

Die so analytisch erhaltenen Formeln werden nun auch geometrisch nach dem Principe von Busche bestätigt. —

Zu Seite 415 und 416.

Die Vergleichung der Formeln auf diesen Seiten führt zu der Beziehung

$$\sum_1^n T'(k) = \sum_1^n T_1(k) - \frac{n}{2} + O(\sqrt{n}),$$

welche man — und mit ihr auch die Formel (111) — folgendermassen direkt herleiten kann. Ist k eine Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$, so ist jeder Theiler von k, welcher $< [\sqrt{k}]$ ist, eine Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots [\sqrt{n}]$. Umgekehrt, wenn h eine Zahl dieser Reihe ist, so ist zunächst $\left[\frac{n}{h}\right] \geq h$, ferner ist h ein Theiler derjenigen Zahlen k der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$, welche in der Formel

$$k = s \cdot h \quad \text{für } s = 1, 2, 3, \cdots \left[\frac{n}{h}\right]$$

enthalten sind, aber nur dann ein solcher Theiler, welcher $< [\sqrt{k}]$ ist, wenn $s > h$ ist, also nur für die letzten

$$\left[\frac{n}{h}\right] - (h-1)$$

Werthe von s. Hiernach ist ersichtlicherweise

$$\sum_1^n T'(k) = \sum_1^{[\sqrt{n}]} \left(\left[\frac{n}{h}\right] - (h-1) \right)$$

d. i.

$$\sum_1^n T'(k) = \sum_1^n T_1(k) - \frac{[\sqrt{n}]}{2} \left([\sqrt{n}] - 1 \right)$$

oder, was bewiesen werden sollte,

$$\sum_1^n T'(k) = \sum_1^n T_1(k) - \frac{n}{2} + O(\sqrt{n}).$$

Zu Seite 447.

Hier ist stillschweigend vorausgesetzt, dass $\binom{n}{B}^{\frac{1}{\beta}}$ keine ganze Zahl sei.

Berichtigungen.

Seite 39 Zeile 7 v. o. lies $24h+3$ statt $24h+s$.
„ 73 „ 1 u. 4 v. u. lies k_n statt k.
„ 106 „ 14 v. o. lies für statt ür.
„ 152 „ 8 v. u. lies 2^α statt 2α.
„ 257 „ 14 v. o. lies $a'\alpha'\gamma$ statt $a'\alpha\gamma$.
„ 275 „ 6 v. u. lies $(4a)$ statt (6).
„ 280 in Formel (13) lies $K(C_m)$ statt $K(C_m$.
„ „ „ „ „ lies q^{-s} statt q^-.
„ „ „ „ „ lies $K(C_q^{-1})$ statt $K(C^{-1})$.
„ 300 Zeile 6 v. u. lies (dx, y) statt $dx, y)$.
„ 328 „ 14 v. o. lies $1+\frac{1}{q^{3s}}$ statt $1+\frac{1}{q^{2s}}$.
„ 364 „ 15 v. o. lies $<\frac{3}{2}$ statt $<\frac{3}{-}$.
„ 476 „ 14 v. o. lies $\sum_0^\infty$ statt $\sum$.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA 295 B34 1894
Bachmann, Paul Gustav Heinrich
Die analytische Zahlentheories

P&A Sci